

**Тригонометрическая
окружность.
Тригонометрические
функции**

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ:

- *Понятие угла. Градусная и радианные меры измерения угловых величин. Изображение вещественных чисел на единичной окружности.*
- *Определение и свойства тригонометрических функций.*
- *Квадранты единичной окружности. Знаки тригонометрических функций.*

Тригонометрия —
математическая дисциплина,
изучающая зависимость
между сторонами и углами
треугольника.

В древности тригонометрия возникла в связи с потребностями астрономии, землемерия и строительного дела, то есть носила чисто геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд».

В первой половине 18-го века произошел резкий перелом, после чего тригонометрия приняла новое направление и сместилась в сторону математического анализа. Именно в это время тригонометрические зависимости стали рассматриваться как функции.

Определение 1. **Угол** — это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки, вершины угла.

Угол разбивает плоскость на две части.

*Каждая из них называется **ПЛОСКИМ** углом.*

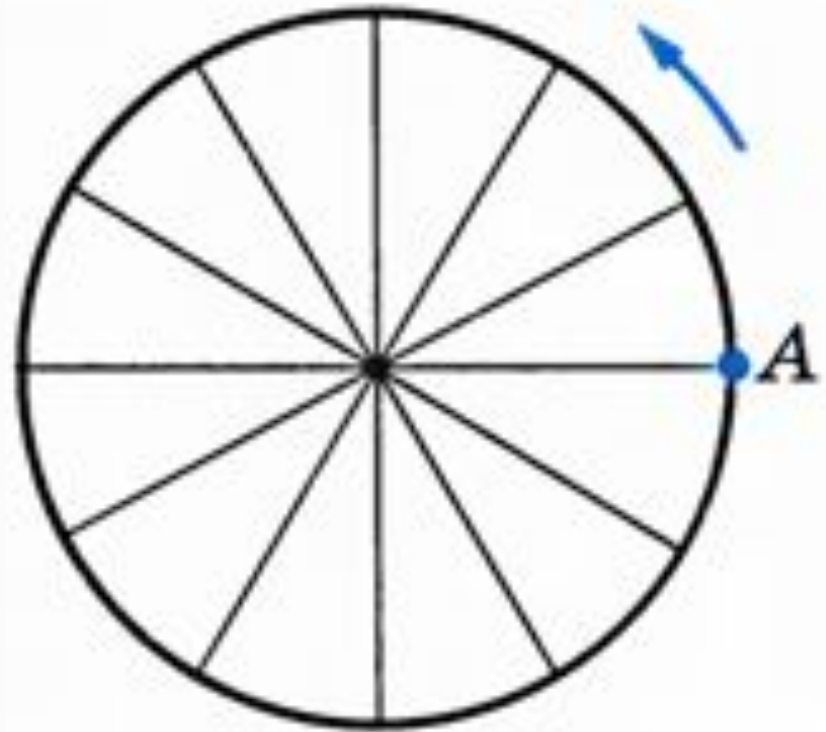
*Плоские углы с общими сторонами называются **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ**.*

В качестве единицы измерения углов принят

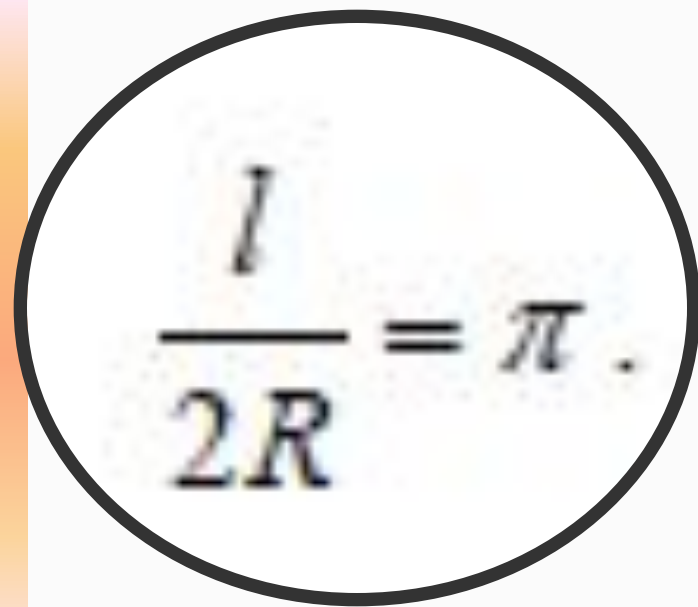
градус — $\frac{1}{180}$ *развернутого угла* (прямой).

Определение 2.

Угол в 1° – это угол, который опишет луч, совершив $1/360$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки.



Теорема 1. *Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т.е. одно и то же для любых окружностей.*


$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

Число π — иррациональное.

