- Операция
- Решение
- Оперирующая сторона
- Активные средства операции
- Стратегия оперирующей стороны
- Действующие факторы операции
  - ✔ Определенные
  - ✔ Неопределенные
- Критерий операции
- Математическая модель операции

Типы моделей

- **<u>Материальные</u>**
  - *Физические*
  - *Статические*
  - *Динамические*
  - ✔ Имитирующие
  - ✔ Аналоговые

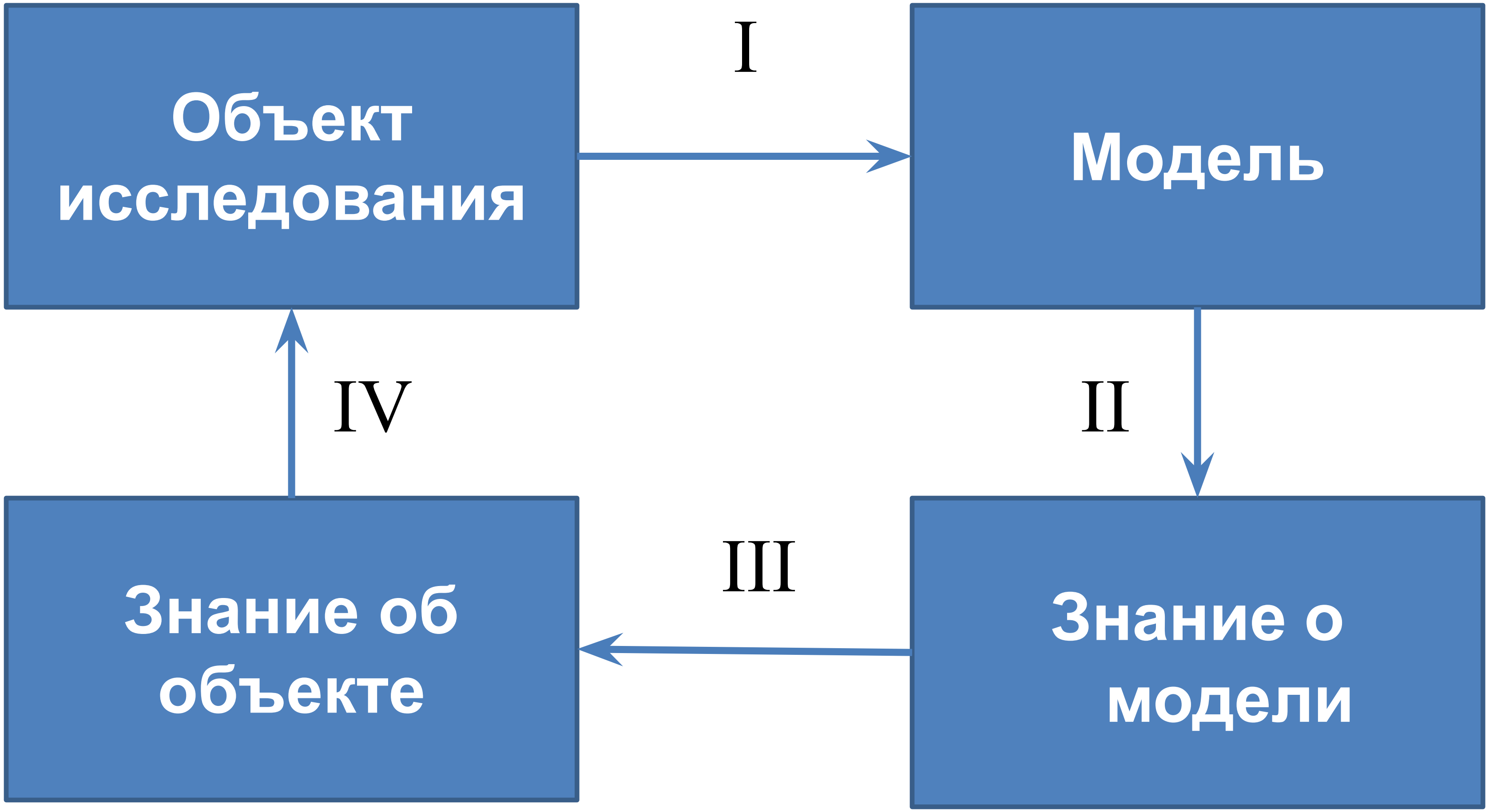
- **<u>Идеальные</u>**
  - *Образные*

Требования к мат. моделям

- Универсальность
- Точность
- Адекватность
- Экономичность

Универсальность математической модели характеризуют полноту отражения в ней свойств реального объекта. Математическая модель отражает не все, а лишь некоторые свойства реального объекта. Например в транспортной задаче линейного программирования отражаются затраты на перевозку единицы груза и расстояние, но не маршрут.

Схема процесса моделирования



Простейшая модель оптимального планирования

Фирма работает на современном рынке, выпускает **3 вида продукции**, используя **4 вида ресурсов**. Затраты прочих ресурсов скалькулированы. Фирма работает на коротком периоде , следовательно, капитал фиксированный. Необходимо найти оптимальный план работы фирмы.

Продукция	Цена [т.руб./шт.]	Денежные средства [т.руб.]	Рабочая сила [чел-час./шт.]	Затраты времени оборудования, [час/шт.]	
				Группа оборудова ния - 1	Группа оборудова ния - 2
1	80	50	10	5	9
2	40	10	4	2	4
3	60	30	6	1	4
Объемы ресурсов в месяц		1800 [т. руб./мес.]	920 [чел-час/мес.]	140 [час/мес.]	320 [час/мес.]

- <u>Формализация переменных</u>

  X_1, X_2, X_3 - количество единиц продукции [шт./мес.]

- <u>Формализация ограничений</u>

ГО-1 $5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 140$

ГО-2 $9x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 320$

РС $10x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 920$

ДС $50x_1 + 10x_2 + 30x_3 \le 1800$

$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \quad \ge 0$

- <u>Формализация целевой функции</u>

В $80x_1 + 40x_2 + 60x_3 \longrightarrow \max$

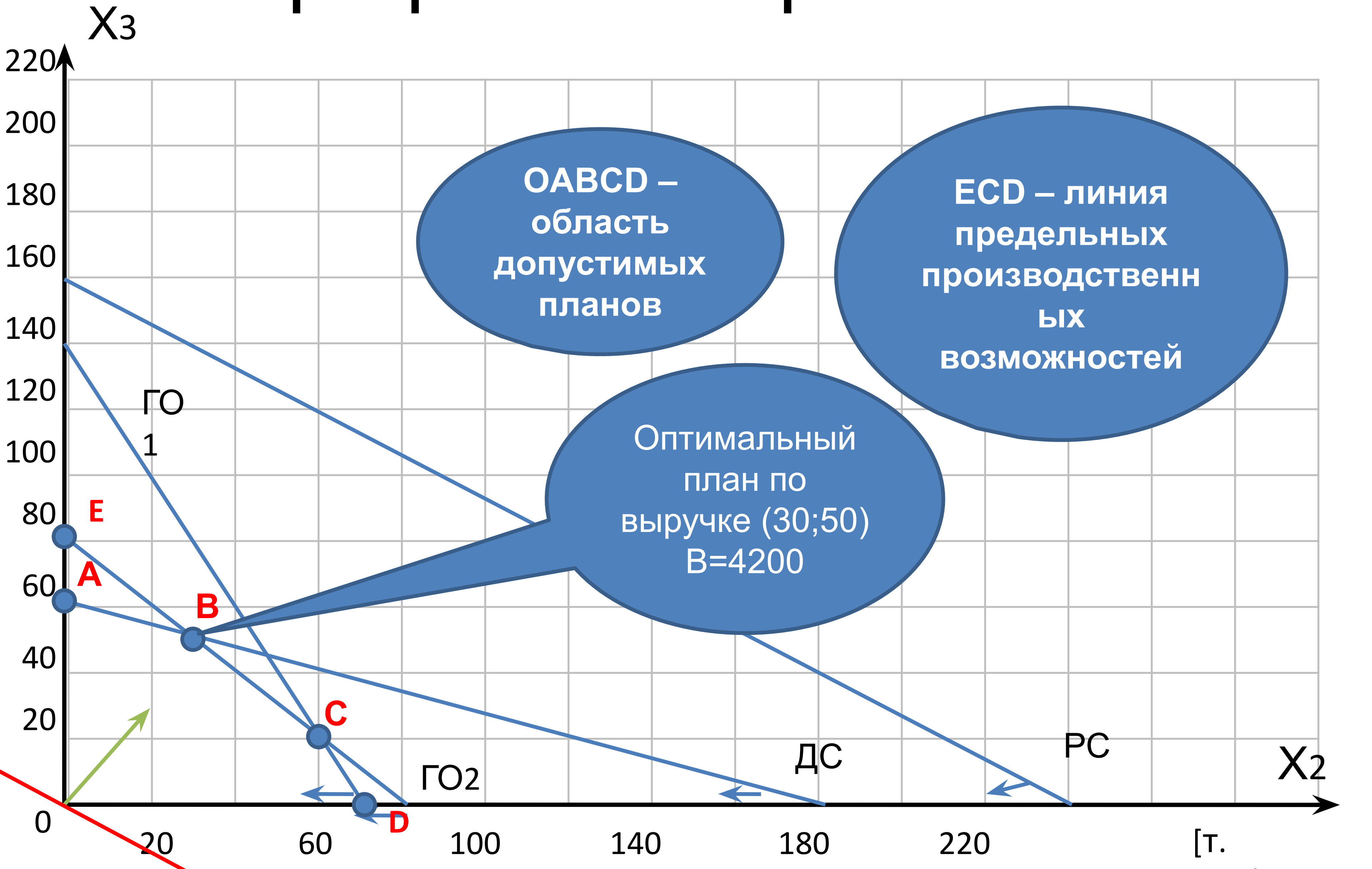
Анализ эффективности использования ресурсов видами продукции

	1 вид продукции	**2 вид продукции**	**3 вид продукции**
ДС	80/50=1,6	40/10=4	60/30=2
РС	80/5=16	40/2=20	60/1=60
ГО-1	80/9=8,2	40/4=10	60/4=15
ГО-2	80/16=5	40/4=10	60/6=10

1 вид продукции не эффективен => не войдет в оптимальный план => X_1 может быть исключен и модель примет вид

$$
\begin{aligned}
10x_2 + 30x_3 &\le 1800 \\
4x_2 + 6x_3 &\le 920 \\
2x_2 + x_3 &\le 140 \\
4x_2 + 4x_3 &\le 320 \\
40x_2 + 60x_3 &\to \max
\end{aligned}
$$

Графическое решение



Исследование эффективности вовлеченного дефицитного ресурса

ГО-1 $2x_2 + 1x_3 \le 140$

ГО-2 $4x_2 + 4x_3 \le 320$

РС $4x_2 + 6x_3 \le 920$

ДС $10x_2 + 30x_3 \le y$

необходимых финансовых ресурсов
$F(y) = \max f(x)/_{y=0\ldots Y}$

$x_2, x_3 \ge 0$ [т.шт./мес.]

