Динамические системы и их математические модели. Автоматические системы регулирования

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ, ТЕПЛОТЕХНИКЕ И ТЕПЛОТЕХНОЛОГИЯХ. ЛЕКЦИЯ №3.

План лекции №3

1. Статические и динамические системы.
2. Линейные и нелинейные системы.
3. Дифференциальные уравнения динамических систем.
4. Типовые воздействия и реакции на них.
5. Интеграл свертки.
6. Преобразование Лапласа (прямое и обратное) и передаточная функция.
7. Элементарные звенья: перечень, пример.
8. Математические модели объектов управления.

Статические и динамические системы

Динамическая система – система, в широком смысле находящаяся в постоянном движении, параметры этой системы изменяются во времени.

Динамическая система может находиться в **статическом состоянии**.

- Динамическая система
  - Линейная
  - Нелинейная

Описывается линейными дифференциальными уравнениями.
Для линейной системы справедлив принцип суперпозиции (наложения).

Принцип наложения (суперпозиции)

Отклик (реакция) системы на сумму воздействий равен взвешенной сумме откликов (реакций) системы на каждое воздействие.

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t) \qquad y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(t)$$

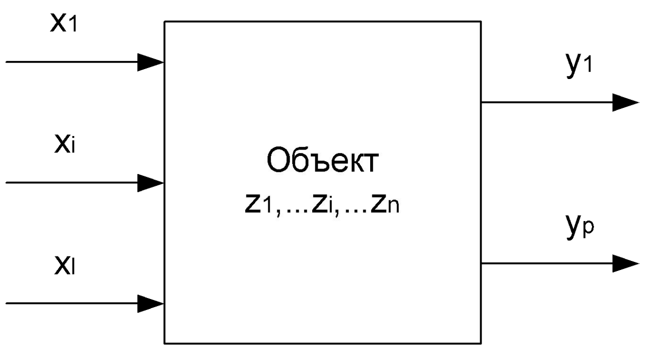
Дифференциальные уравнения динамических систем

Составим дифференциальное уравнение для объекта с сосредоточенными ёмкостями. Уравнения энергетического и материального баланса составляется для каждой ёмкости и представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, если в объекте n ёмкостей, соответственно, будет n уравнений.

Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$z_i'(t) = f_i[z_1(t), z_2(t) \ldots z_n(t), x_1(t), x_2(t) \ldots x_l(t)], i = 1,2 \ldots n$$

где: z_i – переменные состояния системы, характеризующие содержание вещества или энергии в ёмкостях в каждый момент времени t;
$x_1 \ldots x_l$ – внешние (входные) воздействия на систему, приводящие к изменению ее состояния.



$$y_j(t) = \varphi_j(z_1(t) \ldots z_n(t), x_1(t) \ldots x_l(t)), j = 1,2 \ldots p.$$

Дифференциальные уравнения линейных систем

Дифференциальные уравнения линейных систем имеют вид:

$$z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} z_k(t) + \sum_{k=1}^{l} b_{i,k} x_k(t), i = 1,2...n$$

После всех необходимых преобразований дифференциальное уравнение линейной динамической системы примет вид:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} y' + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + ... + b_{m-1} x'(t) + b_m x(t)$$

Типовые воздействия

Динамическая характеристика – это характеристика, определяющая реакцию системы на некоторые типовые входные воздействия (их также называют тестовыми воздействиями).

Подбор тестовых воздействий осуществляется таким образом, чтобы любое возможное в процессе эксплуатации воздействие на систему можно было представить взвешенной суммой типовых воздействий. Таким образом, используя принцип наложения можно определить реакцию системы на любое воздействие.

Типовые воздействия

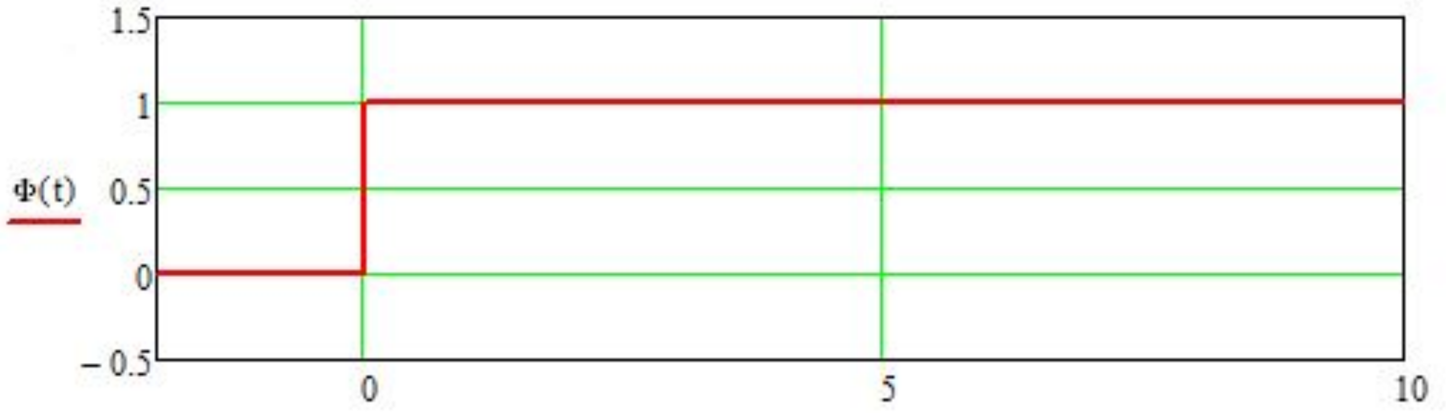
- Единичное ступенчатое воздействие (функция Хевисайда);

- Дельта-функция, функция Дирака;

- Гармонические колебания единичной амплитуды.

Функция Хевисайда

$$1(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$



Переходная характеристика – это реакция объекта/системы на функцию Хевисайда. Переходная характеристика обозначается *h(t)*.

