

Теория вероятностей

Испытание, опыт – некоторый комплекс условий и действий, направленных на достижение какой-то цели.

- Пример 1. Монета подбрасывается один раз.
- Пример 2. Из колоды карт наудачу извлекается одна карта.
- Пример 3. Монета наудачу подбрасывается три раза

Событие – результат испытания

Элементарный исход - некоторый простейший результат опыта (обозначим w_i)

- Пример 1. $w_1 = \text{«р»}$, $w_2 = \text{«г»}$
- Пример 3. $w_1 = \text{«р р р»}$, $w_2 = \text{«р р г»}$, $w_3 = \text{«р г р»}$, $w_4 = \text{«г р р»}$, $w_5 = \text{«р г г»}$, $w_6 = \text{«г р г»}$, $w_7 = \text{«г г р»}$, $w_8 = \text{«г г г»}$

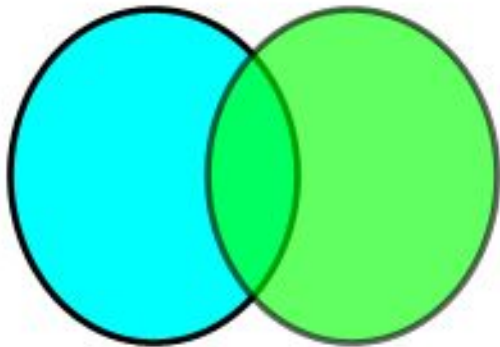
Все элементарные исходы объединяются во множество элементарных исходов Ω , мощность данного множества $|\Omega|$ равна количеству элементарных исходов.

- Пример 1. $\Omega = \{w_1, w_2\}$, $|\Omega| = 2$.
- Пример 3. $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_8\}$, $|\Omega| = 8$.

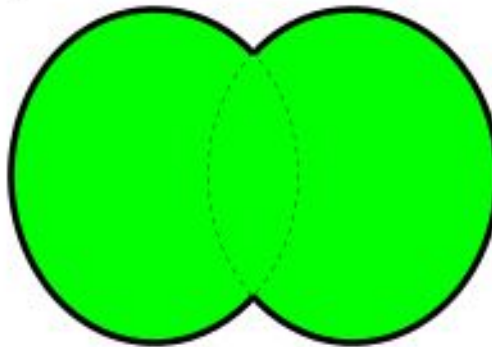
Случайным событием называется некоторое подмножество множества элементарных исходов Ω

- Обозначается: A, B, C

Элементарные исходы, осуществление которых означает наступление случайного события A называются благоприятствующими событию A



A B



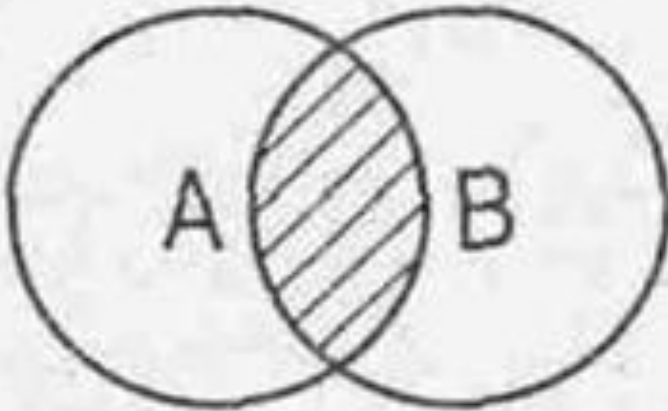
$C = A \cup B$

$\cup$ - или

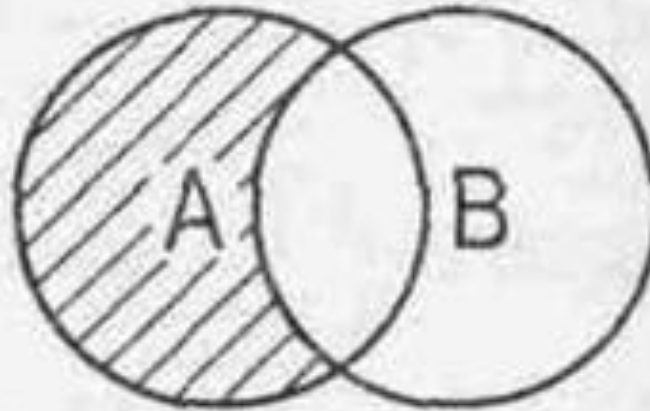
$\cap$ - и

$\cap$ - пересечение

$\setminus$ - вычитание



Пересечение
($A \cap B$)



Вычитание
($A \setminus B$)

Суммой событий A и B называется событие $C = A \cup B = \{\omega_i \in \Omega: \omega_i \in A \vee \omega_i \in B\}$, которому благоприятствуют исходы, благоприятствующие или событию A , или B

Произведением двух событий A и B называют событие $D = A \cap B = \{\omega_i \in \Omega: \omega_i \in A \wedge \omega_i \in B\}$, которому благоприятствуют исходы, благоприятствующие и событию A , и событию B .

