

Предел функции

- Второй замечательный предел
- Бесконечно малые функции
- Непрерывность функции в точке
- Точки разрыва функции
- Основные теоремы о непрерывных функциях
- Непрерывность функции на интервале и на отрезке
- Свойства функций, непрерывных на отрезке

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется равенство:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Следствия:

2.7182818284

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kx} \right)^{kx} = e$$

Второй замечательный предел применяется для раскрытия неопределенности 1^∞ .

Другие полезные формулы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^m - 1}{x} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)+4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x+3}$$

$$\left[\frac{4}{x-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 4y + 1; \quad x \rightarrow \infty; \quad y \rightarrow \infty \right]$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{4y+1+3} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{4y} \cdot \left(1 + \frac{1}{y} \right)^4$$

$$= \left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^4 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^4 = e^4 \cdot 1^4 = e^4$$

Бесконечно малые функции

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) если
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$$

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами; обозначают обычно греческими буквами α, β и т. д.

Например:
$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = 0 \Rightarrow$$

$\alpha(x) = \sin x$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow 0$

Теорема

Если функция $y = f(x)$ имеет предел, равный A , то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$$

Бесконечно малые функции

Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ – бесконечно малые функции

◆ Если
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

то говорят, что $\alpha(x)$ является **бесконечно малой высшего порядка** по сравнению с $\beta(x)$: $\alpha = o(\beta)$

◆ Если
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m \quad (m \neq 0)$$

то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – **бесконечно малые одного и того же порядка**.

◆ Если
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$
 то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые $\alpha \sim \beta$

Бесконечно малые функции

Некоторые свойства бесконечно малых

- ◆ Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями:

$$\gamma = \alpha \cdot \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma = o(\alpha); \quad \gamma = o(\beta)$$

- ◆ Бесконечно малые эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность является бесконечно малой высшего порядка относительно α и β .

$$[\gamma = \alpha - \beta; \gamma = o(\alpha); \gamma = o(\beta)] \Rightarrow \alpha \sim \beta$$

- ◆ Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой.

$$\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A; \quad \alpha \sim \alpha_1; \quad \beta \sim \beta_1 \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A$$

Бесконечно малые функции

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых при $x \rightarrow 0$

$$\begin{array}{lll} \sin x \sim x; & e^x - 1 \sim x; & (1+x)^m - 1 \sim mx; \\ \operatorname{tg} x \sim x; & a^x - 1 \sim x \cdot \ln a; & 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}. \\ \arcsin x \sim x; & \ln(x+1) \sim x; & \\ \operatorname{arctg} x \sim x; & \log_a(x+1) \sim x \cdot \log_a e; & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{1+x} - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) \left(\begin{array}{l} \sin x \sim x \\ (1+x)^{\frac{1}{4}} - 1 \sim \frac{1}{4} x \end{array} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{0.25x} = 4 \end{aligned}$$

Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , и в самой точке x_0 .

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Равенство (1) означает выполнение трех условий:

- 1 Функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности.
- 2 Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$
- 3 Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Непрерывность функции в точке

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ то равенство (1) можно записать в виде:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$$

Это значит, что при нахождении предела непрерывной функции можно перейти к пределу под знаком функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

