Односторонние пределы

Число А1 называется пределом функции *f(x)* слева в точке *a* и обозначают $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или *f(a-0)*, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\colon \forall x \in (a-\delta, a) \to |f(x) - A1| < \varepsilon$$

Число А2 называется пределом функции *f(x)* справа в точке *a* и обозначают $\lim_{x\to a+0} f(x)$ или *f(a+0)*, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\colon \forall x \in (a, a+\delta) \to |f(x) - A2| < \varepsilon$$

Утверждение. Функция *f(x)* имеет предел в точке *a* тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции и выполняется равенство *f(a-0)= f(a+0)*

Непрерывность

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке*** x_0, *если она удовлетворяет следующим трем условиям:* 1) *определена в точке* x_0 (*т.е. существует* $f(x_0)$), 2) *имеет конечный предел функции при* $x \to x_0$; 3) *этот предел равен значению функции в точке* x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется* ***непрерывной в точке*** x_0, *если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Свойства функций, непрерывных в точке

1. *Если функции* $f(x)$ и $\varphi(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *то их сумма* $f(x)+\varphi(x)$, *произведение* $f(x)\varphi(x)$ *и частное* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (*при условии* $\varphi(x_0)\neq 0$) *являются функциями, непрерывными в точке* x_0.

2. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 и $f(x_0)>0$, *то существует такая окрестность точки* x_0, *в которой* $f(x)>0$.

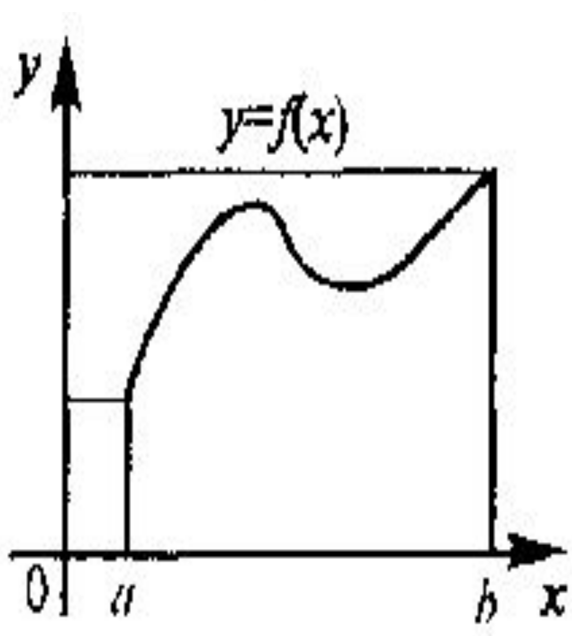
3. *Если функция* $y=f(u)$ *непрерывна в точке* u_0, *а функция* $u=\varphi(x)$ *непрерывна в точке* $u_0=\varphi(x_0)$, *то сложная функция* $y=f[\varphi(x)]$ *непрерывна в точке* x_0.

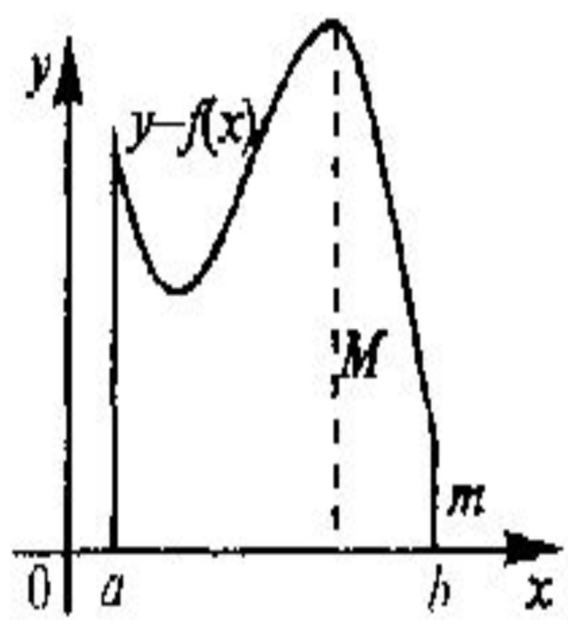
Непрерывность на отрезке

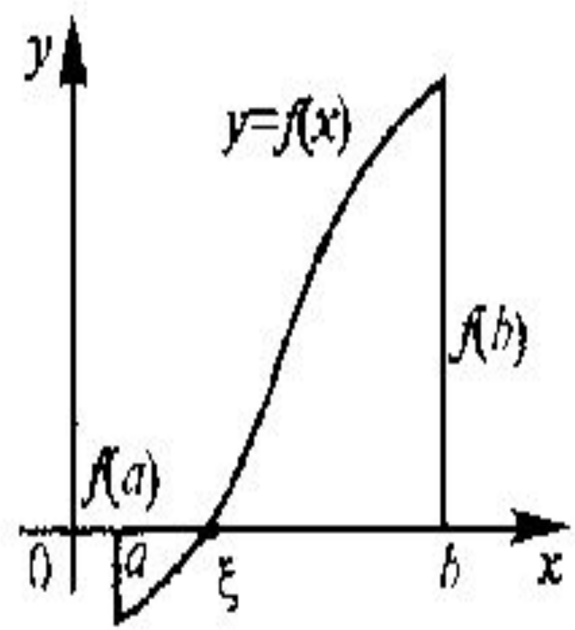
Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке [a,b], то она ограничена на этом отрезке

Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке [a,b], то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения (теорема Вейерштрасса)

Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке [a,b] и значения на концах отрезка *f(a)* и *f(b)* имеют противоположные знаки, то найдется такая точка внутри отрезка *ξє (a,b),* что *f(ξ) =0* (теорема Больцано-Коши)







Точки разрыва

Если функция f определена на полуинтервале $(a-\delta,a]$ и $f(a-0)=f(a)$, то функция f непрерывна слева в точке a.

Если функция f определена на полуинтервале $[a,a+\delta)$ и $f(a+0)=f(a)$, то функция f непрерывна справа в точке a.

Точку a назовем точкой разрыва функции f, если эта функция либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной.

Точки разрыва 1 рода

Определение. Точка *а –точка разрыва первого рода:* существуют **конечные** f(a-0) и f(a+0).

<u>*Замечание.*</u> а – точка разрыва 1 рода функции f(x), то f(a+0)-f(a-0) - скачок функции f(x) в точке а.
Если f(a+0)=f(a-0), то точка а - точка устранимого разрыва.
Положим f(a)=f(a+0)=f(a-0)=A, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \neq a \\ A, x = a \end{cases}$$

Точка разрыва 2 рода

Пусть *x=a* –точка разрыва функции *f*, не являющаяся точкой разрыва 1 рода. Тогда ее называют точкой разрыва второго рода. В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен

Исследуем функцию $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ **на непрерывность.**

Решение:

В точке x=0 данная функция не определена.

Для этого находим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -0} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to +0} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \left(\begin{array}{l} x \to= 0 \text{ следовательно, } \frac{1}{x} \to +\infty, 2^{+\infty} \to +\infty. \text{ в знаменателе стоит} \\ \text{бесконечно большая величина, значит обратная ей,} \\ \text{бесконечнго малая - это вся дробь, откула предел равен } 0 \end{array} \right) = 0$$

Так как в точке x=0 односторонние пределы конечны, то x=0− точка разрыва первого рода, а так как эти пределы не равны, то разрыв не устраним.