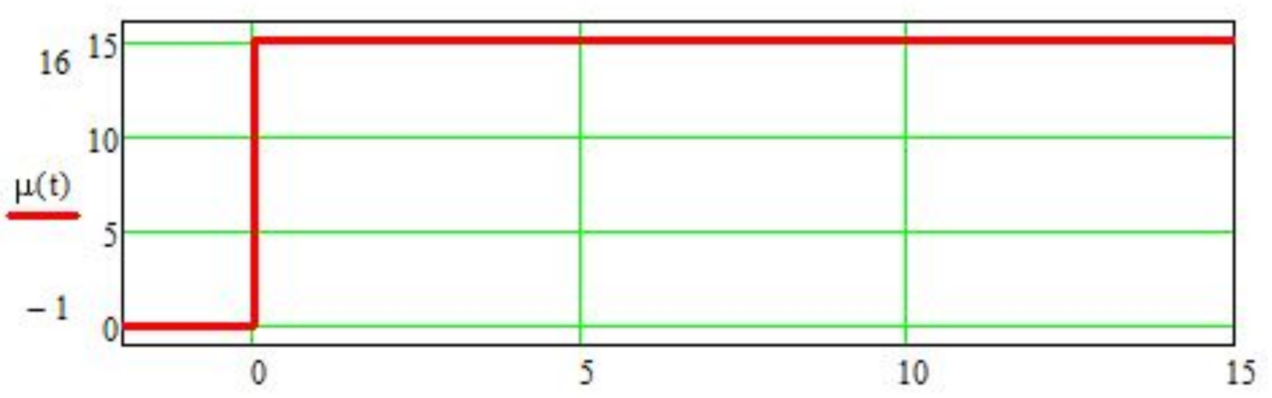
Кривая разгона

Кривая разгона – это реакция динамической системы на ступенчатое воздействие произвольной величины.

Кривая разгона обычно обозначается y(t), из кривой разгона может быть получена переходная характеристика:

$$x(t) = \Delta\mu * 1(t)$$

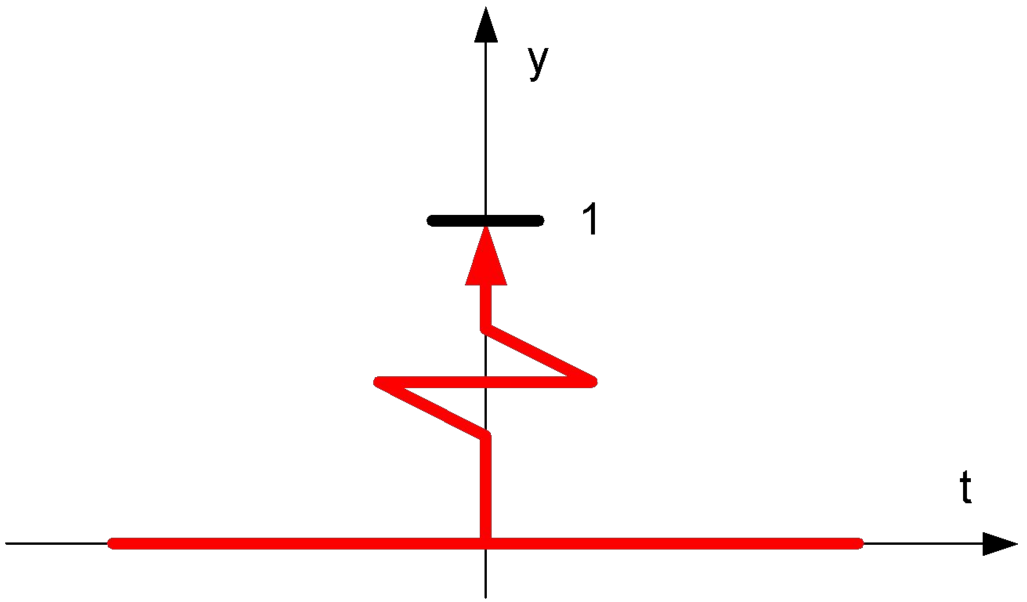
$$h(t) = \frac{y(t)}{\Delta\mu}$$



Функция Дирака

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t < \tau \end{cases} \qquad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

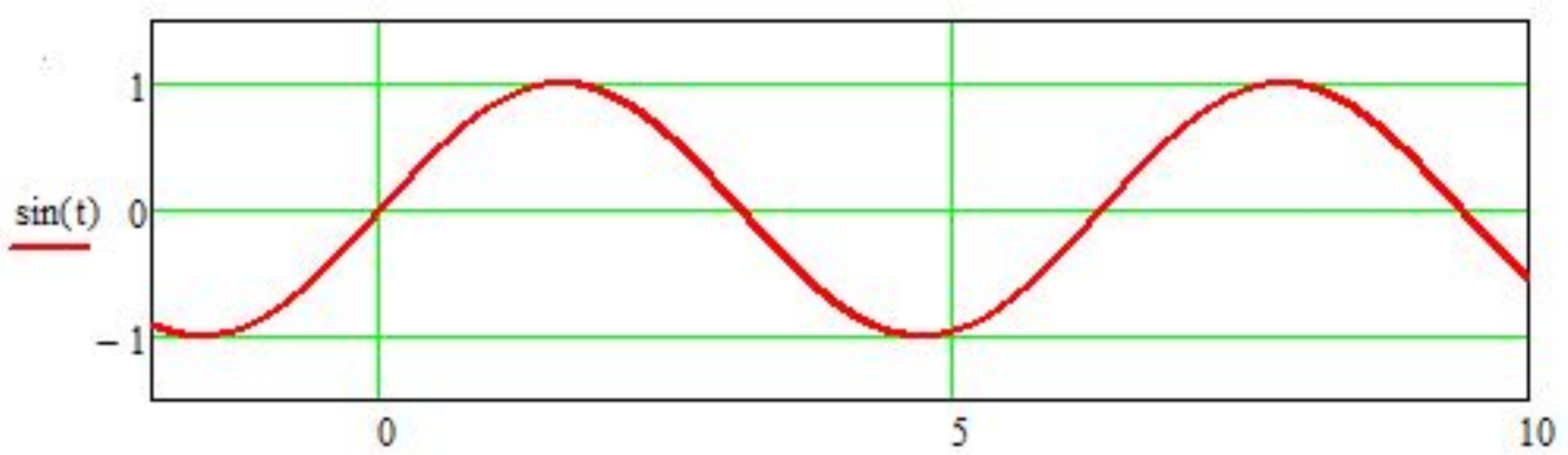
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$



Импульсная переходная характеристика – это реакция объекта/системы на функцию Дирака. Импульсная переходная характеристика представляет собой производную от переходной характеристики, обозначается *w(t)*.