Равенство справедливо в силу непрерывности функции $y = e^x$

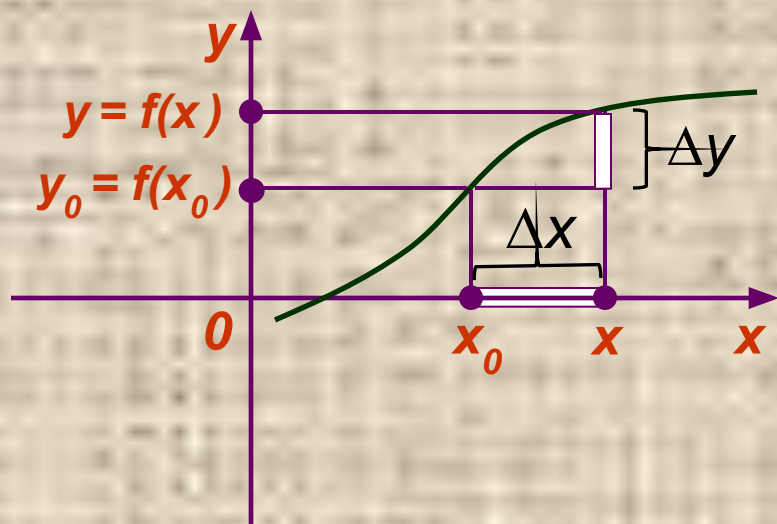
Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой интервале $(a; b)$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$

Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается:

$$\Delta x = x - x_0$$

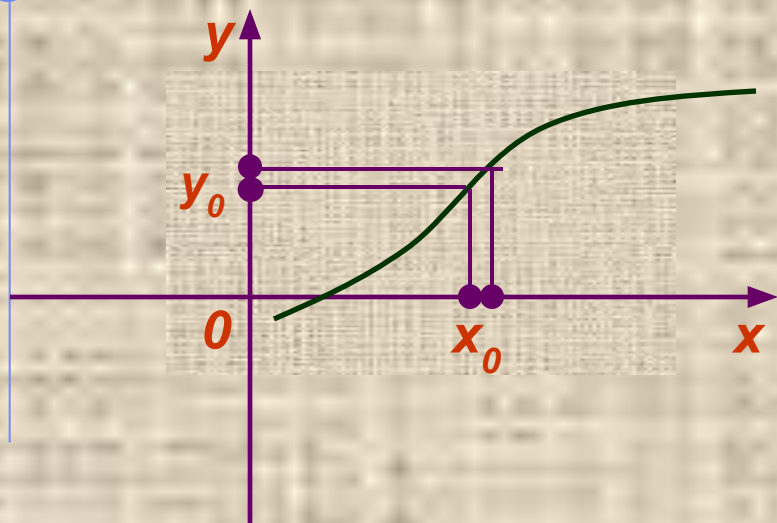


Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Приращения Δx и Δy могут быть положительными и отрицательными.

Непрерывность функции в точке



Преобразуем равенство (1):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$$
$$\lim_{x - x_0 \rightarrow 0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Полученное равенство является еще одним определением непрерывности функции в точке:

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0 , если она определена в точке x_0 и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Точки разрыва функции

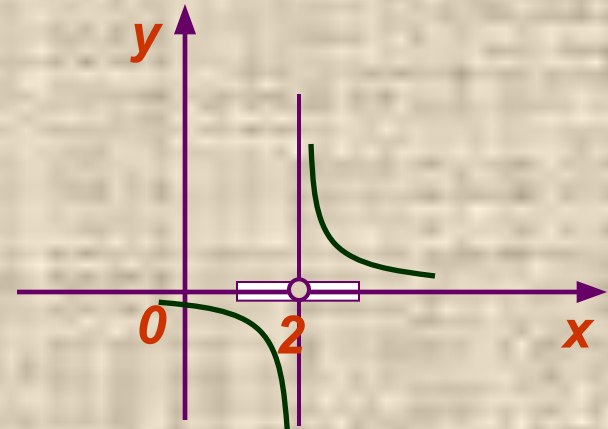
Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называется *точками разрыва функции*.

Если $x = x_0$ – точка разрыва функции, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности, а именно:

- 1 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , но не определена в самой точке x_0 :

Функция $y = \frac{1}{x - 2}$

не определена в точке $x = 2$, но определена в любой окрестности этой точки, поэтому $x = 2$ - точка разрыва.