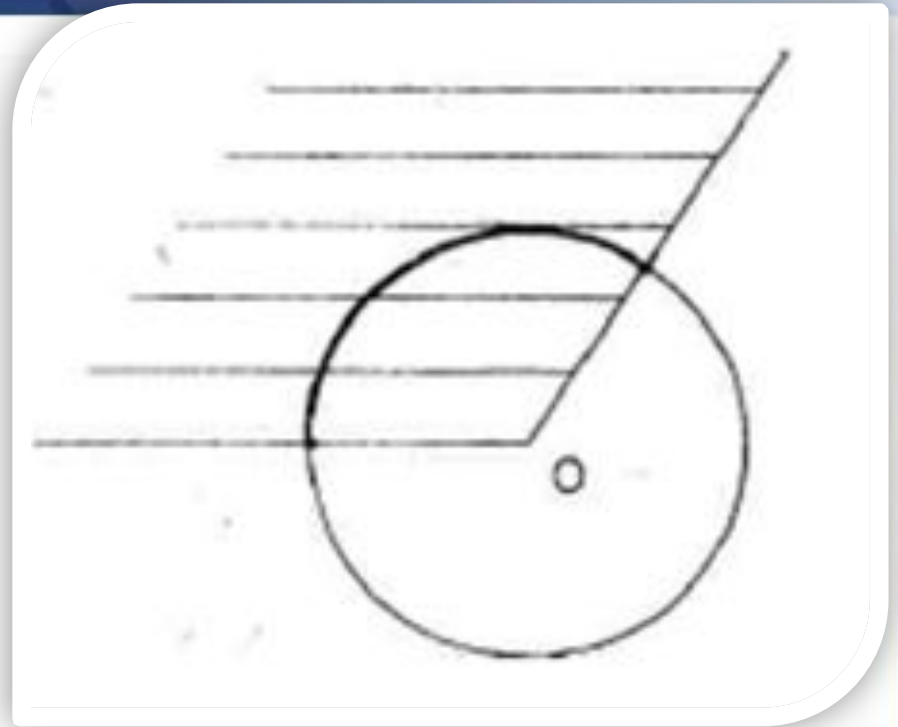
Приближенное значение $\pi \approx 3,1416$.

Длина окружности вычисляется по формуле

$$l = 2\pi R.$$

Определение 3.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.

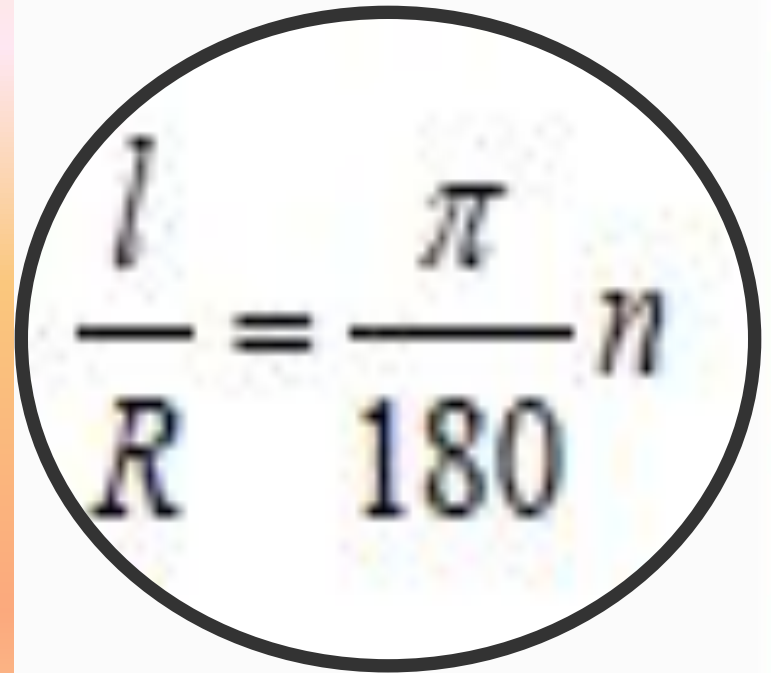


Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется дугой окружности, соответствующей этому центральному углу

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Развернутому углу (прямой) соответствует длина полуокружности πR .

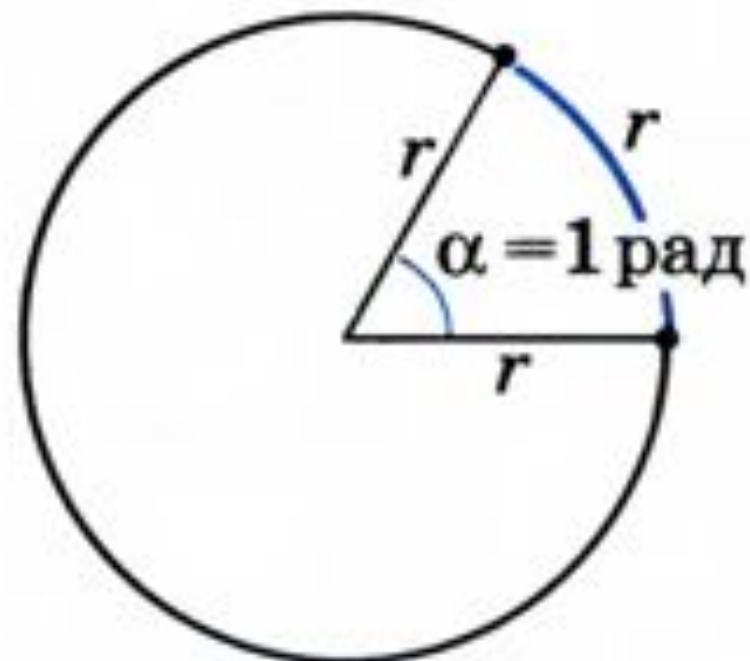
Определение 4.