Случайное событие $\bar{A}$ называется противоположным событию A , если ему благоприятствуют все элементарные исходы из Ω , которые не благоприятствуют событию A

- Достоверным называют событие, если ему благоприятствуют все элементарные исходы Ω
 - Пример. Вытянуть белый шар из урны с белыми шарами
- Невозможным называют событие, если ему не благоприятствует ни один элементарный исход из множества Ω
 - Пример. Вытянуть синий шар из урны с белыми шарами

Измеримое пространство. Алгебра событий

Система подмножеств множества

Ω называется алгеброй событий(A), если

1) $\Omega \in A$

2) Для любого $A, B \in A \Rightarrow A \cup B \in A, A \cap B \in A$

3) Для любого $A \in A \Rightarrow \Omega \setminus A = \bar{A}$

Пару $\langle \Omega, A \rangle$ будем называть измеримым пространством

Классическое определение вероятности

- Будем рассматривать испытания, в которых множество элементарных исходов конечно
- Будем считать, что все элементарные исходы - равновозможны, т.е. при проведении испытания все исходы имеют равные шансы на реализацию

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A ; n — число всех возможных элементарных исходов испытания. Здесь предполагается, что элементарные исходы единственно возможны и равновозможны.

Некоторые простейшие свойства вероятности события

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.е.

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

$$P(\emptyset) = 0.$$

Элементы комбинаторики

Правило суммы. Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, элемент A_2 — другими n_2 способами, A_3 — отличными от первых двух n_3 способами и т.д., A_k — n_k способами, отличными от первых $(k-1)$, то выбор одного из элементов: или A_1 , или $A_2, \dots$, или A_k может быть осуществлен $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Правило произведения. Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент A_2 может быть выбран n_2 способами и т.д., после каждого $(k-1)$ выбора элемент A_k может быть выбран n_k способами, то выбор всех элементов $A_1, A_2, \dots, A_k$ в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Старостой может быть выбран любой из 30 учащихся, его заместителем — любой из оставшихся 29, а профоргом — любой из оставшихся 28 учащихся, т.е. $n_1=30$, $n_2=29$, $n_3=28$. По правилу произведения общее число способов выбора старосты, его заместителя и профорга $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$

- Если комбинации из n элементов по m отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения (либо и тем и другим), то такие комбинации называют размещениями из n элементов по m . Число размещений из n элементов по m равно

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}}$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

Если комбинации из n элементов по m отличаются только составом элементов, то их называют *сочетаниями* из n элементов по m . Число сочетаний из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Так как по определению $0! = 1$, то $C_n^0 = 1$.

Свойства числа сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Если комбинации из n элементов отличаются только порядком расположения этих элементов, то их называют *перестановками* из n элементов. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!$$

Теоремы сложения

- События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.
 - **Пример 1.** Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.
 - **Пример 2.** Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.
- В частности, если два события A и B — несовместные, то $A + B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.
- Пусть события A и B — несовместные, причем вероятности этих событий известны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие A , либо событие B ?
- **Теорема.** Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:
 - $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Примеры

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

• **Решение.** Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие A) $P(A) = 10/30 = 1/3$. Вероятность появления синего шара (событие B) $P(B) = 5/30 = 1/6$. События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую — 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

• **Решение.** События A — «стрелок попал в первую область» и B — «стрелок попал во вторую область» — несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,80.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

- Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.
 - **Пример 1.** A — появление четырех очков при бросании игральной кости; B — появление четного числа очков. События A и B — совместные.
- Пусть события A и B совместны, причем даны вероятности этих событий и вероятность их совместного появления. Как найти вероятность события $A + B$, состоящего в том, что появится хотя бы одно из событий A и B ?
 - **Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

Произведение событий

Теорема умножения вероятностей. Вероятность

совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A)P(B/A)$.

Событие B называют независимым от события A , если появление события A не изменяет вероятности события B , т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P(B/A) = P(B)$

- То есть событие B не зависит от события A , тогда и событие A не зависит от события B ; это означает, что свойство независимости событий взаимно.
- Тогда теорема произведения для независимых событий имеет вид: $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

Полная группа событий

- **Теорема.** Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.
 - Если события образуют $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, то они единственно возможные и несовместные
- **Пример.** Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C . Вероятность получения пакета из города A равна $0,7$, из города B — $0,2$. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \quad (*)$$