Презентация на тему: «Метод Ньютона-Рафсона»

Составитель: Якимкина Полина Васильевна
Телефон: +79999600469
E-mail: yakimkina.polina@inbox.ru
Учебное заведение: МГТУ им. Н.Э. Баумана
Группа: ФН12-21Б
Преподаватели: Дебривная Т. Л., Серебрякова И. Л.

Москва - 2018

Понятие

- Метод Ньютона (также известный как метод касательных) — это итерационный численный метод нахождения корня заданной функции. Метод Ньютона — Рафсона является улучшенным методом Ньютона нахождения экстремума.

- Был впервые предложен английским астрономом, физиком и математиком Исааком Ньютоном (1643—1727).

- Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации.

Описание метода

- *Классический метод Ньютона* заключается в том, что если x{n} — некоторое приближение к корню x уравнения f(x)=0, то следующее приближение определяется как корень касательной к функции f(x), проведенной в точке x{n}.

Уравнение касательной к функции f(x) в точке x{n} имеет вид:

$$f'(x_j) = \frac{y - f(x_n)}{x - x_n}$$

В уравнении касательной положим y=0 и x=x{n+1}.

Тогда алгоритм последовательных вычислений в методе Ньютона-Рафсона состоит в следующем:

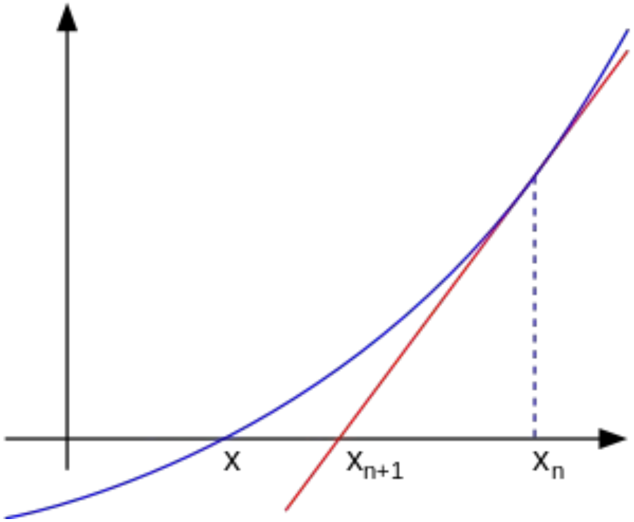
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

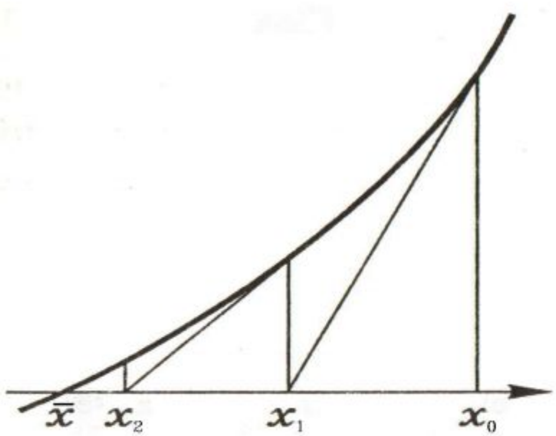
Описание метода

- *Преимущество* метода Ньютона-Рафсона: сходимость* метода касательных Ньютона очень быстрая.

- *Недостаток* метода Ньютона-Рафсона*:* негарантированная сходимость и необходимость вычислять первые и вторые производные на каждом шаге.

* Сходимость – скорость, с которой алгоритм достигает требуемой точности корня функции за конечное число шагов.





Синим изображена функция f(x), нуль которой необходимо найти, красным — касательная в точке очередного приближения x{n}.

Здесь мы можем увидеть, что последующее приближение лучше предыдущего.