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.


$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} n$$

Определение 5.

*Углом в 1 радиан
называется
центральный
угол,
опирающийся на
дугу, равную по
длине радиусу
окружности*



$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)^\circ$$

$$1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ$$

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)^\circ \alpha$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi \alpha}{180} \text{ рад}$$

Задача

Найти радианную меру угла, равного:
1) 45° ; 2) 15° .

► По формуле (2) находим:

$$1) 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{ рад} = \frac{\pi}{4} \text{ рад};$$

$$2) 15^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}. \triangleleft$$

Задача

Найти градусную меру угла, равного:

1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

► По формуле (1) находим:

$$1) \pi \text{ рад} = 180^\circ; \quad 2) \frac{\pi}{2} \text{ рад} = 90^\circ;$$

$$3) \frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} \right)^\circ = 135^\circ. \triangleleft$$

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника



Синусом острого угла прямоугольного
треугольника называется отношение
противолежащего катета к гипотенузе

$$\sin A = BC:AB$$

Косинусом острого угла

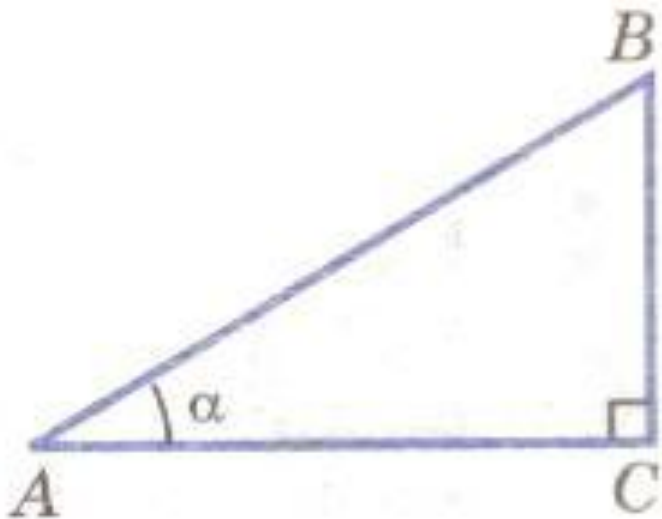
прямоугольного треугольника
называется отношение
прилежащего катета к гипотенузе

$$\cos A = AC :AB$$

Тангенсом острого угла

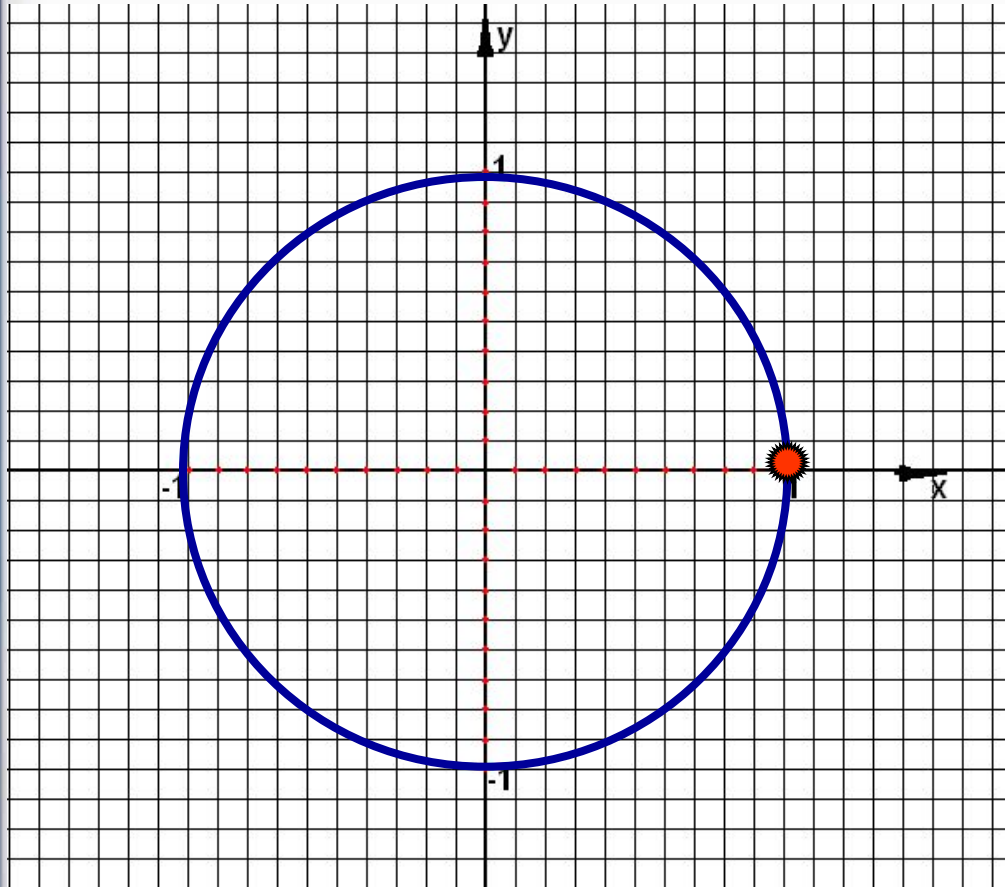
прямоугольного треугольника
называется отношение противолежащего
катета к прилежащему катету

$$\operatorname{Tg} A = BC:AC$$



Определение единичной окружности

Автоматический показ

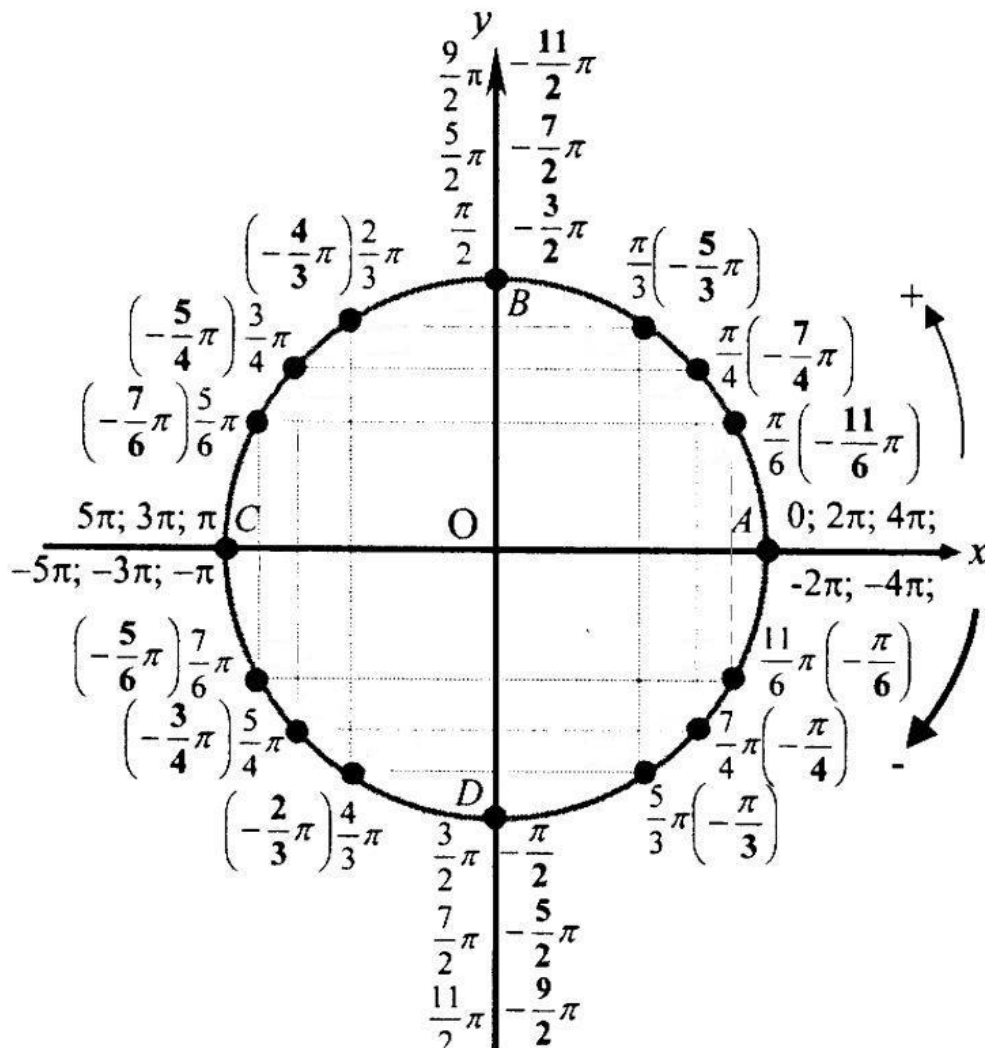


Окружность радиуса 1 с центром в начале координат называют **единичной окружностью**.

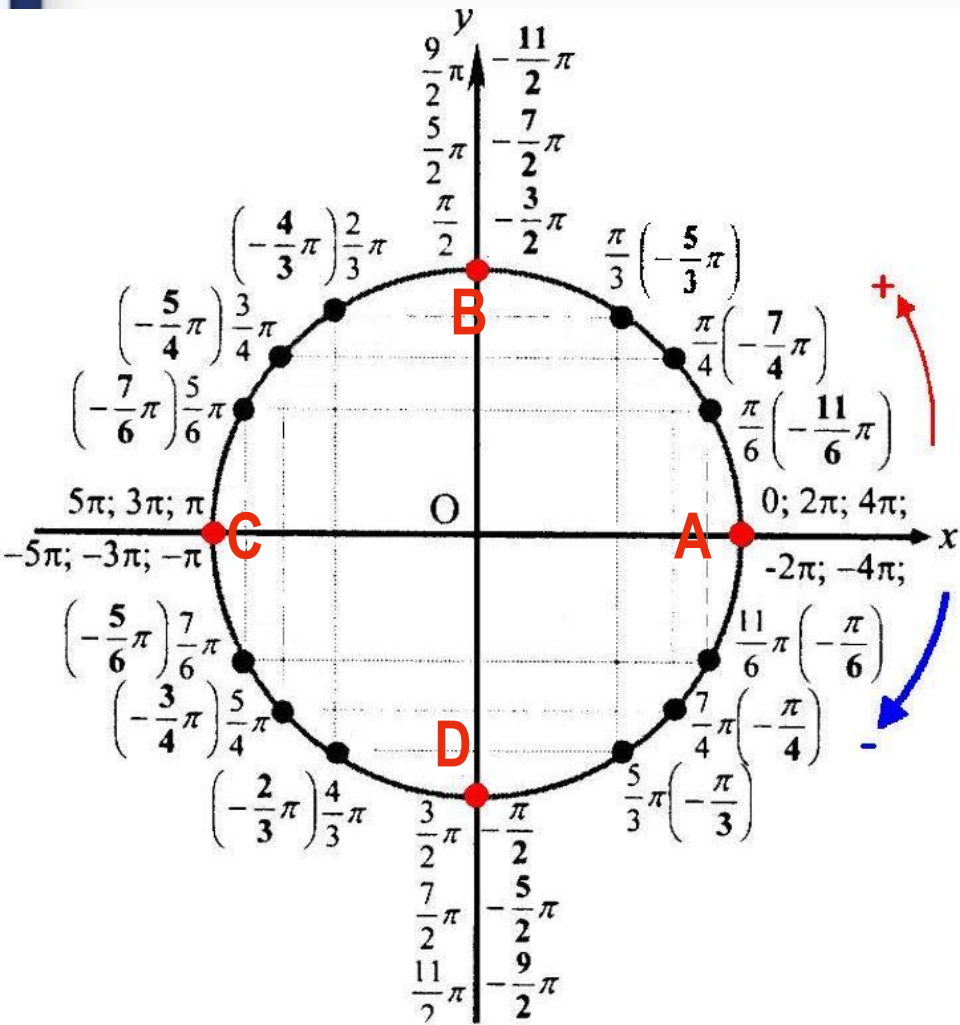
Зададим соответствие между множеством действительных чисел и точками единичной окружности следующим образом:

Так как длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, то можно получить изображение таких чисел на окружности как:

$\pi, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{3\pi}{2}, 3\pi, 4\pi$ и т.д., учитывая, что $R = 1$ и $C = 2\pi$.



Обратите внимание, что построенное отображение не является однозначным:



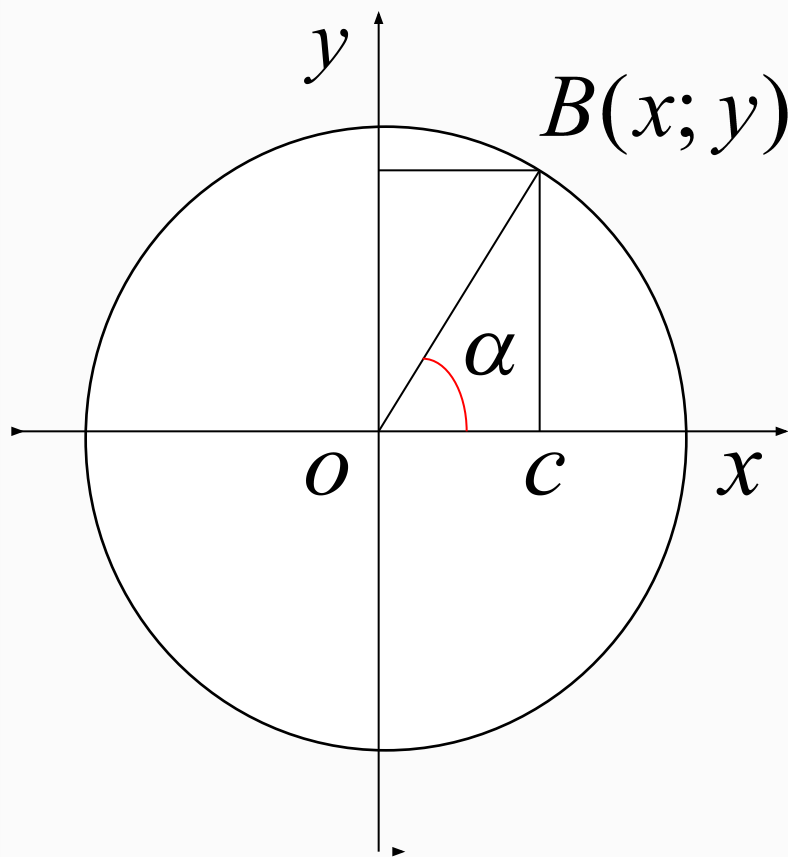
1. Каждому действительному числу соответствует **единственная точка** окружности.