Гармоническое воздействие

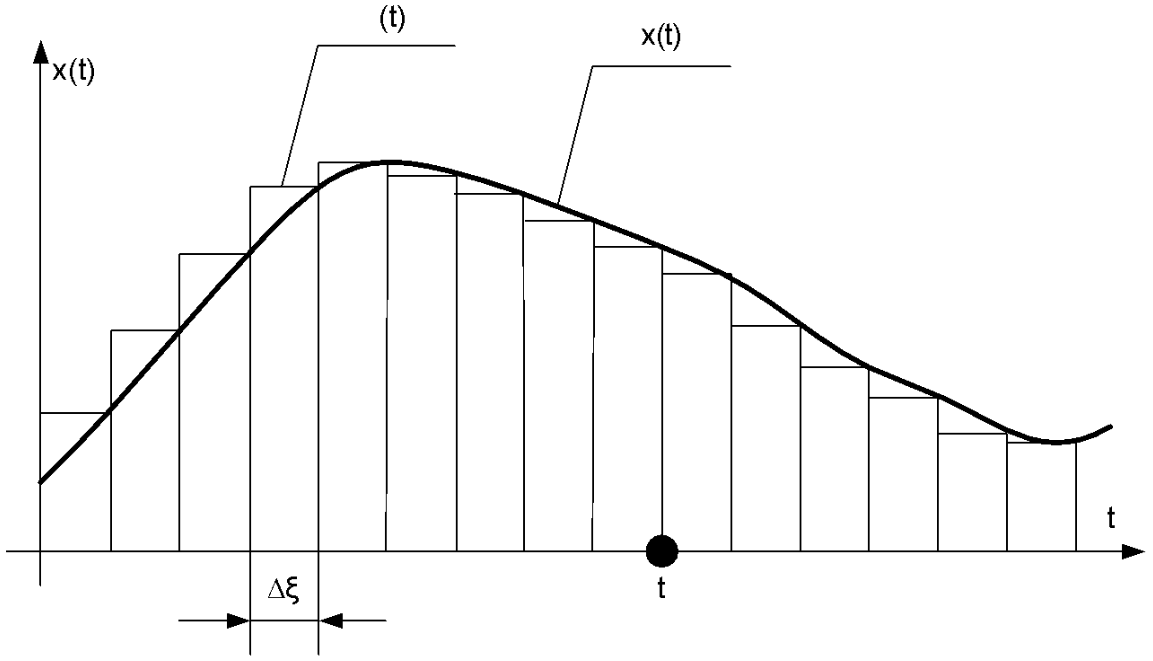
$$x(t) = A\sin(\omega t)$$



Гармоническая характеристика – это реакция объекта на гармоническое воздействие.

Интеграл свертки

$$y(t) = \int_{-0}^{t} w(t)x(t-\xi)d\xi$$



Переходная характеристика

Если входное воздействие представляет собой единичную ступеньку или функцию Хевисайда (то есть, на выходе получается переходная характеристика), то можно записать:

$$x(t) = 1(t)$$

$$h(t) = \int_{-0}^{\infty} w(\xi) d\xi$$

Также необходимо отметить, что импульсная переходная характеристика представляет собой производную от переходной характеристики:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Статическая и динамическая системы

Из интеграла свертки следует, что выходная величина динамической системы в некоторый момент времени зависит не только от входного воздействия в этот момент времени, но и в предыдущие моменты времени. То есть, **динамическая система обладает «памятью» на входные воздействия**, статическая – не обладает.

$$\boxed{y(t) = \int_{-0}^{\infty} w(t)x(t-\xi)d\xi}$$

Преобразование Лапласа

С помощью **преобразования Лапласа** каждой функции в пространстве оригиналов ставится в соответствие некая функция в пространстве изображений. Переход от оригинала к изображению выполняется по формуле:

$$X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \qquad s = \sigma + j\omega$$

Где: $x(t)$ - оригинал, $t \geq 0$;

$X(s)$ - изображение функции-оригинала по Лапласу.

Изображение по Лапласу обозначается $X(s) = L\{x(t)\}$.

Существует прямое и обратное преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа. Пример.

$$x(t) = 1(t); t \ge 0$$

$$X(s) = \int_{-0}^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{-0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