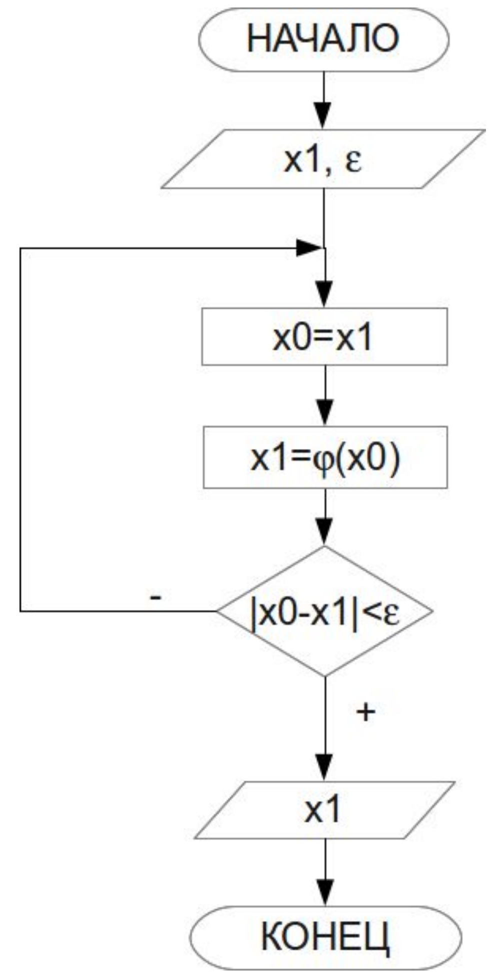
Геометрическая интерпретация метода

Схема алгоритма уточнения корня

Задается начальное приближение x(0).

Пока не выполнено условие остановки, в ка $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ого можно взять

(то есть погрешность в нужных пределах), вычисляют новое приближение: $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$



Пример

- $f(x) = \cos x - x^3$

Первая производная: $f'(x) = -\sin x - 3x^2$

Вторая производная: $f''(x) = -\cos x - 6x^1$

Так как cos(x)<=1 для всех x и x^3>1 очевидно, что решение лежит между 0 и 1. Возьмём в качестве начального приближения значение x0=0.5, тогда получим следующие приближенные корни (см. рисунок).