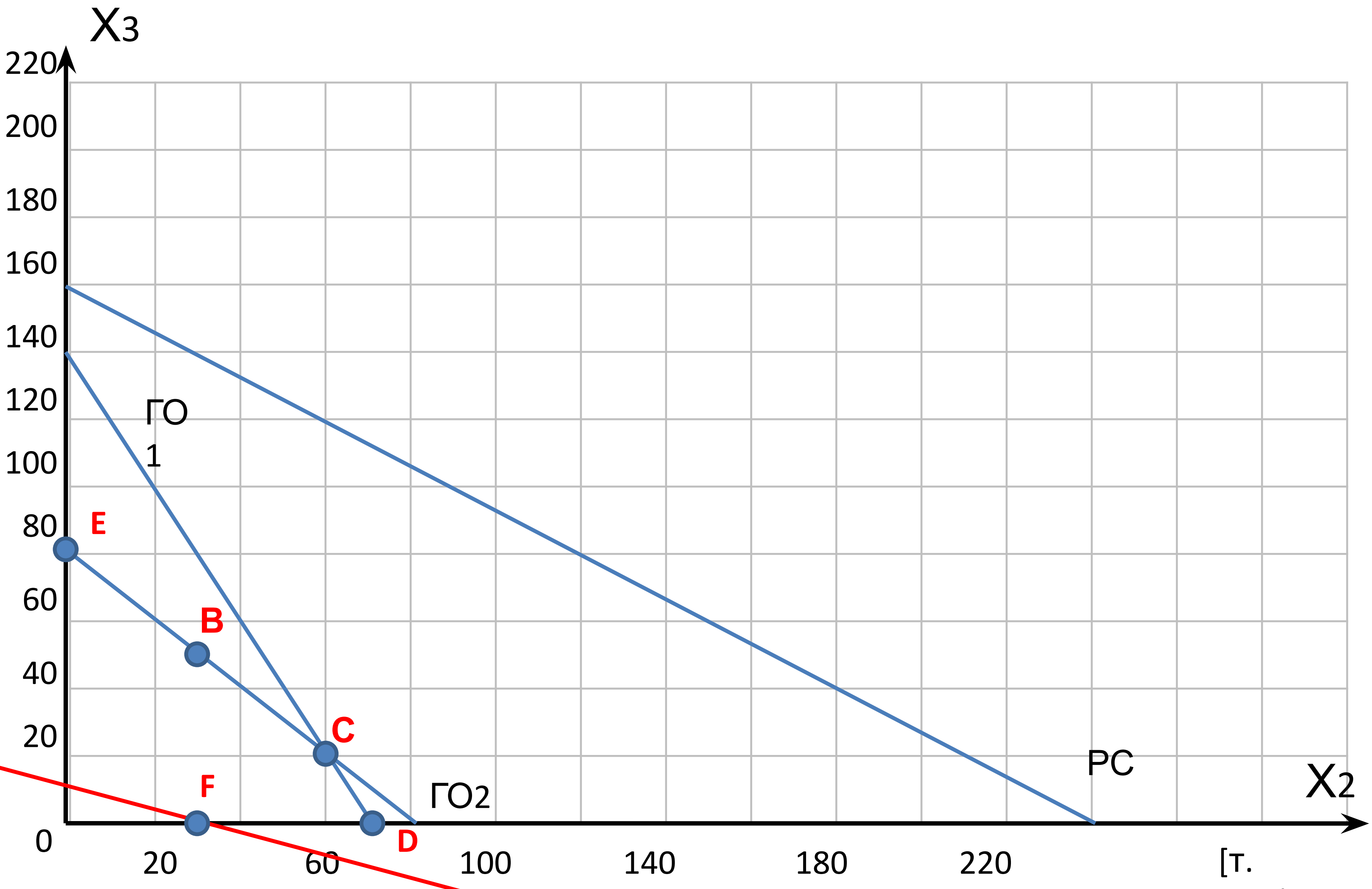
В $40x_2 + 60x_3 \to \max$

$F(y) = \max (40x_2 + 60x_3)/_{y=0\ldots Y}$

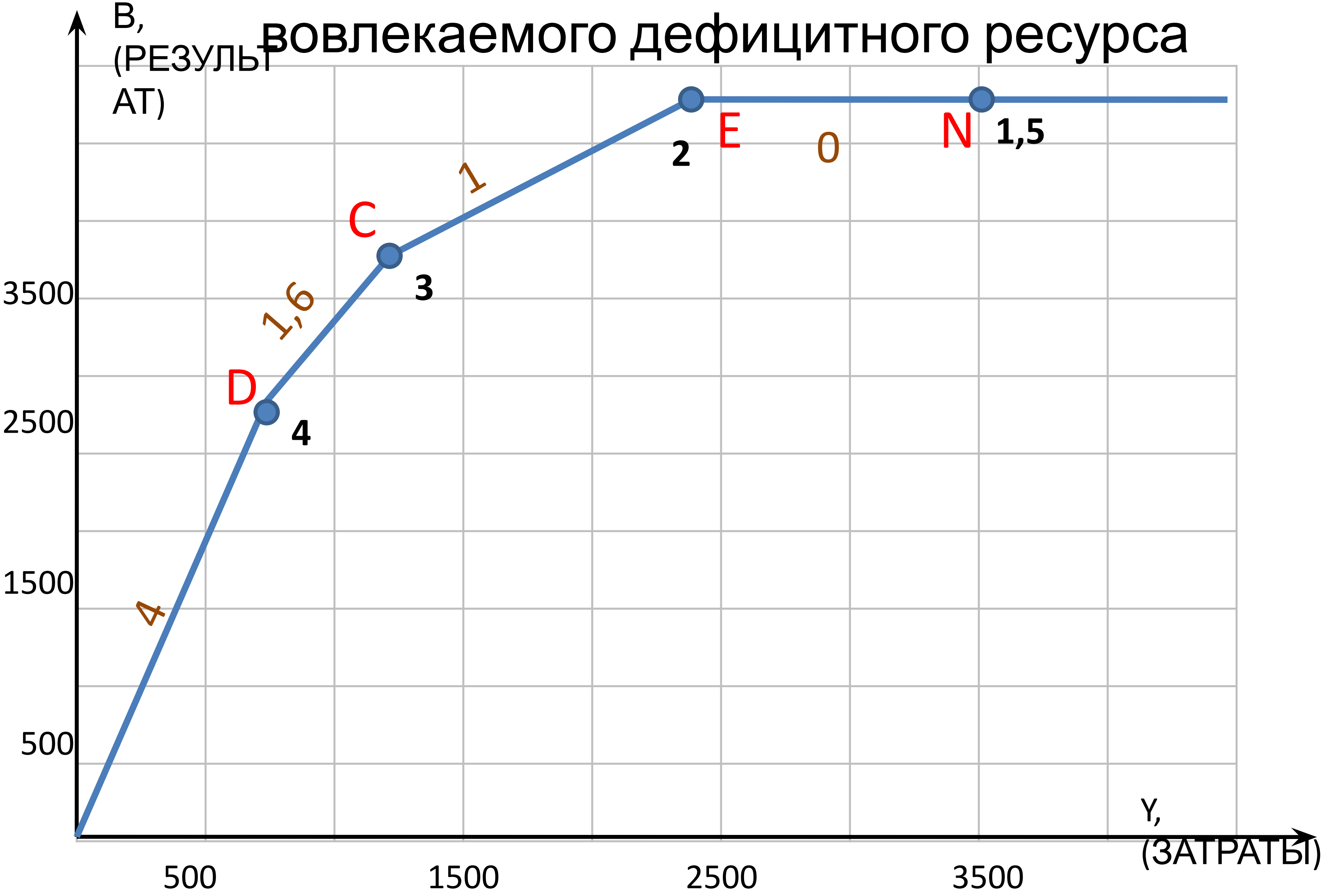
$F(y) = \max(40x_2 + 60x_3)_{/y=0\ldots Y}$ набор оптимальных планов

	Y	X_2	X_3	B	Абс.	Относит.
	0	0	0	0		
F	300	30	0	1200	4	4
D	700	70	0	2800	4	4
C	1200	60	20	3600	3	1,6
B	2400	30	60	4800	2	1
E	3600	0	80	4800	1,5	0

Движение оптимума



Зависимость выручки и прибыль от объема вовлекаемого дефицитного ресурса



Взаимные задачи

- Исходная – максимизация некоторого результата при ограничении по дефицитному ресурсу и множестве прочих ограничений.
- Взаимная – минимизация затрат дефицитного ресурса на заданный результат. При определенных условиях эти задачи имеют один и тот же оптимальный план.

ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА	**ВЗАИМНАЯ ЗАДАЧА**
Результат $f(X) \to max$	ДР $h(X) \to min$
ДР $h(X) \leq a$	Результат $f(X) \geq C$
$AX \leq B$	$AX \leq B$

Необходимое и достаточное условие совпадения планов: Планы совпадают, если в качестве целевого значения результата во взаимной задаче задать его оптимальные значения из исходной задачи.

«Замечательное правило» – Второе условие
Если планы совпадают, то min затрат ДР во взаимной задаче в точности соответствует его наличию в исходной системе.