2. Каждая точка окружности изображает **бесконечное множество действительных чисел**.

3. Точки **A, B, C, D** назовем **узловыми**.

Фактически, мы получили принципиально **новую систему координат – криволинейную**. Но точка единичной окружности имеет одну **координату**. (Почти все также, как и в прямоугольной системе координат.)

Определение тригонометрических функций



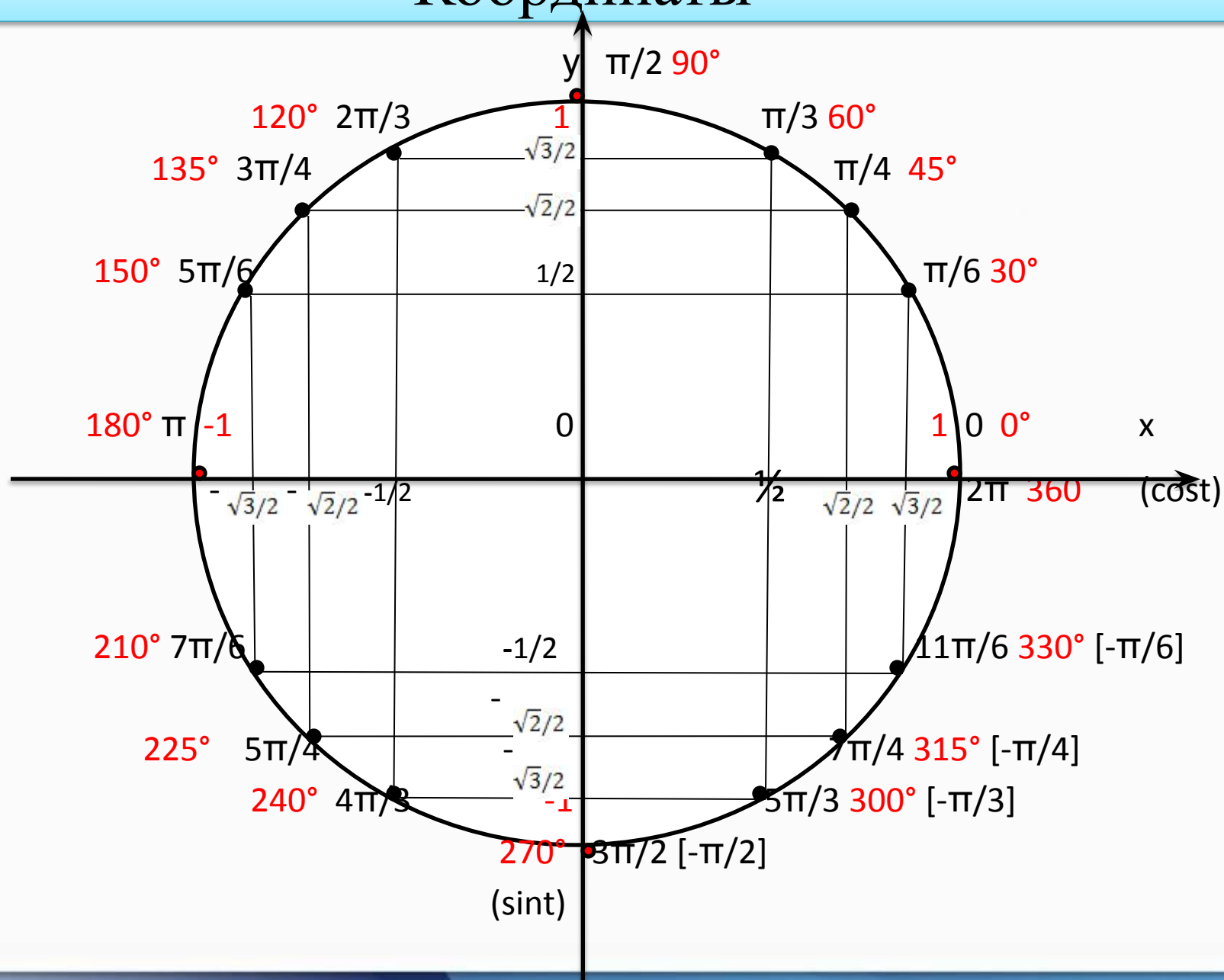
$$\sin \alpha = \frac{y}{R}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

