

Тема 1.3 Преобразование алгебраических выражений

Лекция 1. Преобразование алгебраических выражений

Пункт 1. Операция логарифмирования

Дано: $A = (100a^{\frac{2}{3}}b)^3$

Найти: $\lg A$

Решение:

$$\begin{aligned}\lg A &= \lg(100a^{\frac{2}{3}}b)^3 = 3 \lg(100a^{\frac{2}{3}}b) = 3(\lg 100 + \lg a^{\frac{2}{3}} + \lg b) = 3(2 + \frac{2}{3} \lg a + \lg b) = \\ &= 3 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} \lg a + 3 \cdot \lg b = 6 + 2 \lg a + 3 \lg b\end{aligned}$$

Пункт 2. Операция потенцирования (нахождение числа по его логарифму)

$$\log_2 A = -1 + 2\log_2 a - 3\log_2 b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 A = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 a^2 -$$

$$-\log_2 b^3 = \log_2 \frac{a^2}{2b^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} \cdot a^2 \right) : b^3 = \frac{a^2}{2b^3}.$$

Пункт 3. Нахождение области определения логарифмического выражения

Дано: $\log_a x$

Найти: $D(\log_a x)$

Решение: $x > 0$

Пример 1:

$$\lg x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x > 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

Пример 2:

$$\lg x + \lg(x - 4)$$

$$\begin{cases} x > 0; \\ x - 4 > 0 \end{cases}$$

Ответ: $(4; \infty)$

Пункт 4. Сравнение логарифмов

$$x > 0, a > 0, a \neq 1;$$

$$a > 1, 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2;$$

$$0 < a < 1, 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

Пункт 5. Показательные выражения

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

a^x - показательное выражение, a – постоянная (число)

$a^x > 0$ ВСЕГДА

Сравнение показательных выражений:

$$a > 0, a \neq 1;$$

$$a > 1, x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2};$$

$$0 < a < 1, x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}.$$

Пункт 6. Решение показательных и логарифмических уравнений

1. *Решение простейшего показательного уравнения:*

$$(a > 0, a \neq 1), a^x = a^k \Leftrightarrow x = k$$

— сравниваем степени с одинаковым основанием.

$$(a > 0, a \neq 1, b > 0), a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Примеры:

- $10^x = 1000; 1000 = 10^3;$
 $10^x = 10^3 \Leftrightarrow x = 3.$
- $10^x = 2 \Leftrightarrow x = \lg 2.$

2. Решение простейшего логарифмического уравнения:

$$(a > 0, a \neq 1), \log_a x = \log_a k \Leftrightarrow x = k;$$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

Пример:

- $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8.$