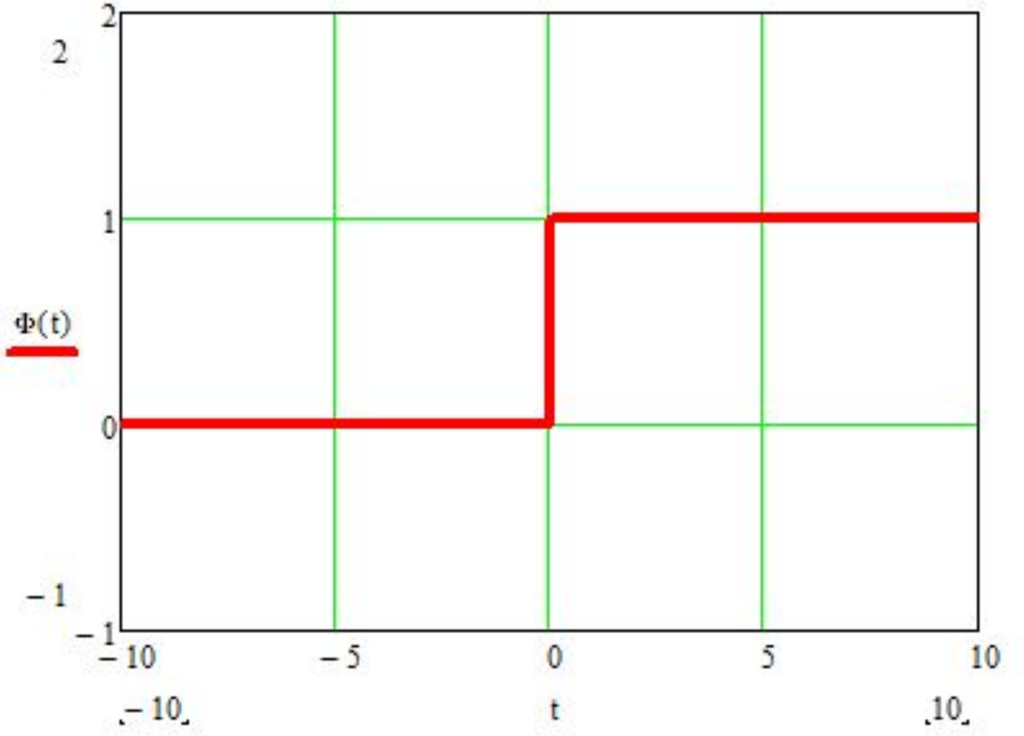
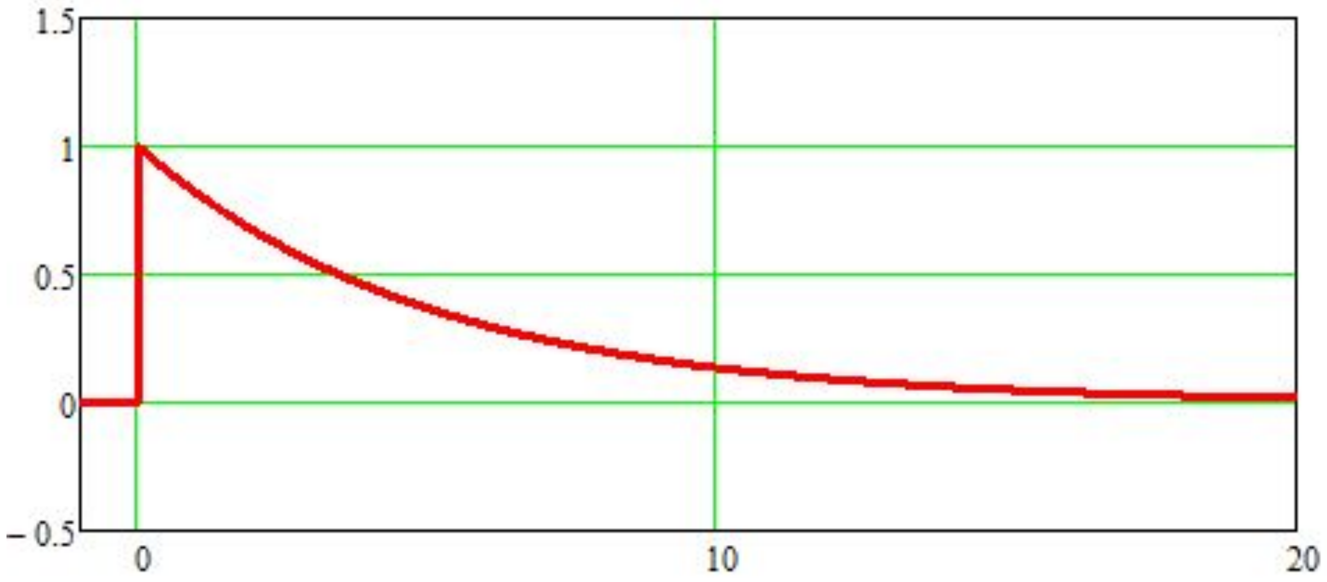


Таблица преобразования Лапласа приведена в учебнике В.Я. Ротача в параграфе 2.2.

Преобразование Лапласа. Пример.

$$x(t) = e^{-\alpha t}; t \geq 0$$



$$X(s) = \int_{-0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_{-0}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt =$$

$$= \frac{-1}{\alpha + s} \int_{-0}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} d(-(\alpha + s))t =$$

$$= \frac{-1}{\alpha + s} e^{-(\alpha+s)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{-1}{\alpha + s}(0-1) = \frac{1}{\alpha + s}$$

Таблица преобразования Лапласа приведена в учебнике В.Я. Ротача в параграфе 2.2.

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность: $L\{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k(t)\} = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(s), a_k = const.$

2. Изображение производной оригинала: $L\{x'(t)\} = sX(s) - x(-0)$

$$L\{x'(t)\} = sX(s) \text{ при } \mathrm{x(t) = 0, t < 0.}$$

$$L\{x''(t)\} = s^2 X(s);$$

$$L\{x'''(t)\} = s^3 X(s).$$

3. Начальное значение оригинала: $x(+0) = \lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$

4. Конечное значение оригинала: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{s\to 0} sX(s)$

Передаточная функция

Пусть имеется дифференциальное уравнение динамической системы, выведенное на предыдущей лекции:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + \ldots + b_{m-1} x'(t) + b_m x(t)$$

Входное воздействие: $x(t) = 0, t < 0$

Рассматриваемая система до *t=0* находилась в состоянии покоя: $y(-0) = y'(-0) = y''(-0) = \ldots = y^{n-1}(-0) = 0$

Умножим обе части данного уравнения на e^{-st}

Проинтегрируем обе части уравнения от 0 до ∞, то есть, выполним преобразование Лапласа.