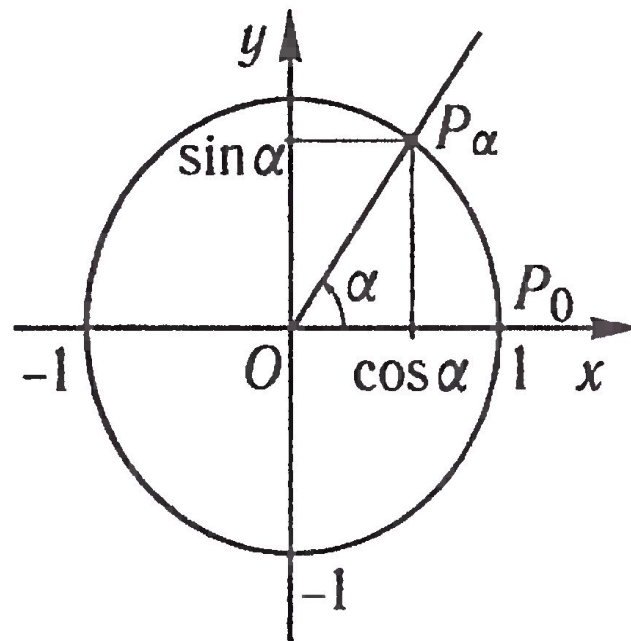
Координаты



Определение синуса и косинуса

Синусом угла x называется ордината точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x (обозначается $\sin x$).

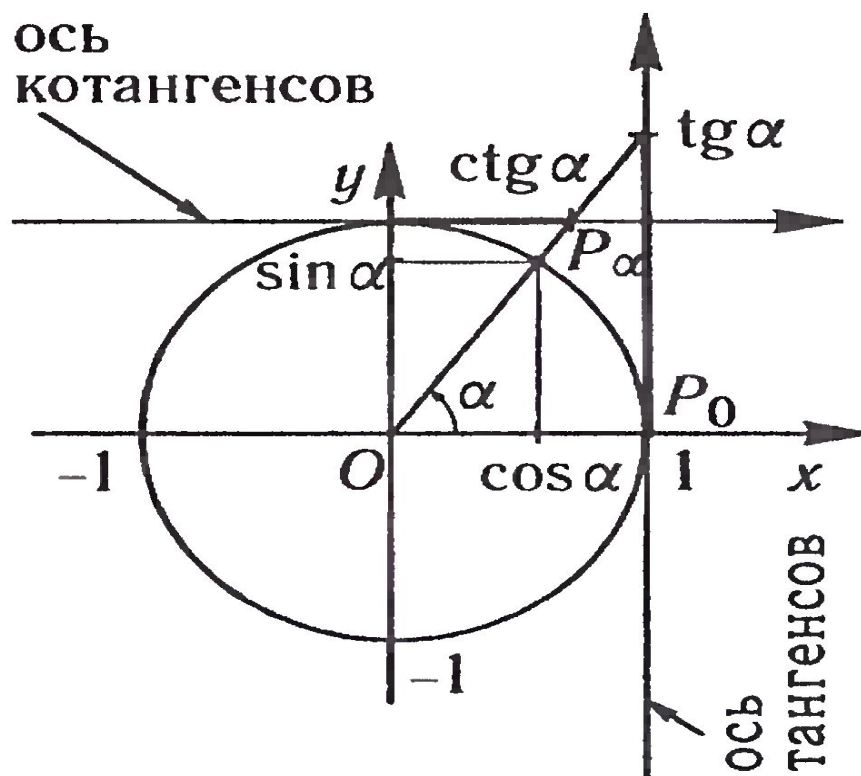
Косинусом угла x называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x (обозначается $\cos x$).



Определение тангенса

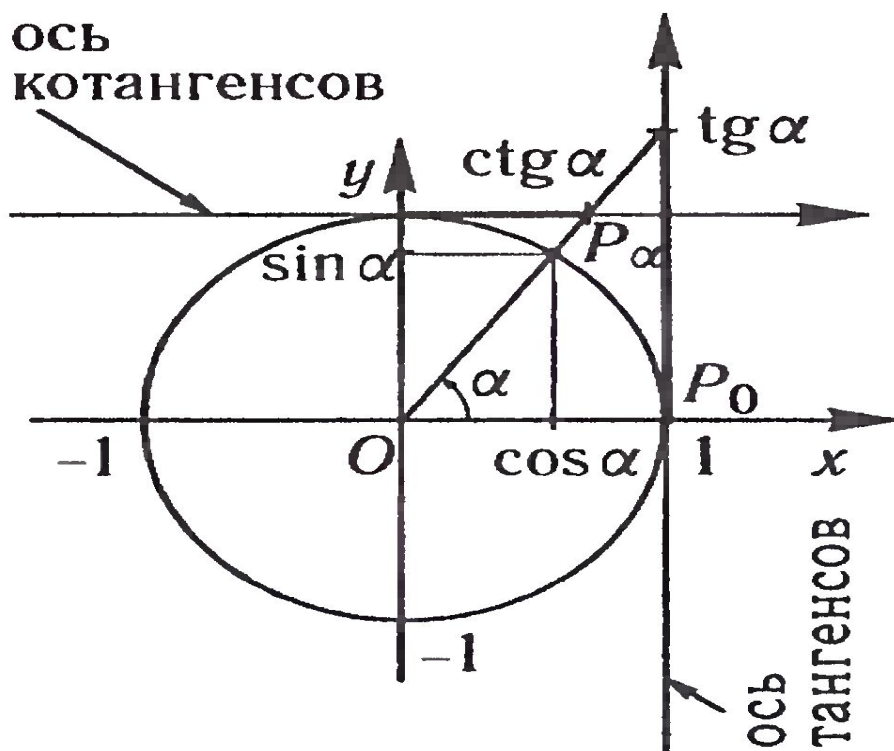
Тангенсом угла x называется отношение синуса угла x к косинусу угла x .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$