$x_1 =$ - 0.30658052

$x_2 =$ - 0.20561755

$x_3 =$ - 0.1482943

$x_4 =$ - 0.11317936

$x_5 =$ - 0.090205

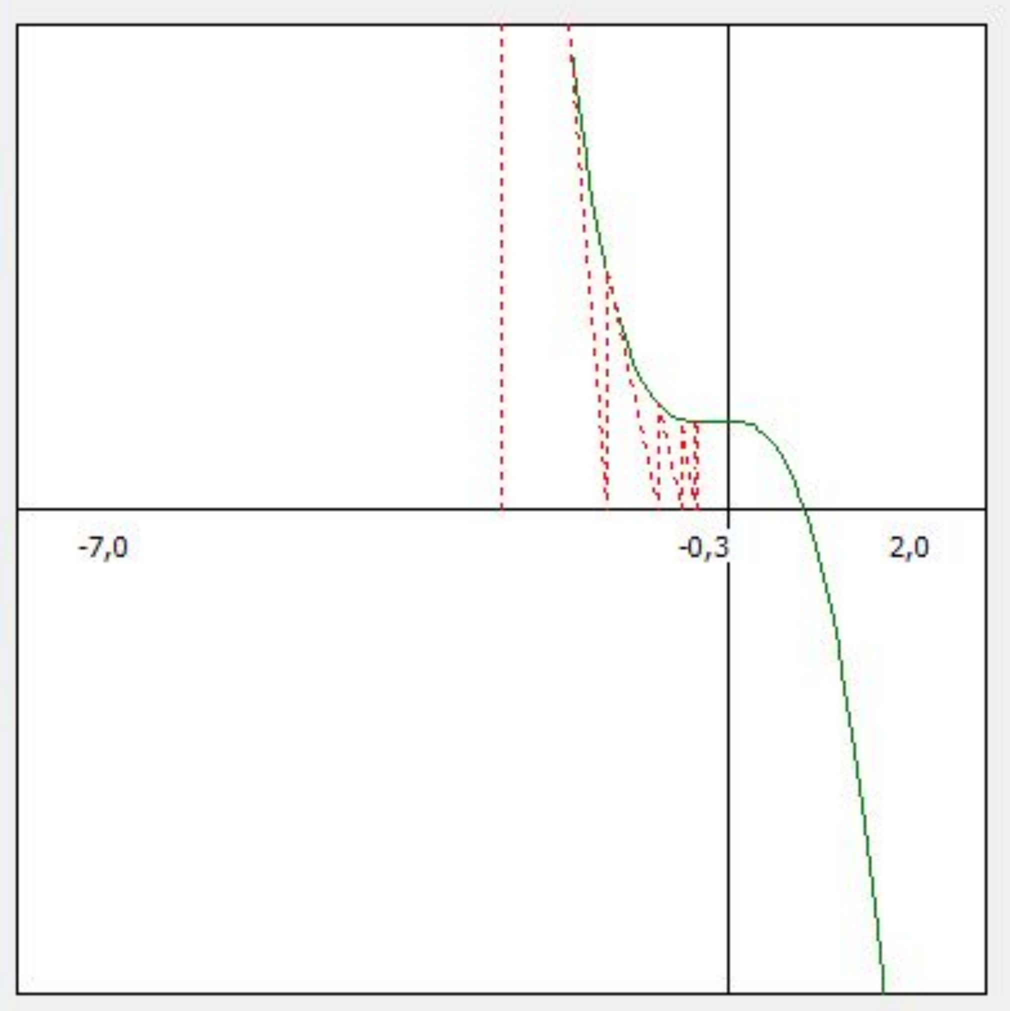
$x_6 =$ - 0.07432457

$x_7 =$ - 0.06284135

Пример

График последовательных приближений

$$f(x) = \cos x - x^3$$



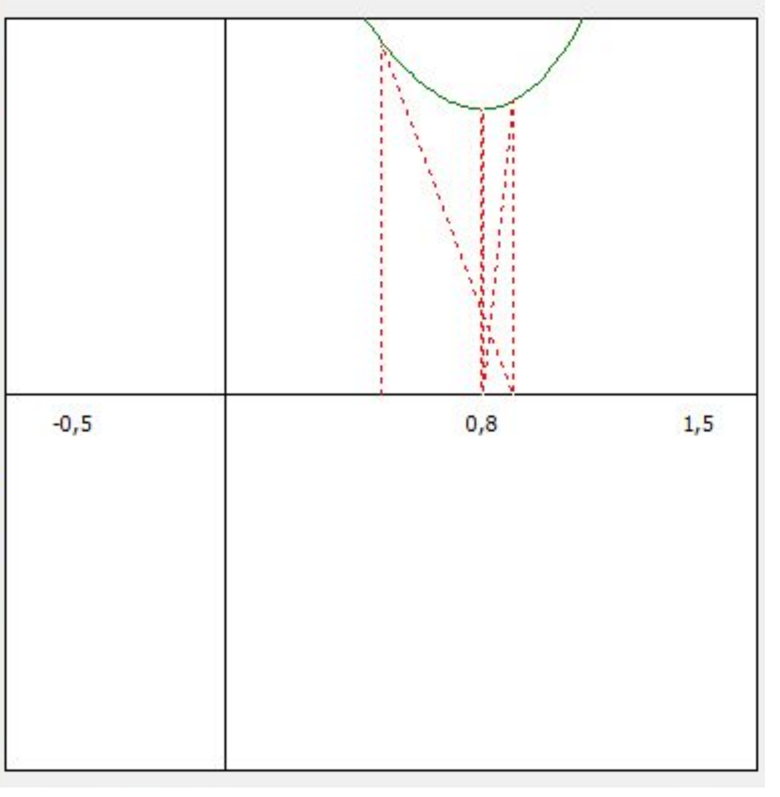
Контрпример

Если начальное приближение недостаточно близко к решению, то метод может не сойтись.

Пусть $f(x) = x^3 - 2x + 2$

Тогда $f'(x) = 3x^2 - 2 \quad f''(x) = 6x$

Возьмём нуль в качестве начального приближения. Первая итерация даст в качестве приближения единицу. В свою очередь, вторая снова даст нуль. Метод зациклится и решение не будет найдено.



Источники

- https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0
- http://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/vychislitelnaia-matematika/5-2-1-metod-niutona-rafsona
- https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1034652

Спасибо за внимание!