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + \ldots + b_{m-1} s + b_m) X(s)$$

Введем обозначения:

$$K(s) = b_0 s^m + \ldots + b_{m-1} s + b_m$$

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$$

Передаточная функция

Тогда получим выражение: $$Y(s)=\frac{K(s)}{D(s)}X(s)\Rightarrow Y(s)=W(s)X(s);W(s)=\frac{K(s)}{D(s)}$$

Передаточная функция системы - отношение преобразованной по Лапласу выходной величины системы к преобразованному по Лапласу входному воздействию при нулевых начальных условиях.

Передаточная функция представляет собой описание объекта, подобно дифференциальному уравнению, но при этом она не имеет физического смысла.

Передаточную функцию системы можно получить по ее дифференциальному уравнению, для этого:

Производные в левой и правой частях заменить на s в степени, равной порядку заменяемой производной;

Полином, полученной в правой части –является числителем передаточной функции, а полином в левой части – ее знаменателем.

Знаменатель передаточной функции является **характеристическим уравнением системы (ХУ)**. Корни ХУ называются **полюсами ПФ**.

Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа

1. Преобразовать по Лапласу входное воздействие: $x(t) \to X(s)$

2. По дифференциальному уравнению составить передаточную функцию системы;

3. Записать выражение для изображения выходной величины: $Y(s) = W(s)X(s)$

4. Выполнить обратное преобразование Лапласа и получить оригинал выходной величины системы: $Y(s) \to y(t)$

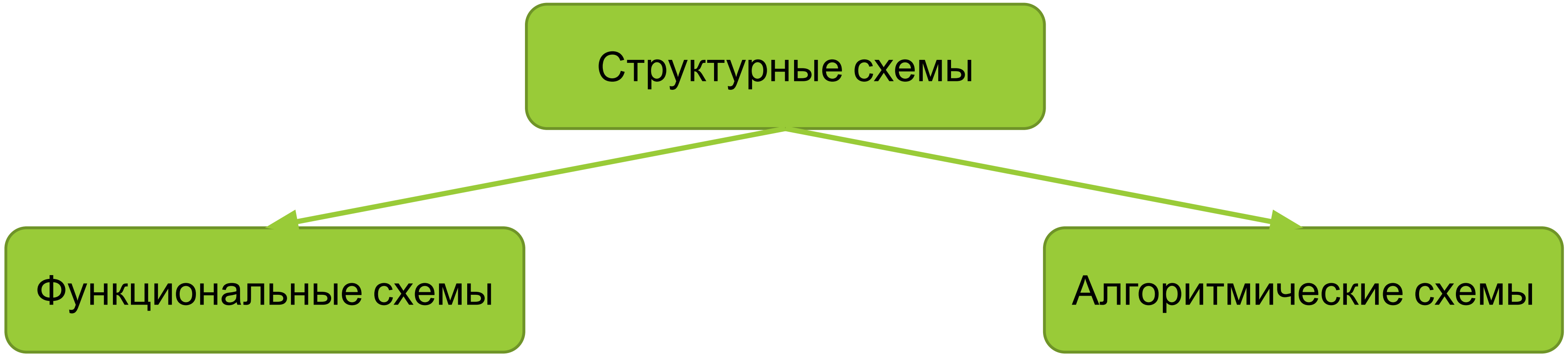
Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа выполняется по формуле:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s) ds$$

где: σ – действительное число.

Алгоритмические структуры систем управления и их элементарные звенья. Виды схем. Понятие элементарного звена



Структурная схема системы управления графически отображает ее состав; входящие в эту систему элементы и связи между ними.

На **функциональных схемах** элементы системы группируются на основании общности выполняемых ими функций, например, по принадлежности к объекту или к контроллеру.

На **алгоритмических схемах** основное значение имеет характер преобразования сигналов в отдельных элементах. На **физических схемах** отражаются аппаратурные особенности и физическая природа носителей сигналов и т.д. Теория автоматического управления, как правило, абстрагируется от физической природы объекта.

Звенья на структурных схемах

При разделении схемы на звенья (части) необходимо соблюдать принципы (правила) автономности и детектирования.

Принцип автономности состоит в том, что при изменении внутренних свойств одного звена внутренние свойства всех остальных остаются неизменными.

Принцип детектирования (или принцип однонаправленной передачи воздействий) состоит в том, что выходная величина любого звена зависит только от его входной величины, обратное влияние через звено отсутствует.

Элементарным звеном называется звено описываемое дифференциальным уравнением первого порядка. Из элементарных звеньев часто строят модели систем управления и регулирования.

Элементарные звенья

статическое (безинерционное, пропорциональное, П);

- интегрирующее (И);

- дифференцирующее (идеальное дифференцирующее, Д);

- реальное дифференцирующее (РД);

- инерционное звено первого порядка (апериодическое, А);

- звено запаздывания (З);

- интегродифференцирующее (ИД);

- инерционное звено второго порядка (колебательное, К).

Инерционное звено второго порядка (или колебательное звено) описывается дифференциальным уравнением второго порядка, тем не менее, его тоже относят к элементарным звеньям.

Статическое звено

Также называется **безинерционным**, **пропорциональным** или **П-звеном**. Примером физической реализации П-звена является рычаг, клапаны с линеаризованными характеристиками, пружина обратной связи в гидравлическом регуляторе и т.д.

Дифференциальное уравнение П-звена имеет вид:

$$y(t) = kx(t), k = const$$

Коэффициент k в дифференциальном уравнении П-звена называется также коэффициентом передачи П-звена. Необходимо заметить, что это размерная величина, размерность которой представляет собой отношение размерности выходного сигнала к размерности входного сигнала.