Задача

Максимизация прибыли при ограничении по Дефицитному ресурсу и прочих ограничениях

В $40x_2 + 60x_3 \rightarrow max$

ГО-1 $2x_2 + x_3 \leq 140$

ГО-2 $4x_2 + 4x_3 \leq 320$

РС $4x_2 + 6x_3 \leq 920$

ДС $10x_2 + 30x_3 \leq 1800$

$x_2, \quad x_3 \geq 0$

ДС $10x_2 + 30x_3 \rightarrow min$

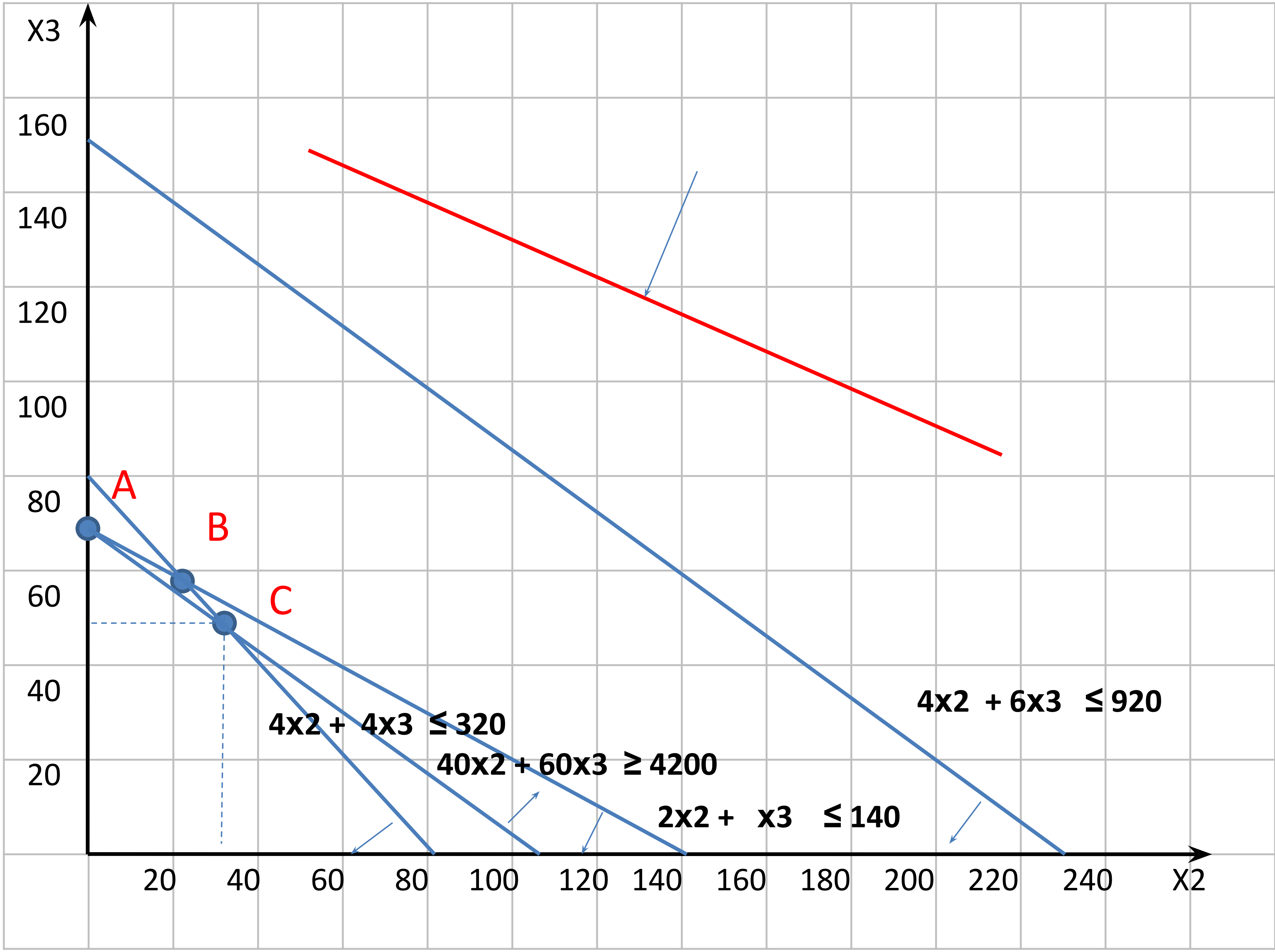
ГО-1 $2x_2 + x_3 \leq 140$

ГО-2 $4x_2 + 4x_3 \leq 320$

РС $4x_2 + 6x_3 \leq 920$

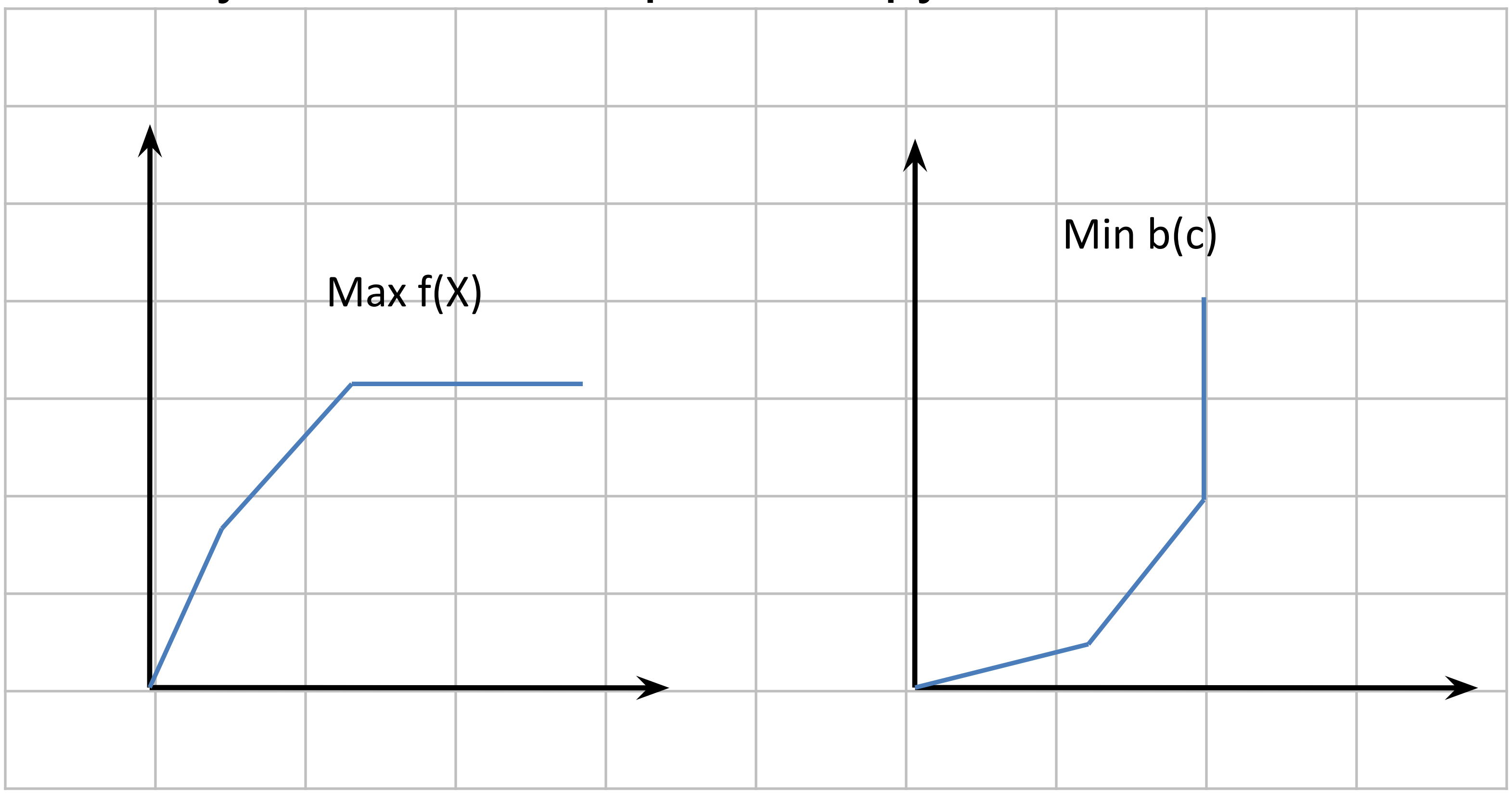
В $40x_2 + 60x_3 \geq 4200$

$x_2, \quad x_3 \geq 0$



X3
160
140
120
100
80
60
40
20
A
B
C
4x2 + 4x3 ≤ 320
40x2 + 60x3 ≥ 4200
2x2 + x3 ≤ 140
4x2 + 6x3 ≤ 920
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
X2

Если решить обе задачи как параметрические, то получим взаимообратные функции



Модель фирмы, максимизирующей прибыль на совершенном рынке

Рассмотрим фирму совершенного рынка, которая собирается организовать производство продукции, **цены** на которую на рынке **серьезно скачут**. Идентичную продукцию фирма может производить по **двум технологиям**. Необходимо **построить модель** фирмы, максимизирующей прибыль.

Технология	Затраты [тыс. руб/ед]	Затраты, вр		
		ГО-1	ГО-2	ГО-3
1	200	-	1	2
2	100	1	3	3
Располагаемы фонды рабочего времени		50	180	240

$FC = 6000$ тыс. руб/мес

Исходная задача

$П(x_1 + x_2) \to max$

$x_2 \leq 50$

$x_1 + 3x_2 \leq 180$

$2x_1 + 3x_2 \leq 240$

$x_1, x_2 \geq 0$

$TC = VC + FC \leq y, y = \overline{0,Y}$

$TC = 200x_1 + 100x_2 + 6000 \leq y, y = \overline{0,Y}$

Взаимная задача

$VC = 200x_1 + 100x_2 \to min$

$x_2 \leq 50$

$x_1 + 3x_2 \leq 180$

$2x_1 + 3x_2 \leq 240$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 \geq q, q = \overline{0,Q}$

Рис.1 Равновесие на рынке

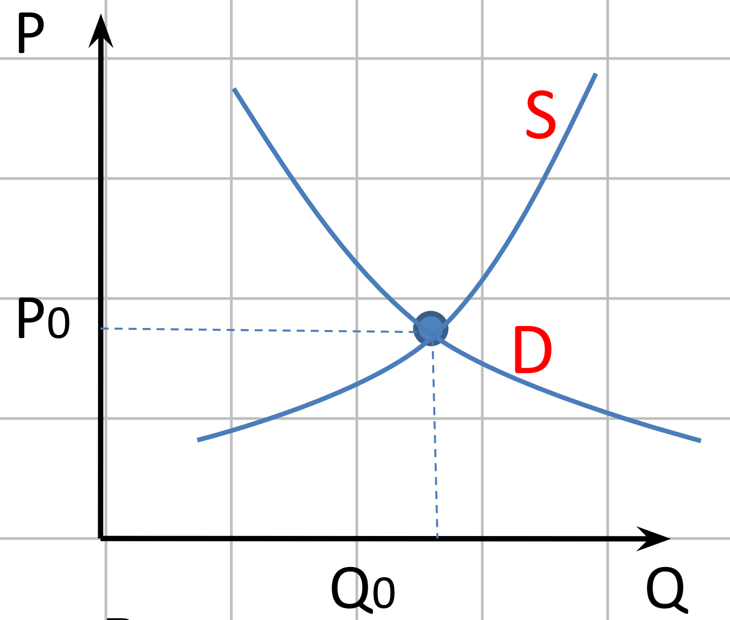


Рис.2

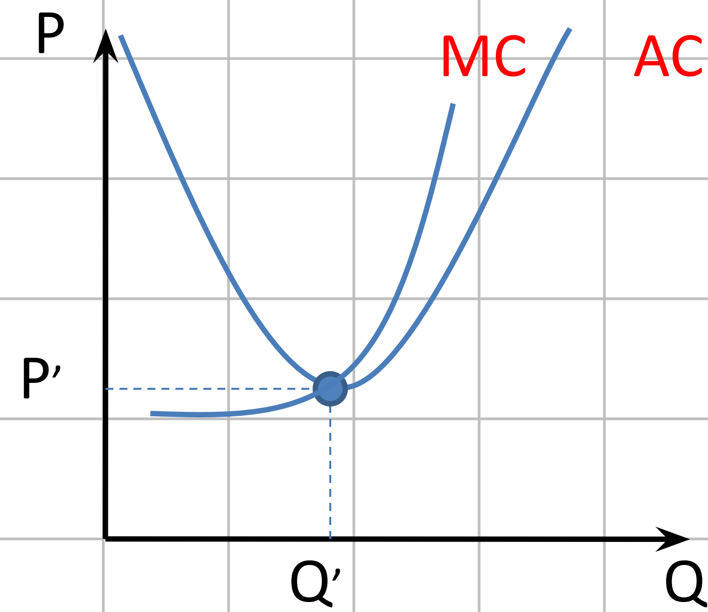
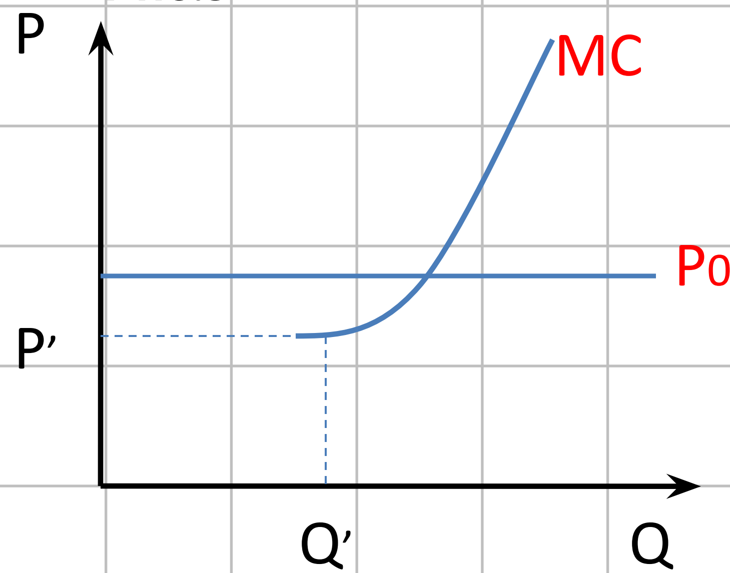
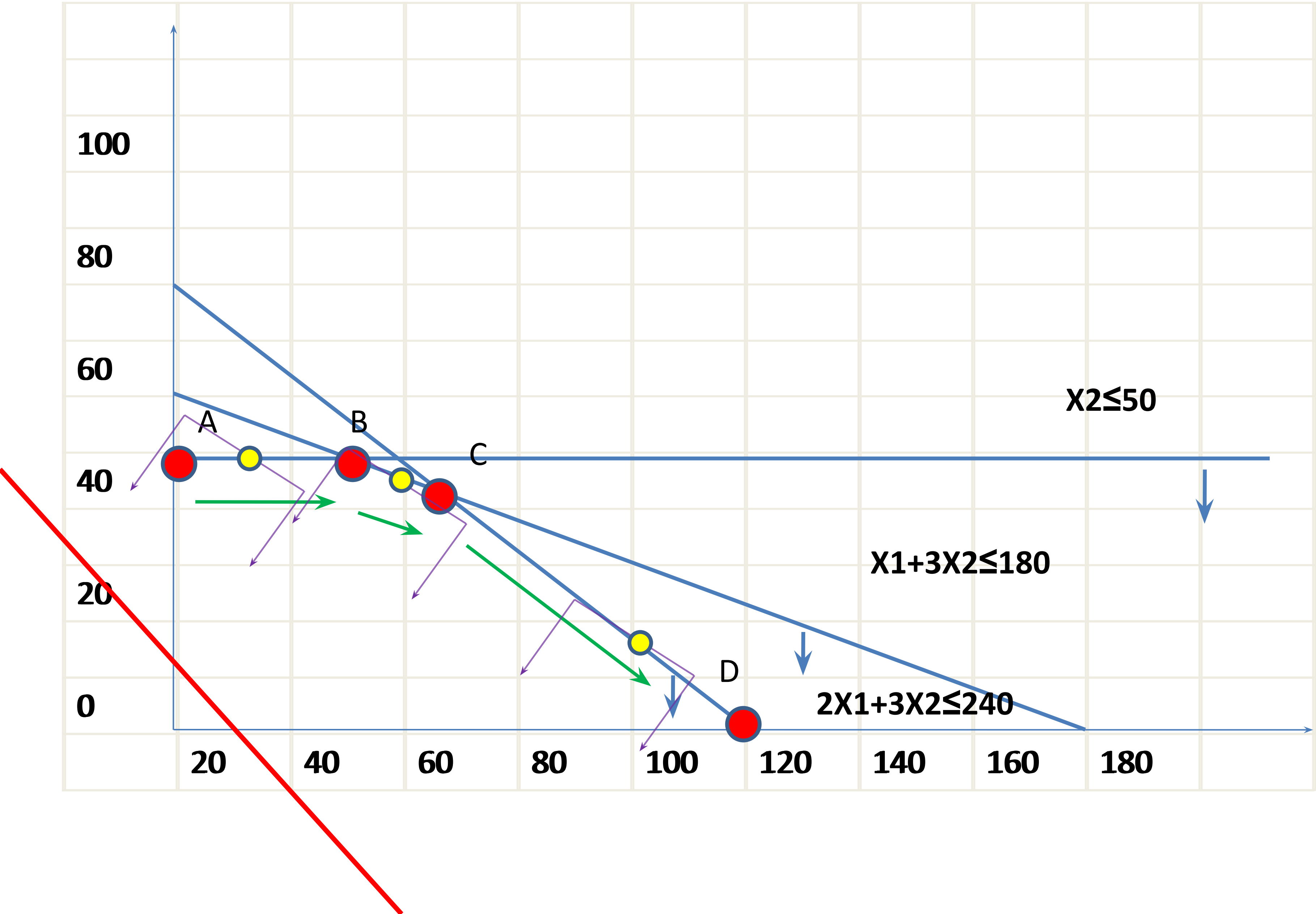


Рис.3



Функция предложения определяется затратами фирмы (MC)
Функция спроса фирмы – прямая цены



100
80
60
40
20
0
A
B
C
D
X2≤50
X1+3X2≤180
2X1+3X2≤240
20
40
60
80
100
120
140
160
180

	q	X1опт,X2опт	VCопт	TCопт		q	X1опт,X2опт	VCопт	TCопт
0	0	0,0	0	6000		60	10,50	7000	13000
	10	0,10	1000	7000		70	20,50	9000	15000
	20	0,20	2000	8000	**B**	80	30,50	11000	17000
	30	0,30	3000	9000		90	45,45	13500	19500
	40	0,40	4000	10000	**C**	100	60,40	16000	22000
A	50	0,50	5000	11000		110	90,20	20000	26000
					D	120	120,0	24000	30000

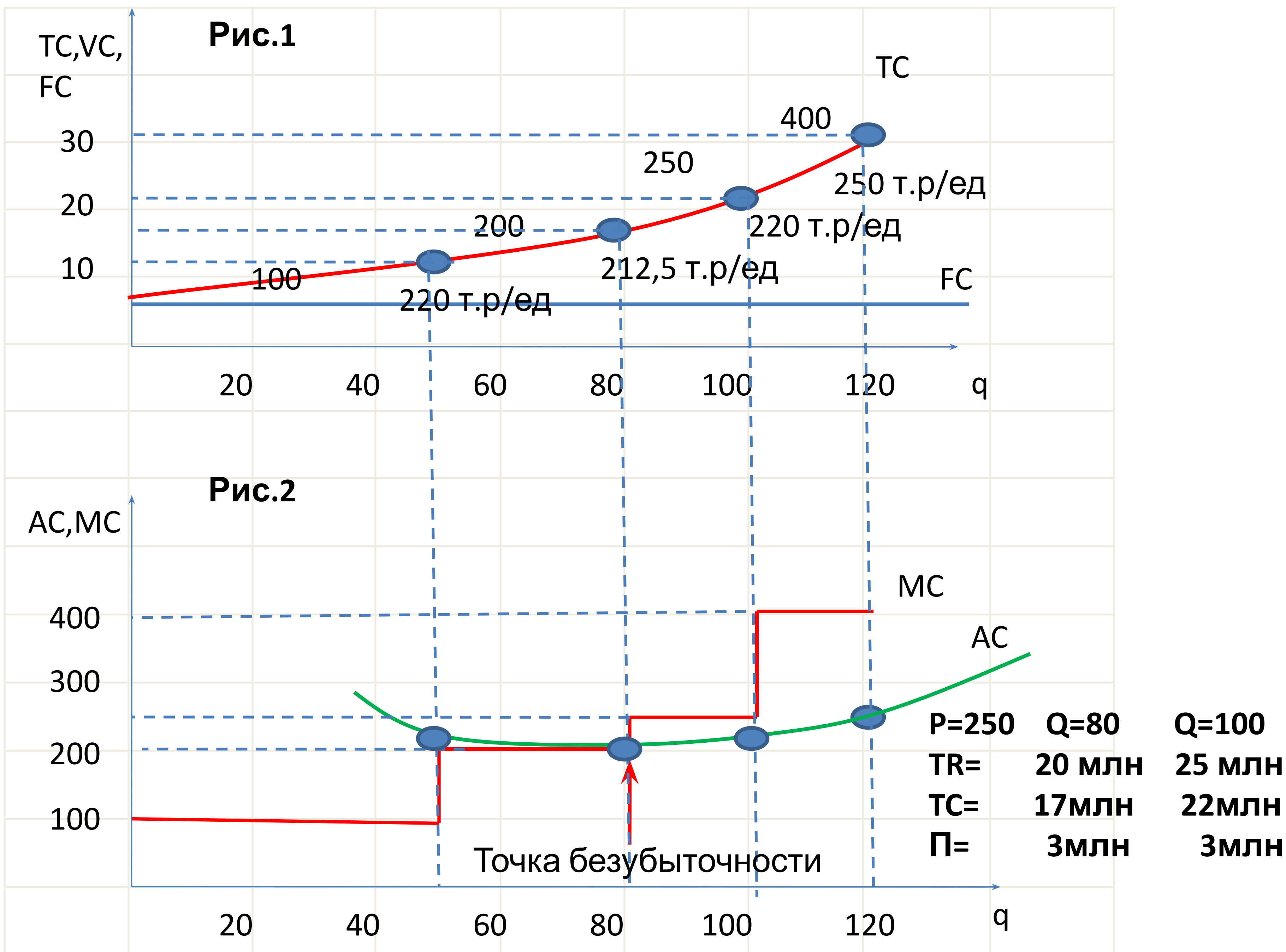
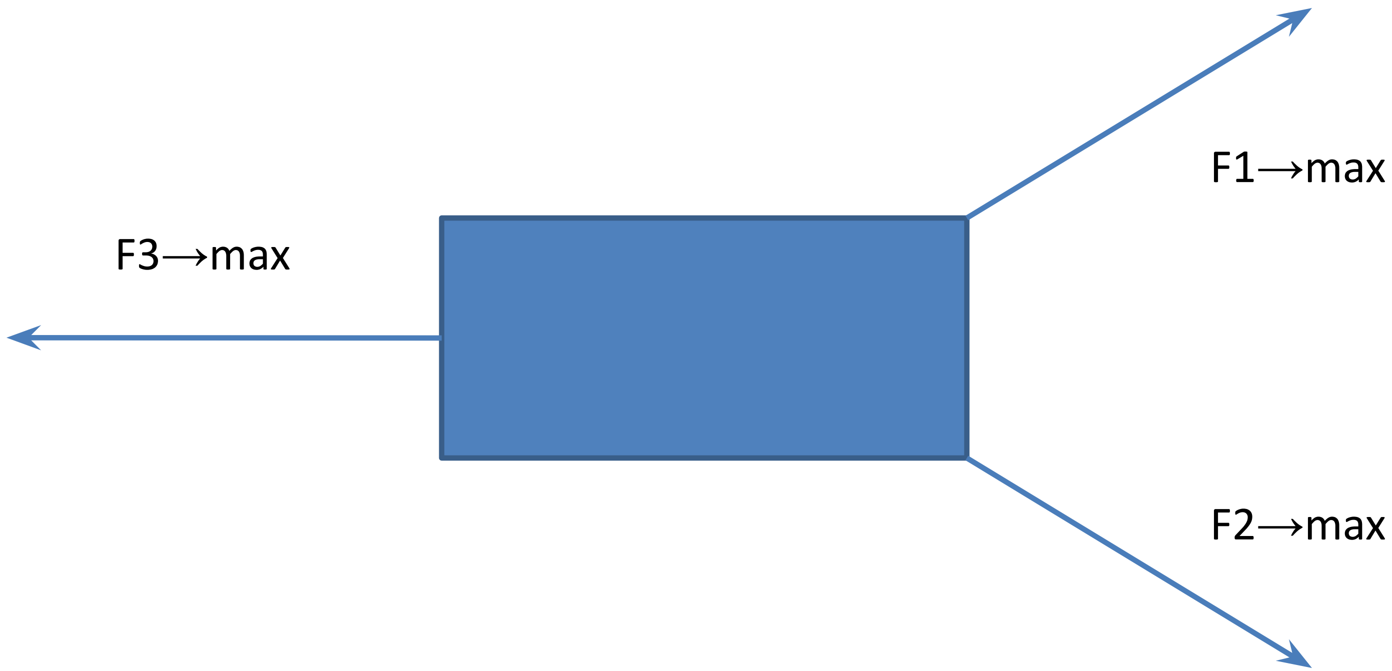


Рис.1
TC,VC,
FC
30
20
10
TC
400
250
200
100
250 т.р/ед
220 т.р/ед
212,5 т.р/ед
220 т.р/ед
FC
20
40
60
80
100
120
q
Рис.2
AC,MC
400
300
200
100
MC
AC
P=250 Q=80 Q=100
TR= 20 млн 25 млн
TC= 17млн 22млн
П= 3млн 3млн
Точка безубыточности
20
40
60
80
100
120
q

Оптимальные декомпозиции экономических систем

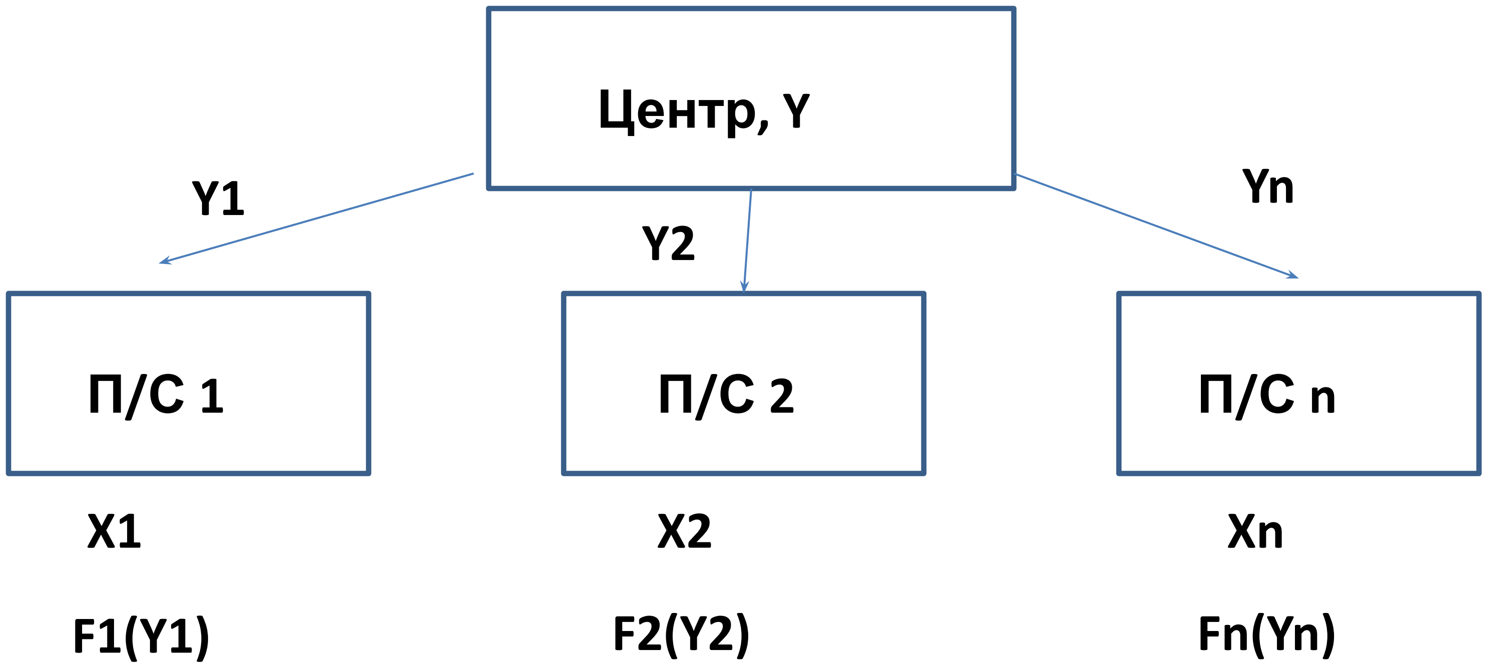


В ряде случае не удается (не имеет смысла) построить единую модель большой системы.

Тогда прибегают к <u>декомпозиции</u>:

1). Описывается оптимальное поведение каждой системы

2). Строится модель согласования с целью получения глобального оптимума

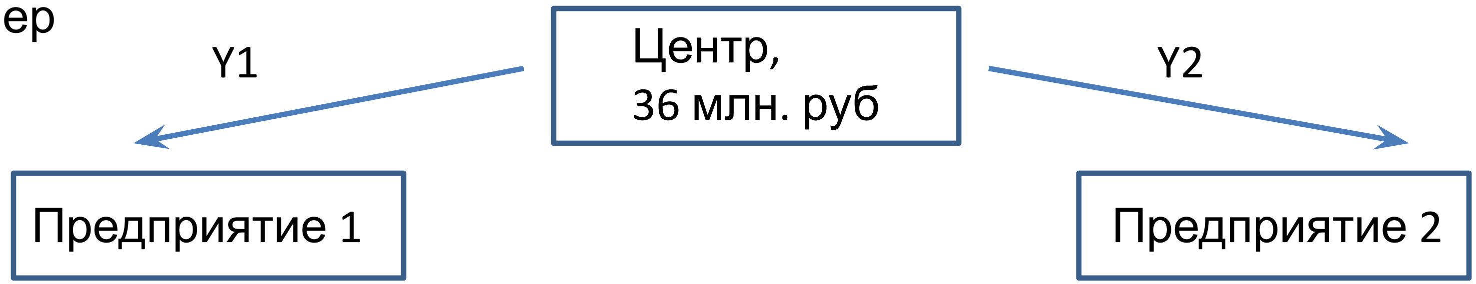


$$F1(Y1)+F2(Y2)+\ldots+Fn(Yn)$$

$$y1+y2+\ldots+y\ n \leqq Y$$

Центр осуществляет управление подсистемами путем распределения дефицитного ресурса

Пример



X1, X2 X3, X4

		Цена Тыс. руб/ед	Затраты тыс.руб/ед	Выпуск	Собств-й ресурс	Прибыль
I	**X1**	5	2	≤ 3	2	3
	X2	5	3	-	1	2
II	**X3**	4	2	-	1	2
	X4	4	1	≥2	2	3

П $3X1+2X2+2X3+3X4 \longrightarrow max$

ФР $2X1+3X2+2X3+1X4 \leq 36$

СР1 $2X1+1X2 \leq 12$

СР2 $1X3+2X4 \leq 12$

$X1 \leq 3$

$X4 \geq 2$

$b1=12$

$b2=12$

1). Подсистемы описывают собственные оптимальные поведения

$3X1+2X2 \rightarrow max$

ФР1 $2X1+3X2 \leq Y1$

СР1 $2X1+1X2 \leq 12$

$X1 \leq 3$

$2X3+3X4 \rightarrow max$

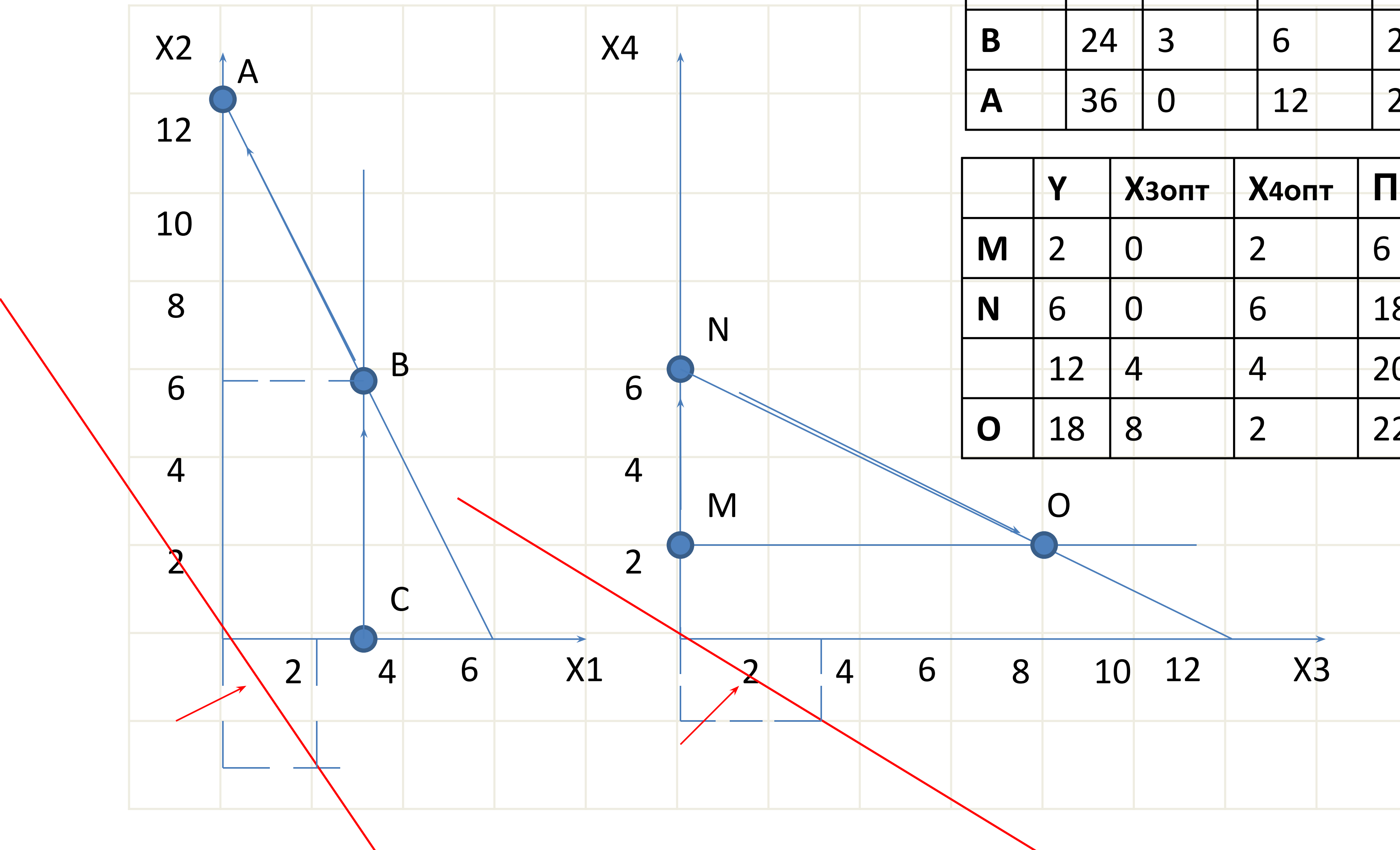
ФР2 $2X3+1X4$

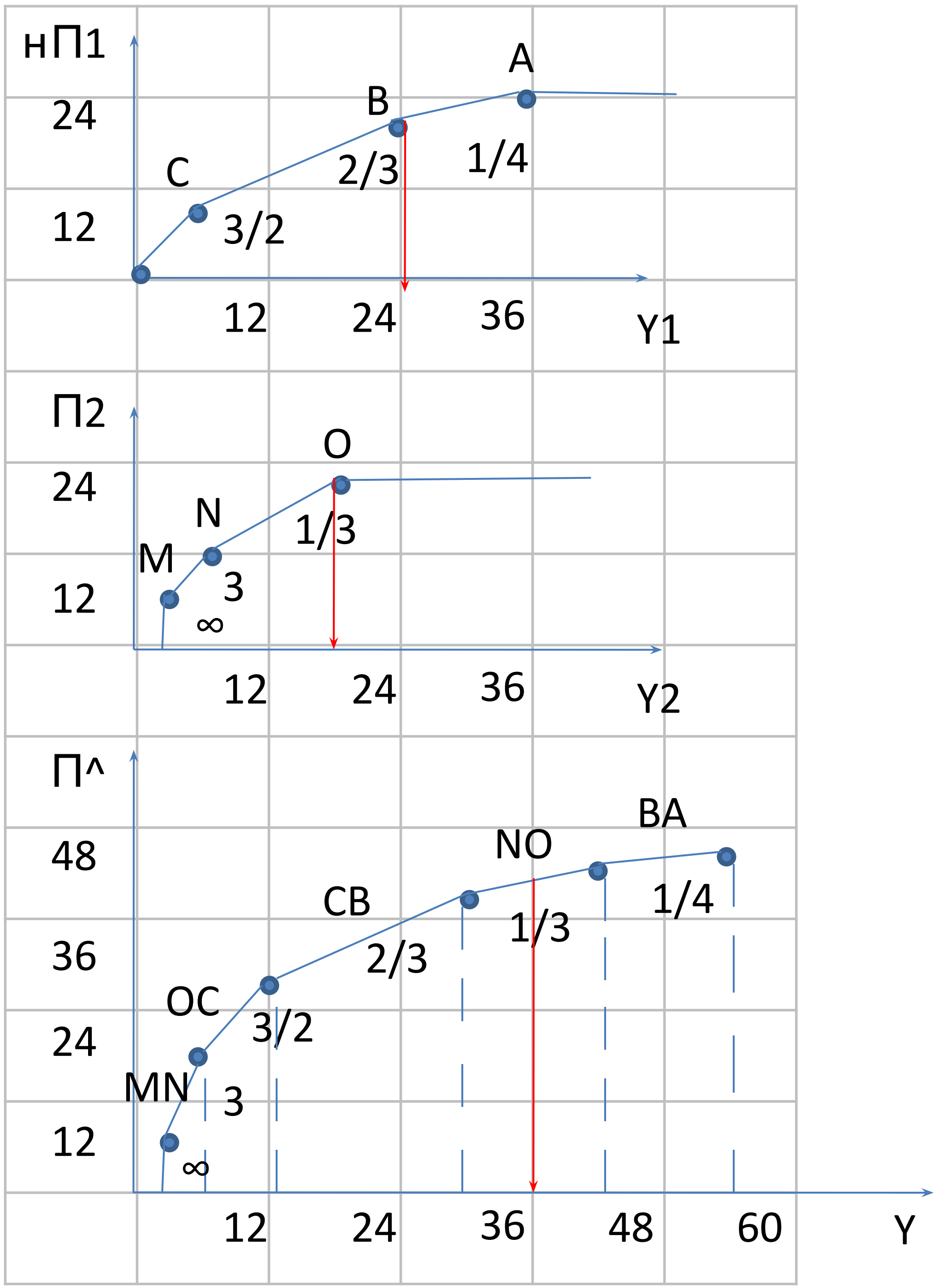
СР2 $1X3+2X4 \leq 12$

$X4 \geq 2$

	Y	X1опт	X2опт	П1
	0	0	0	0
C	6	3	0	9
B	24	3	6	21
A	36	0	12	24

	Y	X3опт	X4опт	П2
M	2	0	2	6
N	6	0	6	18
	12	4	4	20
O	18	8	2	22





	Y	X1^	X2^	П1
	0	0	0	0
C	6	3	0	9
B	24	3	6	21
A	36	0	12	24

	Y	X3^	X4^	П2
M	2	0	2	6
N	6	0	6	18
	12	4	4	20
O	18	8	2	22

Полученные зависимости передаются в центр.

