

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x,y)$.

l – некоторое направление, задаваемое единичным вектором

$$\overset{\sphericalangle}{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$$

где

$$\left| \overset{\sphericalangle}{l} \right| = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \quad \text{т.к.} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \dots$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ – косинусы углов, образованных данным вектором с осями координат. Они называются направляющими косинусами.

При перемещении в направлении l точки $M(x,y)$ в точку

$$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

Функция z получит приращение

$$\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

которое называется приращением функции z в данном направлении l .

Если

$$|MM_1| = \Delta l$$

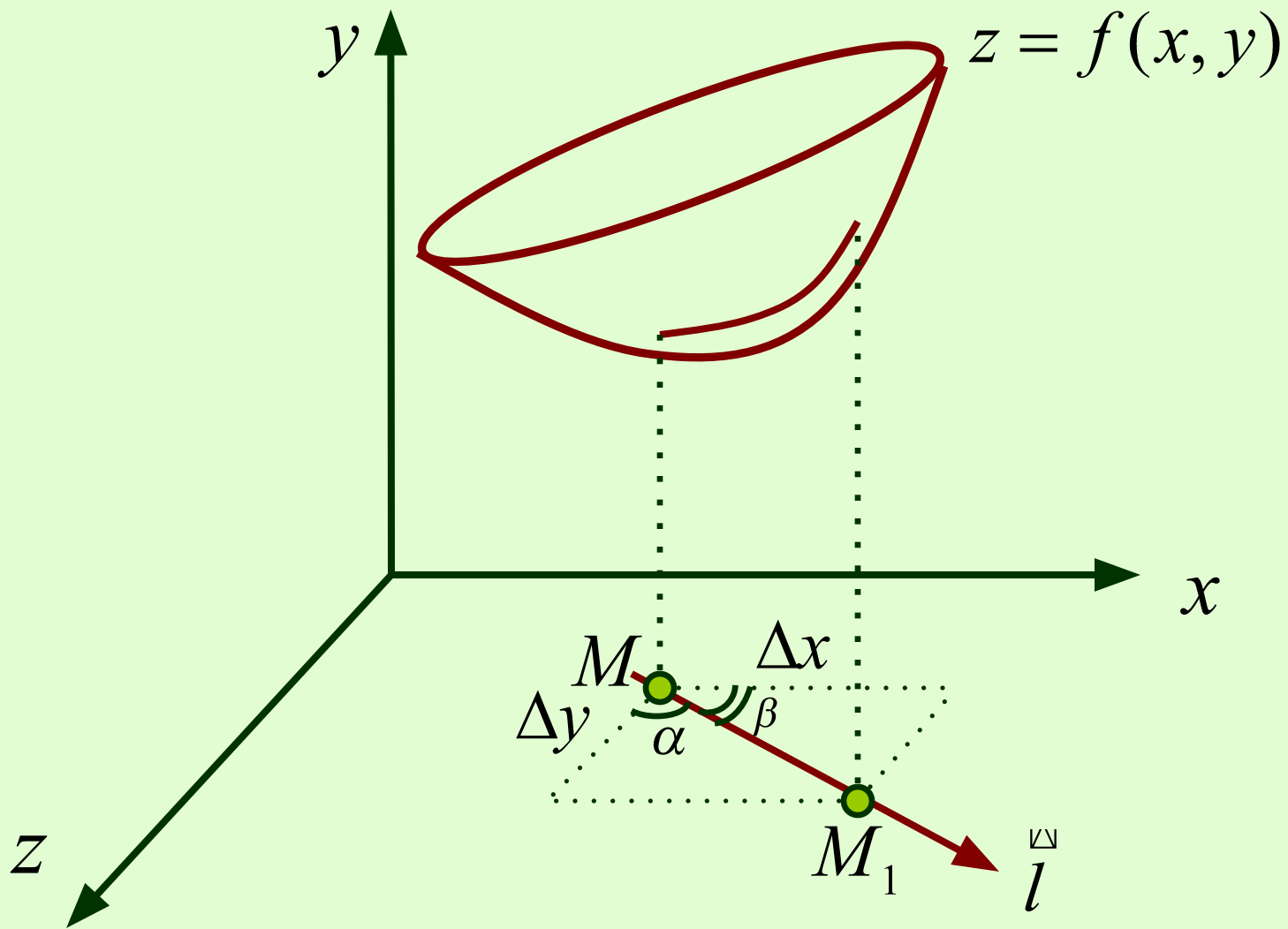
то

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta y = \Delta l \cdot \cos \beta$$



$$\Delta_l z = f(x + \Delta l \cdot \cos \alpha, y + \Delta l \cdot \cos \beta) - f(x, y)$$



*Производной по направлению z'_l
функции двух переменных $z=f(x,y)$
называется предел отношения
приращения функции в этом
направлении к величине перемещения
 Δl при
 $\Delta l \rightarrow 0$*

$$z'_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении l .

Рассмотренные ранее производные

$$z'_x \quad \text{и} \quad z'_y$$

есть производные по направлениям, параллельным осям абсцисс и ординат, соответственно.

Покажем, что

$$z'_l = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta$$

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta l \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta l \cos \beta$$

Делим обе части на Δl и переходим к пределу:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta = \\ &= z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

Градиентом функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется вектор с координатами

$$(z'_x ; z'_y)$$

$$\nabla_z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} ; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Рассмотрим скалярное произведение (∇_z, \vec{l})

Скалярное произведение в координатах имеет вид:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

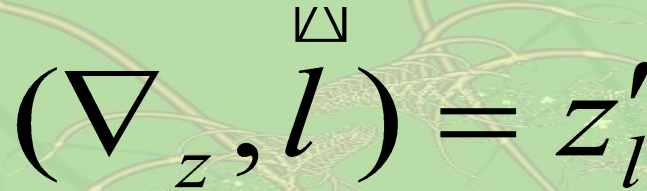
Поскольку

$$\nabla_z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\nabla_z, \overset{\boxtimes}{l}) &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta = \\ &= z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta = z'_l\end{aligned}$$


$$(\nabla_z, \overset{\boxtimes}{l}) = z'_l$$

Производная по направлению есть скалярное произведение градиента и единичного вектора, задающего данное направление.

Поскольку скалярное произведение максимально, если вектора одинаково направлены, то

Градиент функции в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в данной точке.

Если задана функция трех переменных $f(x,y,z)$, то градиент будет являться трехмерным вектором с компонентами:

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Или

$$\nabla = (f'_x; f'_y; f'_z)$$

ТЕОРЕМА.

Пусть задана дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ и пусть в точке $M(x_0, y_0)$ величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку.