

простейших тригонометрических выражений.

Лекция 1. Основные формулы тригонометрии

Формулы приведения

- $\sin(t + 2\pi k) = \sin t; \cos(t + 2\pi k) = \cos t,$
 $k \in \mathbf{Z};$
- $\sin(t + \pi) = -\sin t; \cos(t + \pi) = -\cos t;$
- $\sin(-t) = -\sin t; \cos(-t) = \cos t;$
- $\sin(\pi - t) = \sin t; \cos(\pi - t) = -\cos t;$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t; \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t;$

- $\operatorname{tg}(t + k\pi) = \operatorname{tg} t; \operatorname{ctg}(t + k\pi) = \operatorname{ctg} t; k \in \mathbf{Z};$
- $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t; \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t;$
- $\operatorname{tg}(\pi - t) = \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t; \operatorname{ctg}(\pi - t) = -\operatorname{ctg} t;$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t; \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t.$

Формулы сложения

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha;$

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha;$

- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$

- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$

Формулы удвоения

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$; $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$;
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Формулы половинного угла

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Примеры

Формулы приведения

- $\sin 370^\circ = \sin(10^\circ + 360^\circ) =$
 $= \sin 10^\circ;$

- $\cos 190^\circ = \cos(10^\circ + 180^\circ) =$
 $= -\cos 10^\circ;$

- $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{8} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + \pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8};$

- $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) =$
 $= \cos 10^\circ.$

Формулы сложения

$$\begin{aligned} \bullet \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ &= \\ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$