E NO=1/3=E н

2). Центр должен решить задачу распределения ресурса и согласования поведения

$F_1(Y_1)+F_2(Y_2) \rightarrow max$

$y_1+y_2=36$

Центр строит интегральную функцию эффективности.

Определяется Ен – норматив эффективности. Норматив доводится до сведения предприятия

3).Предприятия составляют заявки на ресурс

$Y_1=24$

$Y_2=18$

4). Центр определяет оптимальные распределения ресурсов

$Y_{1опт}=24$

$Y_{2опт}=12$

5). Предприятия находят оптимальные планы

$X_{1опт}=3$

$X_{3опт}=4$

$X_{2опт}=6$

$X_{4опт}=4$

$П_1=21$

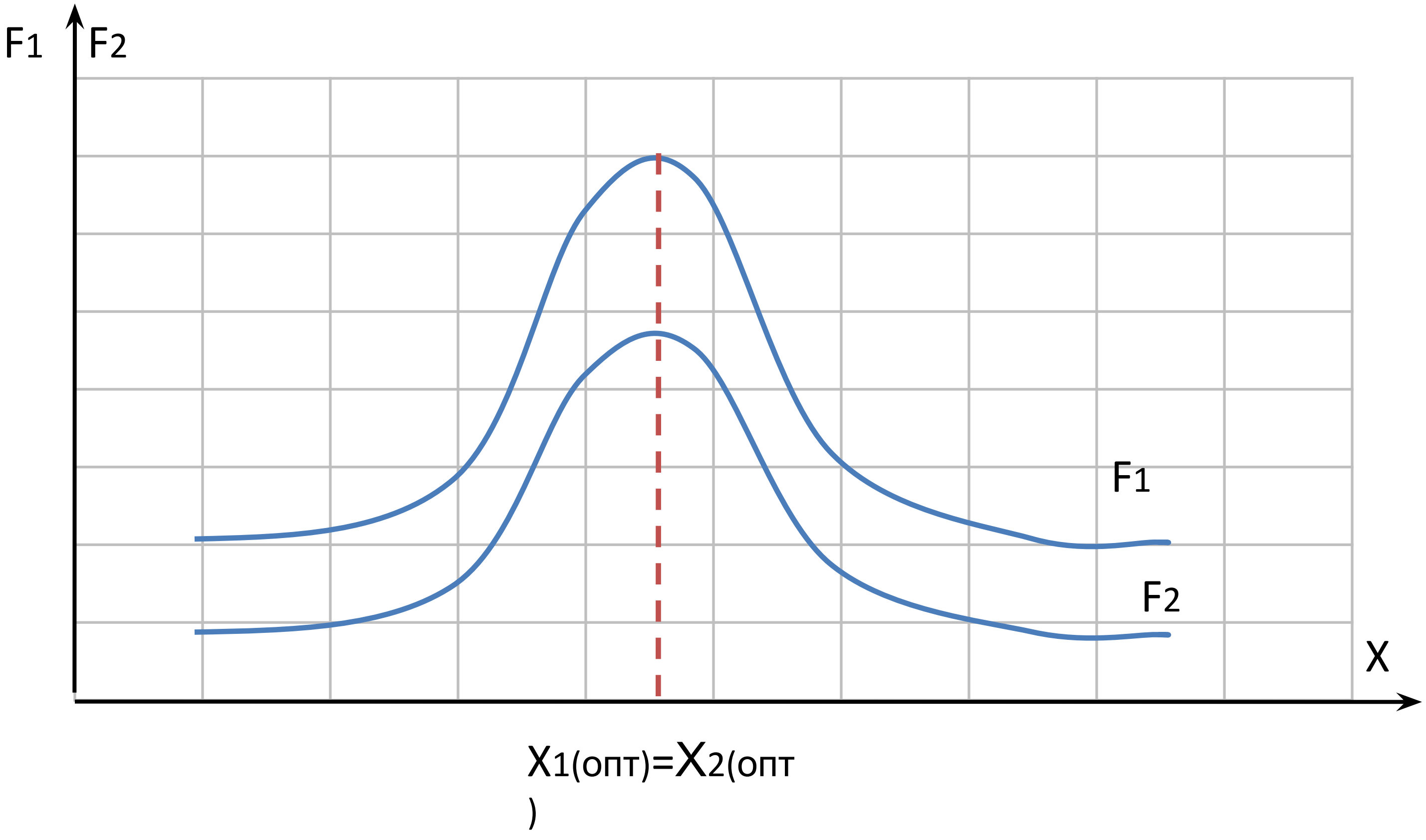
$П_2=20$

Многокритериальный выбор

- Уйти от многокритериальности
- Решить задачу по каждому из критериев, найти субоптимальное решение
- Найти критерий более высокого уровня
- Метод последовательных уступок
- Поиск компромисса на множестве Парето
- Метод свертывания критериев

Многокритериальный выбор

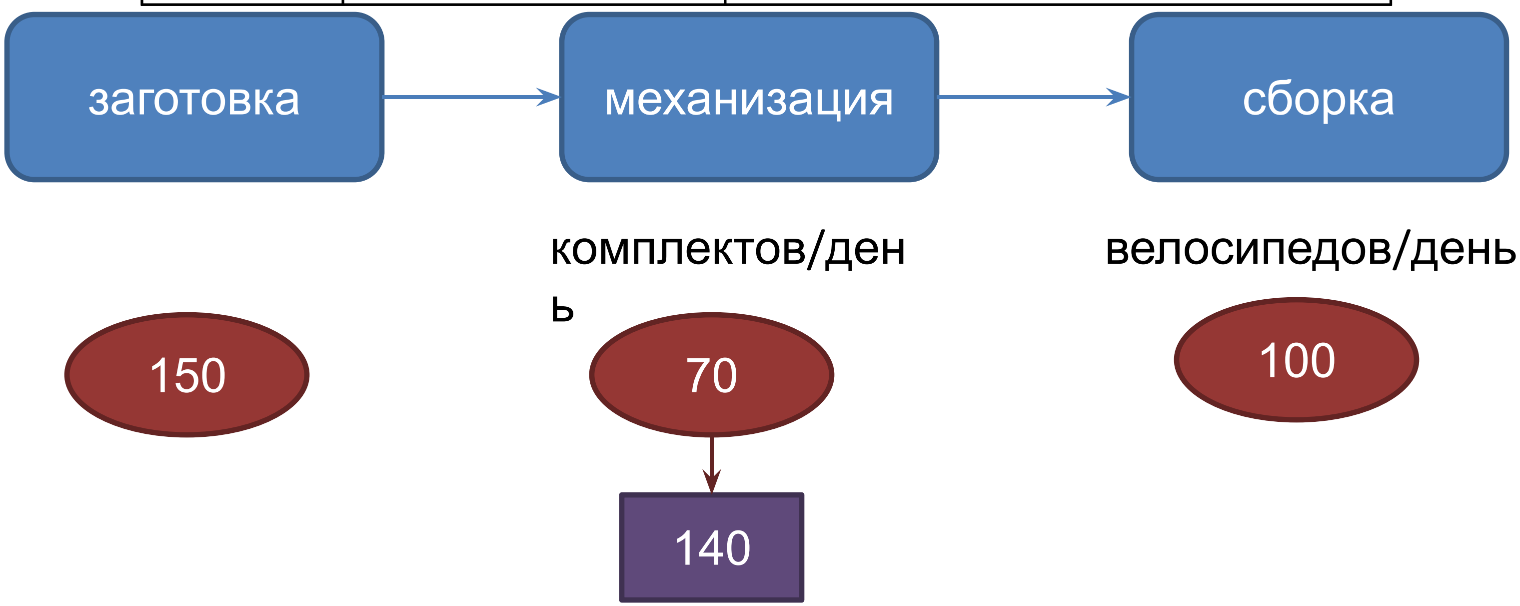
Поиск субоптимального решения



Многокритериальный выбор

Поиск критерия более высокого уровня

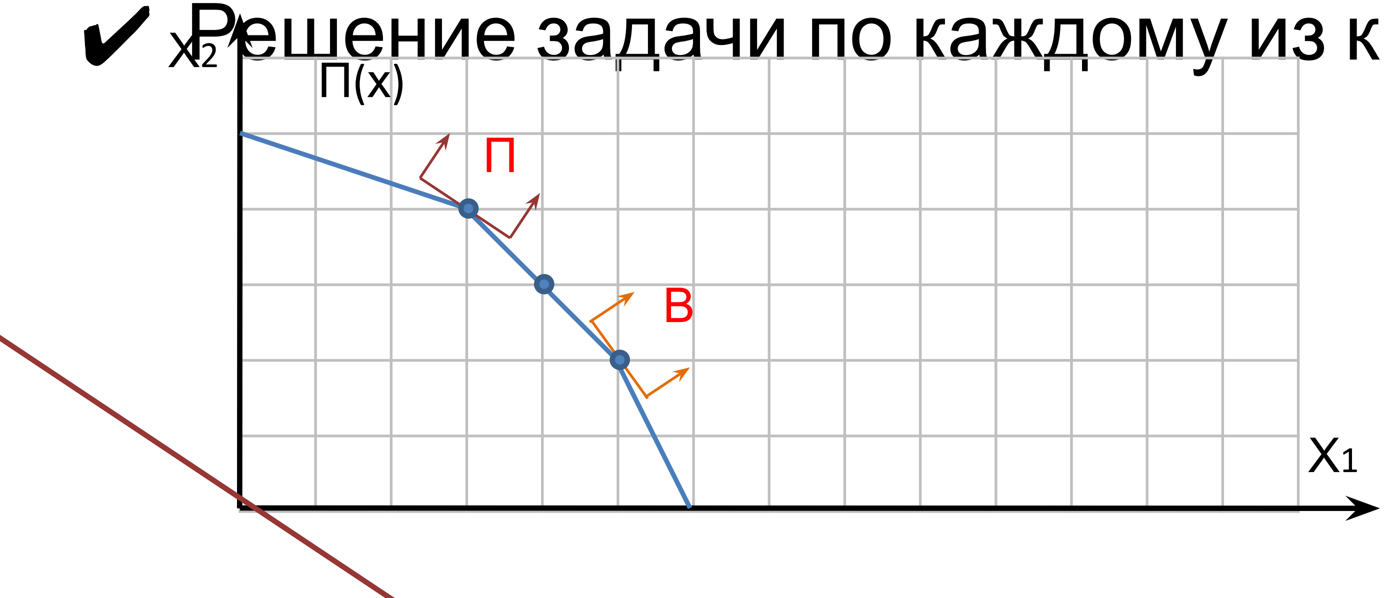
Станок	Цена [млн. руб.]	Производительность [шт./час]
1	1	10
2	0,5	5