Статическое звено

Передаточная функция П-звена имеет вид: $W(s) = k$

КЧХ П-звена имеет вид: $W(j\omega) = k$

АЧХ П-звена имеет вид: $A(\omega) = k$

ФЧХ П-звена имеет вид: $\varphi(\omega) = 0$

Переходная характеристика П-звена имеет вид: $h(t) = k * 1(t)$

Импульсная переходная характеристика П-звена имеет вид: $w(t) = k * \delta(t)$

Интегрирующее звено

Также называется **И-звеном**. Примером физической реализации И-звена является гидравлический исполнительный двигатель или гидравлическая система (бак) с насосом на стоке.

Дифференциальное уравнение И-звена: $y(t) = k_и \int_{-0}^{t} x(t)dt, k_и = const$

Коэффициент $k_и$ в дифференциальном уравнении И-звена называется также коэффициентом передачи И-звена. Необходимо заметить, что это размерная величина, размерность которой представляет собой отношение размерности выходного сигнала, к размерности входного сигнала, умноженной на время.

Интегрирующее звено

Передаточная функция И-звена имеет вид: $W(s) = \frac{k_и}{s}$

КЧХ И-звена имеет вид: $W(j\omega) = \frac{k_и}{j\omega} = \frac{k_и}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

АЧХ И-звена имеет вид: $A(\omega) = \frac{k_и}{\omega}$

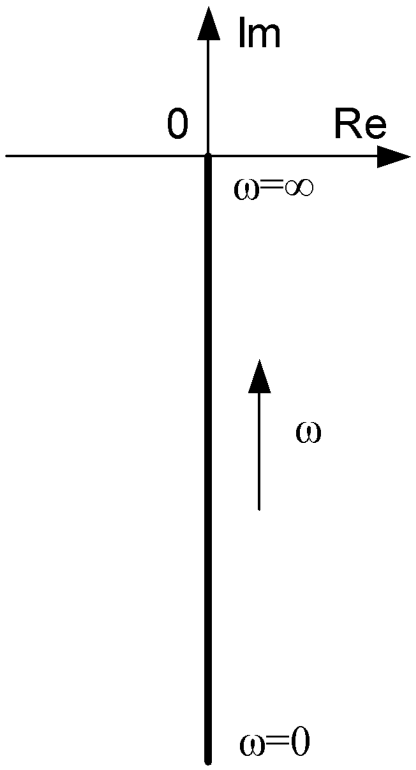
ФЧХ И-звена имеет вид: $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Переходная характеристика И-звена имеет вид: $h(t) = k_и t * 1(t)$

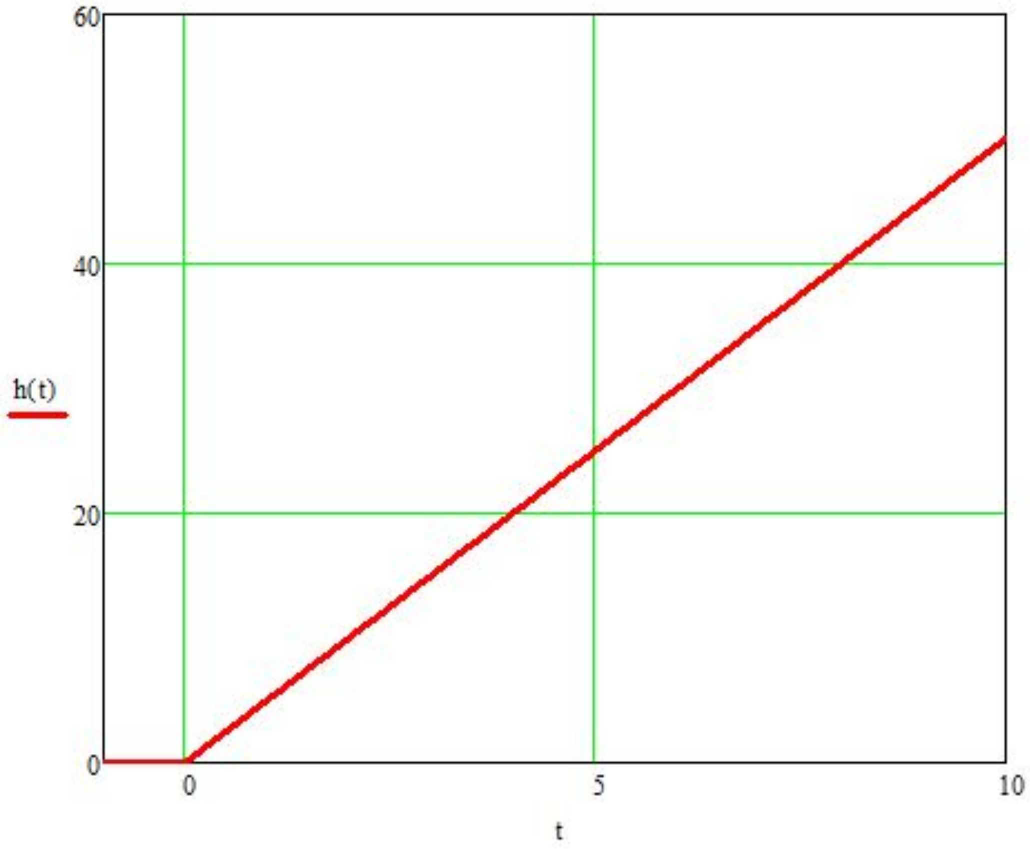
Импульсная переходная характеристика И-звена имеет вид: $w(t) = k_и * 1(t)$

Интегрирующее звено

Годограф КЧХ



Переходная характеристика



Апериодическое звено

Также называется А-звеном или инерционным звеном первого порядка.

Примером физической реализации А-звена является RC-цепочка, которая рассматривалась в предыдущей лекции при изучении РД-звена, но в этой цепочке нужно поменять местами резистор и конденсатор.

Дифференциальное уравнение А-звена имеет вид

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t), k = const, T = const.$$

Коэффициент k в дифференциальном уравнении А-звена называется также коэффициентом передачи А-звена. Необходимо заметить, что это размерная величина, размерность которой представляет собой отношение размерности выходного сигнала к размерности входного сигнала. T – постоянная времени апериодического звена, имеет размерность времени.

Апериодическое звено

Передаточная функция А-звена имеет вид: $W(s) = \frac{\mathrm{k}}{Ts+1}$

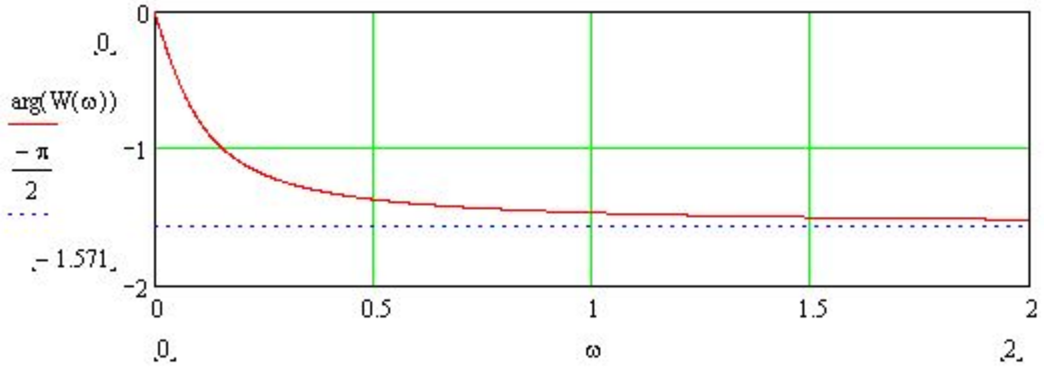
КЧХ А-звена имеет вид: $W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{-jarctgT\omega}$

АЧХ А-звена имеет вид: $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$

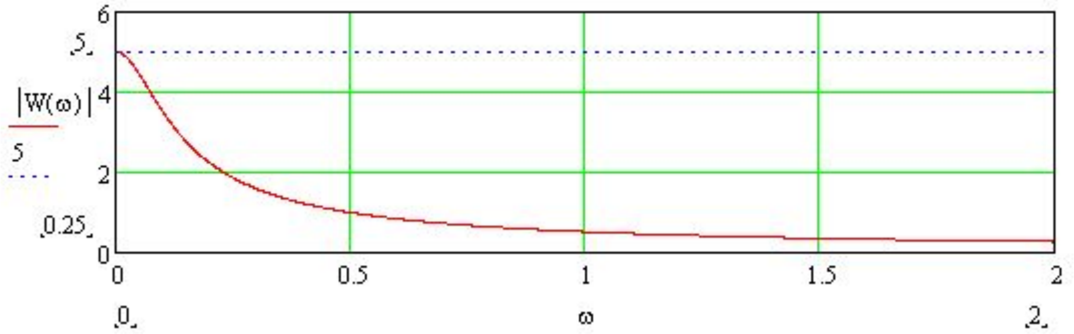
ФЧХ А-звена имеет вид: $\varphi(\omega) = -arctgT\omega$

