

* Показательные неравенства

11 класс

Показательные неравенства

```
graph TD; A[Показательные неравенства] --> B[Определение]; A --> C[Простейшие неравенства]; A --> D[Решение сложных неравенств];
```

Определение

**Простейшие
неравенства**

**Решение сложных
неравенств**

* Определение

Показательные неравенства -
это неравенства, в которых
неизвестное содержится в
показателе степени.

Примеры: $3^x \leq 9$; $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$$\begin{array}{l|l} a^{f(x)} > a^{g(x)} & a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \\ a^{f(x)} < a^{g(x)} & a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \end{array}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – любое число.

При решении **простейших** неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.

$$\left. \begin{array}{l} a^{f(x)} \textcircled{>} a^{g(x)} \\ a > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(x) \textcircled{>} g(x) \quad \left| \quad \left. \begin{array}{l} a^{f(x)} \textcircled{>} a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(x) \textcircled{<} g(x)$$

Для решения более **сложных** показательных неравенств используются те же способы, что и при решении показательных уравнений.

Решение показательных неравенств

- Простейшие показательные неравенства
- Двойные неравенства
- Неравенства, решаемые вынесением за скобки степени
- Неравенства, решаемые заменой переменной

Простейшие показательные неравенства

$$1). \quad 3^x > 9 \Leftrightarrow 3^x \textcircled{>} 3^2 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} x \textcircled{>} 2$$

Ответ : $x > 2$.

$$2). \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \textcircled{>} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} x \textcircled{<} 2$$

Ответ : $x < 2$.

Двойные неравенства

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9$$

$$3^{-1} < 3^{3+x} < 3^2$$

?, то

$$-1 < 3 + x < 2$$

$$-1 - 3 < x < 2 - 3$$

$$-4 < x < -1$$

Ответ: (- 4; -1).

Решение

показательных неравенств

Метод: Вынесение за скобки степени с одинаковым показателем степени

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^x \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{3} \right) > 10$$

$$3^x \cdot \left(\frac{1+9}{27} \right) > 10$$

$$3^x \cdot \frac{10}{27} > 10 \quad \Big| \quad : \frac{10}{27}$$

$$3^x > 27$$

$$3^x > 3^3$$

?, то $x > 3$

Ответ: $x > 3$

Решение показательных неравенств

Метод: Замена переменной

$$3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$$

$$3 \cdot 3^{2x} + 11 \cdot 3^x - 4 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

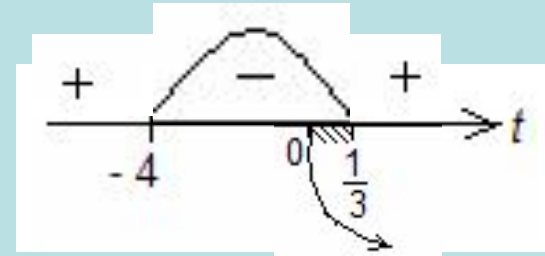
$$3t^2 + 11t - 4 < 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 121 + 48 = 169 = 13^2$$

$$t_1 = \frac{-11 + 13}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{-11 - 13}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

$$3(t + 4) \left(t - \frac{1}{3} \right) < 0$$



$$0 < t < \frac{1}{3}; 0 < 3^x < \frac{1}{3}$$

$$3^x < 3^{-1};$$

$$? \quad x < -1.$$

ОТВЕТ: $x < -1$.