Многокритериальный выбор

Метод последовательных уступок предполагает

- ✔ Упорядочение критериев по важности
  1. П → max
  2. В → max
- ✔ Решение задачи по каждому из критериев



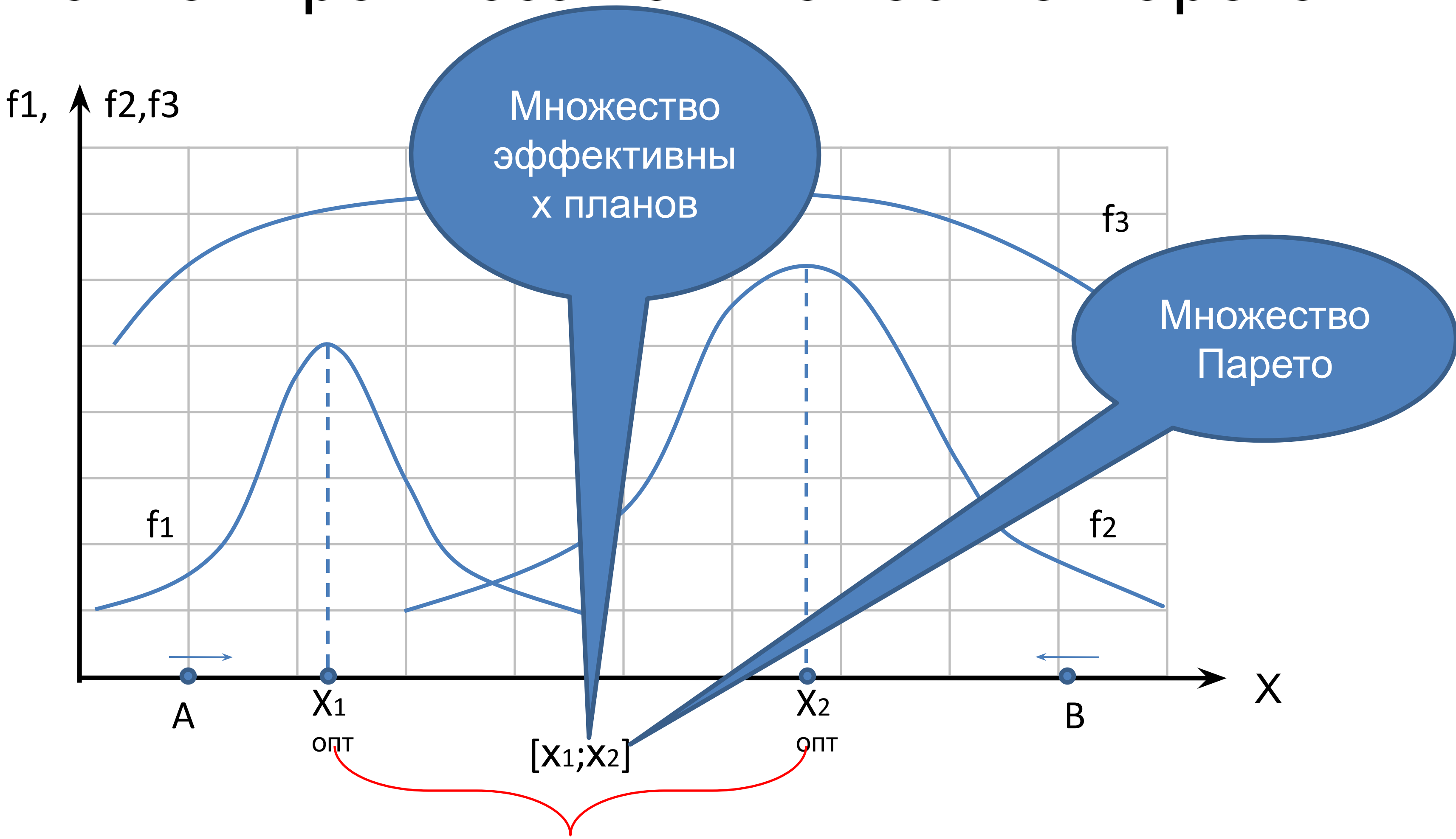
Многокритериальный выбор

Метод последовательных уступок

- ✔ Если оптимальные решения не совпадают, вводиться коэффициент уступки **α**, и новое ограничение **П (х) ≥ (1-х)•П**
- ✔ Решается задача по второму критерию с новым ограничением

Многокритериальный выбор

Поиск компромисса на множестве Парето



Многокритериальный выбор

Поиск компромисса на множестве Парето

- ✔ $f_i(x) \geq f_k$
- ✔ $\lambda_i = [f_i(x) - f_k] / [F_k - f_k], \; 0 \leq \lambda \leq 1$
- ✔ $f_i(x) \geq f_k + \lambda\Delta_i$

Задача.

Фирма хочет максимизировать три показателя: *прибыль, выручку и дивиденды.*

В	$20x_1$	+	$40x_2$	$\rightarrow$	max
П	$5x_1$	+	$20x_2$	$\rightarrow$	max
Д	$4x_1$	+	$1x_2$	$\rightarrow$	max
ГО-1	$2x_1$	+	$6x_2$	$\leq$	42
ГО-2	$2x_1$	+	$3x_2$	$\leq$	24
ГО-3	$4x_1$	+	$2x_2$	$\leq$	16
ГО-4	$4x_1$			$\leq$	28
	x_1	,	x_2	$\geq$	0

Решение

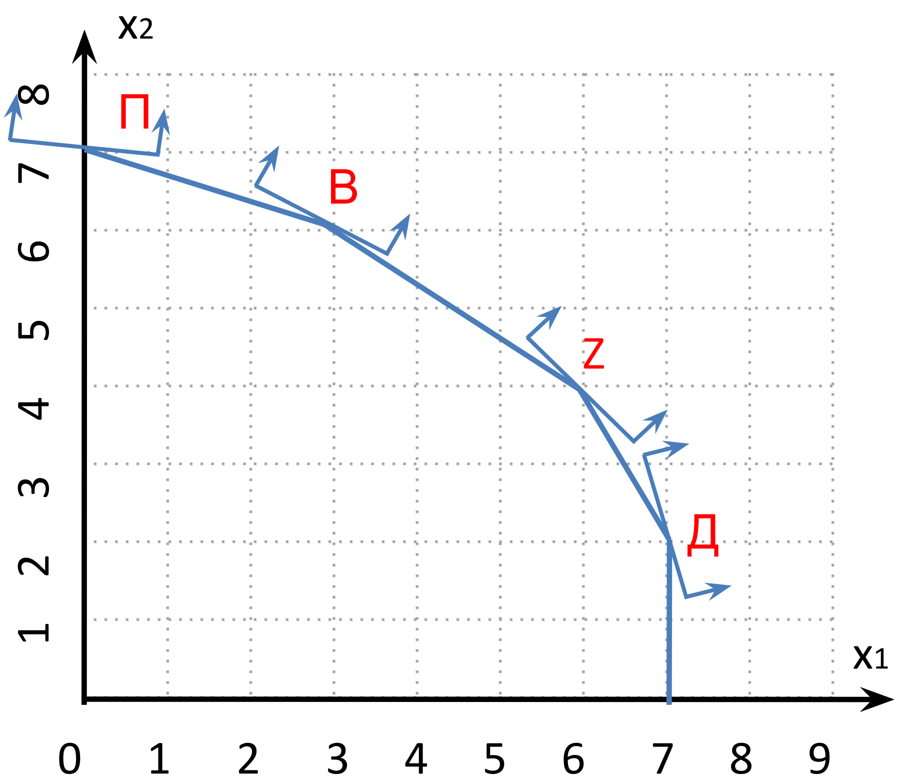
Решаем за… …ериев и результа… …ачений

$$
\begin{array}{llcllcll}
\text{В} & 20x_1 & + & 40x_2 & - & 80\lambda & \geq & 220 \\
\text{П} & 5x_1 & + & 20x_2 & - & 65\lambda & \geq & 75 \\
\text{Д} & 4x_1 & + & 1x_2 & - & 23\lambda & \geq & 7 \\
\text{ГО-1} & 2x_1 & + & 6x_2 & & & \leq & 42 \\
\text{ГО-2} & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 24 \\
\text{ГО-3} & 4x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 16 \\
\text{ГО-4} & 4x_1 & & & & & \leq & 28 \\
 & x_1 & , & x_2 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

				…лан (x_1;
В→max				…3;6
П→max	280	140	7	0;7
Д→max	220	75	30	7;2
(•) Z	280	110	28	6;4

Из полученных вариантов осуществляется выбор

	В/Вопт	П/Попт	Д/Допт	max min	∑
В→max	1	0,96	0,6	0,6	2,56
П→max	0,93	1	0,23	0,23	2,16
Д→max	0,73	0,54	1	0,54	2,27
Z	0,93	0,79	0,93	0,79	2,64



Критерии выбора:

1. $\max\limits_{s} \min\limits_{i} [f_i(x) / F_i]$
2. $\sum(\beta_i \bullet [f_i(x) / F_i]) \rightarrow \max$

Многокритериальный выбор

Свертывание критериев

В	$20x_1$	+	$40x_2$	$\longrightarrow$	max
П	$5x_1$	+	$20x_2$	$\longrightarrow$	max
Д	$4x_1$	+	$1x_2$	$\longrightarrow$	max

Свертка:

$$\frac{20x_1+40x_2}{300} + \frac{5x_1+20x_2}{140} + \frac{4x_1+x_2}{30} \longrightarrow \max$$

$$0{,}24x_1 + 0{,}3x_2 \longrightarrow \max$$