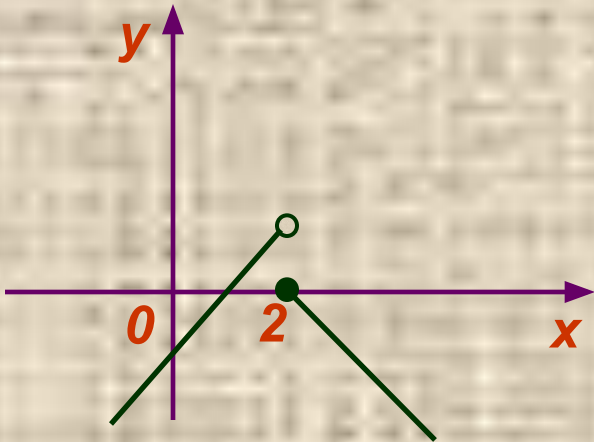


Точки разрыва функции

2 Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$

Функция
$$y = \begin{cases} x - 1; & x < 2 \\ 2 - x; & x \geq 2 \end{cases}$$

определена в точке $x = 2$, но не имеет предела при $x \rightarrow 2$:



$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) \Rightarrow$$

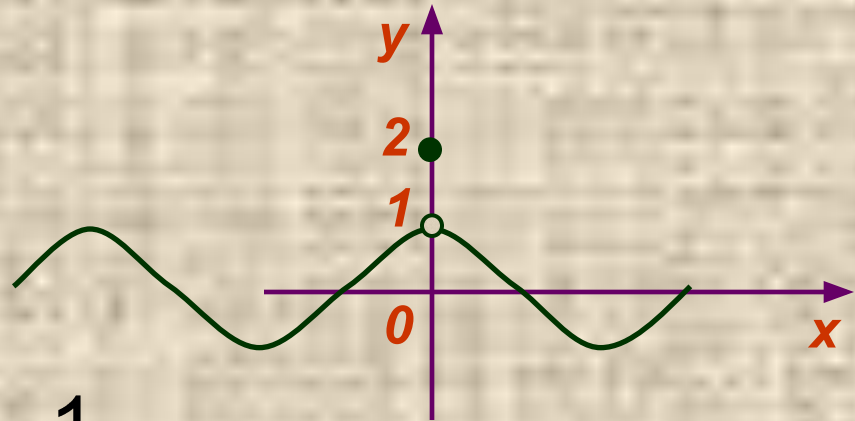
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ не существует, значит $x = 2$ - точка разрыва

Точки разрыва функции

3 Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности, существует предела $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

$$y = \begin{cases} \cos x; & x \neq 0 \\ 2; & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow x = 0 \text{ -точка разрыва}$$

Точки разрыва функции

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва 1 рода* функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы слева и справа:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$

При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то x_0 - *точка устранимого разрыва*
(в примере 3: $x = 0$ – точка устранимого разрыва 1 рода)

б) если $A_1 \neq A_2$, то x_0 - *точка конечного разрыва*

Величину $|A_1 - A_2|$ называют *скачком функции* в точке разрыва 1 рода.

(в примере 2: $x = 2$ – точка разрыва 1 рода, скачек функции равен: $|1 - 0| = 1$)

Точки разрыва функции

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва 2 рода* функции $f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

В примере 1: $y = \frac{1}{x-2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$x = 2$ – точка разрыва 2 рода.

Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1

Сумма, произведение и частное непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, где знаменатель равен нулю)

Теорема 2

Пусть функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Можно доказать, что все **основные элементарные функции** непрерывны при всех значениях x , при которых эти функции определены.

Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: **всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.**

Непрерывность функции в интервале и на отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале $(a; b)$* , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке $[a; b]$* , если она непрерывна на интервале $(a; b)$, и в точке $x = a$ непрерывна справа:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$$

а в точке $x = b$ непрерывна слева:

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$$

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса)

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения

Теорема (Больцано - Коши)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает все значения между A и B .

Следствие

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c , в которой данная функция обращается в ноль: $f(c) = 0$