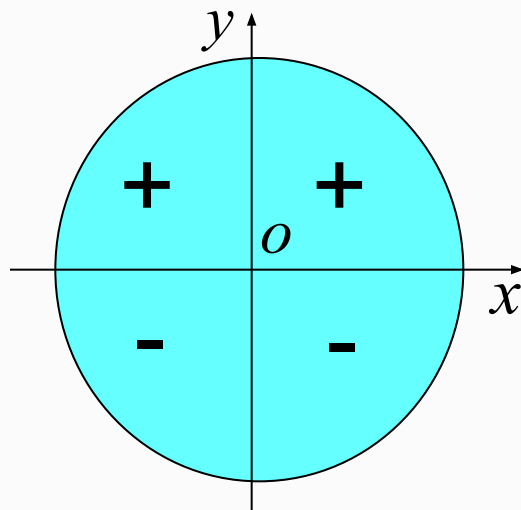
Определение котангенса

Котангенсом угла x называется отношение косинуса угла x к синусу угла x .

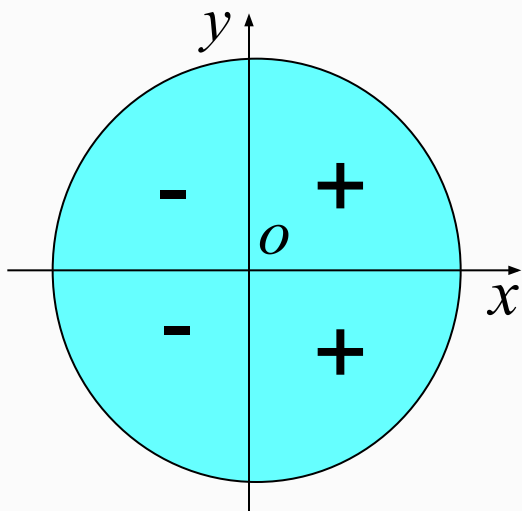


$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

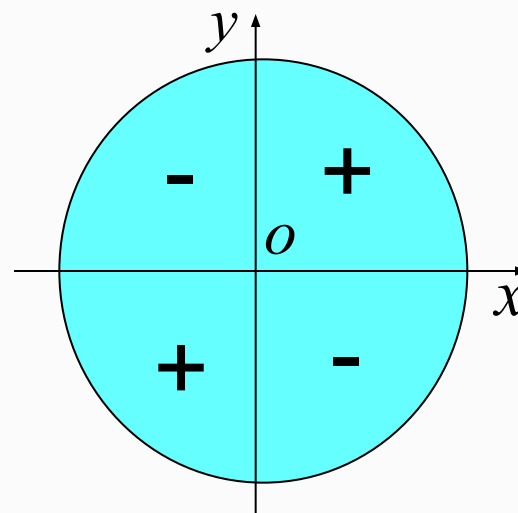
ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ



СИНУС



КОСИНУС



ТАНГЕНС И
КОТАНГЕНС

Основные тригонометрические тождества

$$1. \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \longrightarrow , 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

$$2. \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$1 - \cos^2 t = \sin^2 t$$

$$3. \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$7. \sin(-t) = -\sin t$$

$$4. \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$$

$$8. \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$$

$$5. \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$9. \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$$

$$6. \operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$10. \cos(-t) = \cos t$$

Домашнее задание

1. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

- 1) 315° ; 2) -240° ; 3) 210° ; 4) 135° ; 5) 120° ; 6) 75° ;
7) -72° ; 8) 18° ; 9) 15° ; 10) -6° ; 11) 1° .

2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

- 1) $-\frac{7\pi}{4}$; 2) $\frac{4\pi}{3}$; 3) $-\frac{20\pi}{3}$; 4) $\frac{13\pi}{15}$; 5) $-\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{4\pi}{5}$;
7) $\frac{4\pi}{15}$; 8) $\frac{5\pi}{36}$; 9) $\frac{\pi}{20}$; 10) $\frac{\pi}{15}$; 11) $-\frac{13\pi}{180}$.