Апериодическое звено

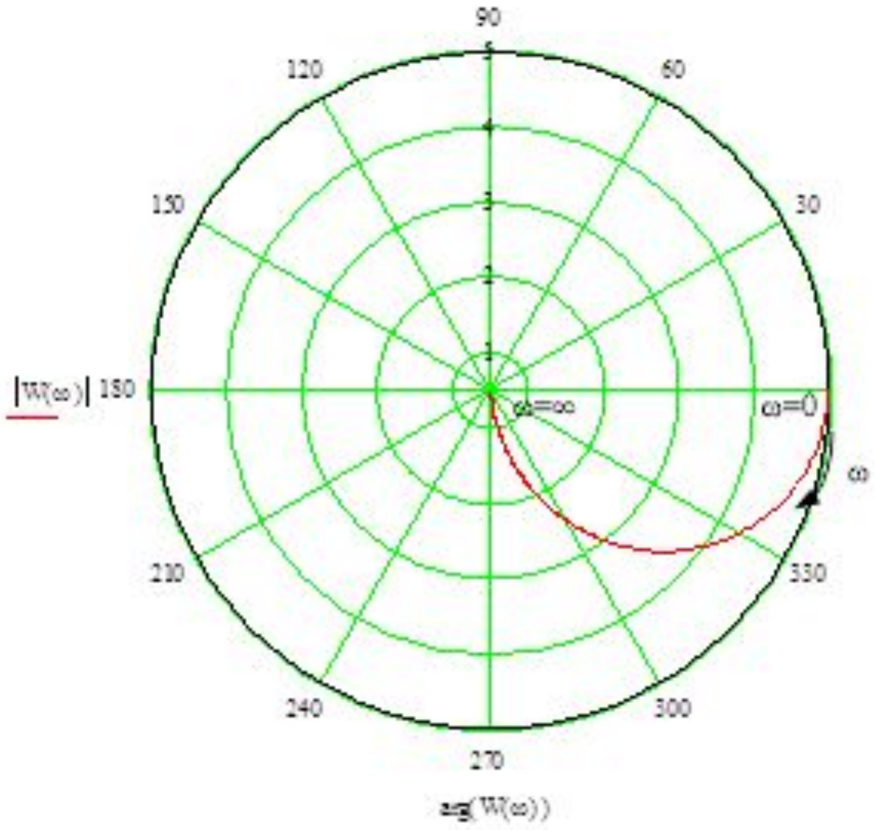
Фазо-частотная характеристика



Амплитудно-частотная характеристика



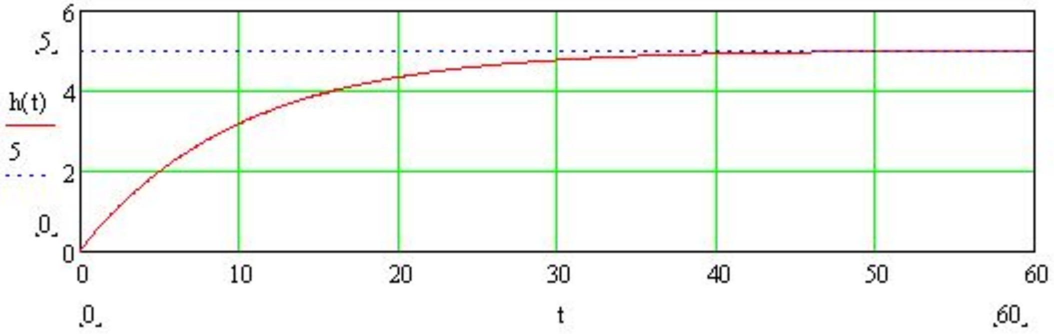
Годограф КЧХ

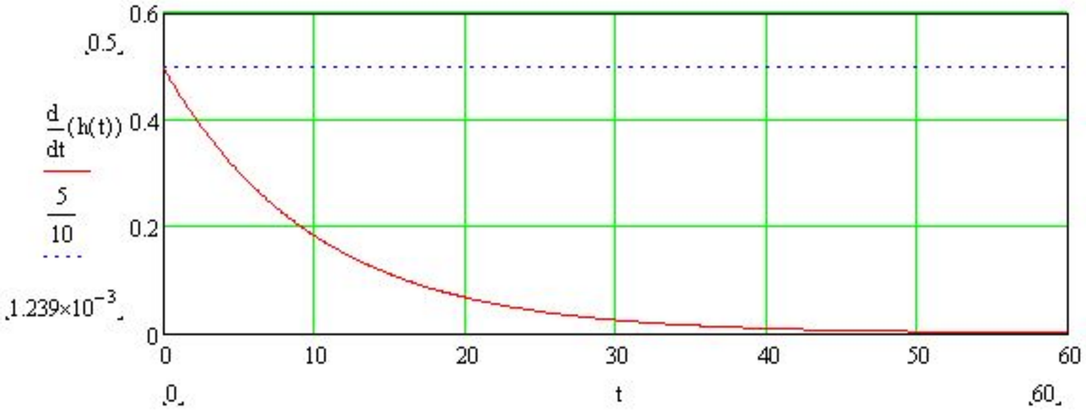


Апериодическое звено

Переходная характеристика А-звена имеет вид: $h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) * 1(t)$

Импульсная переходная характеристика А-звена: $w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} * 1(t)$





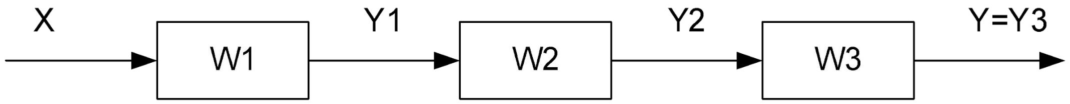
Соединения элементарных звеньев

1. Последовательное

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s) \qquad W(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} W_i(j\omega)$$

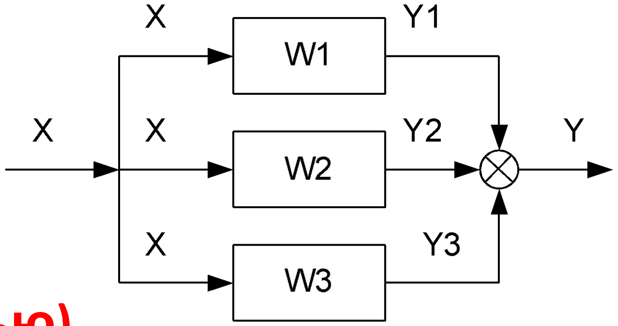
$$A(\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega)$$



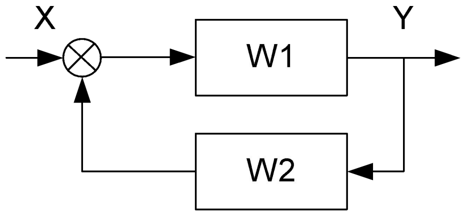
2. Параллельное

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s) \qquad W(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} W_i(j\omega)$$

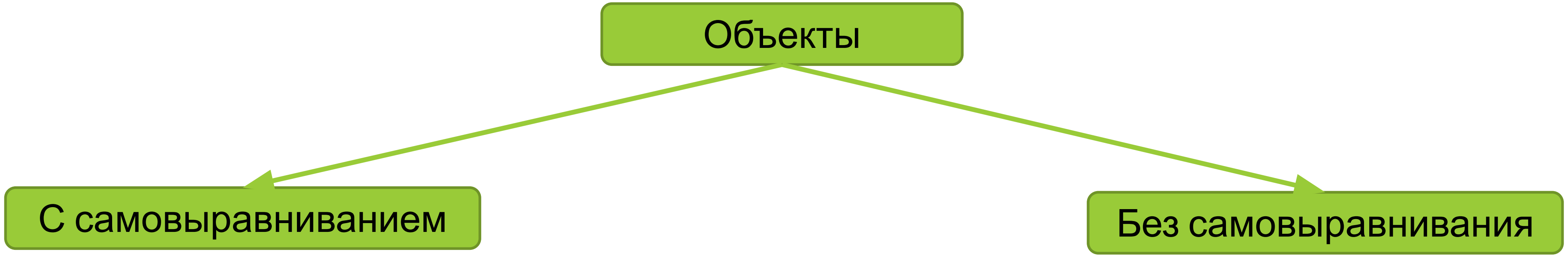


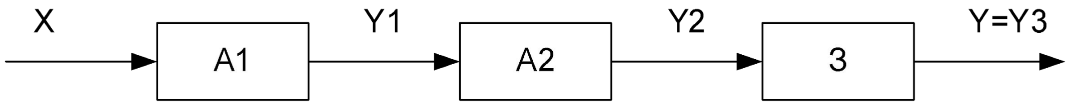
3. Встречно-параллельное (с обратной связью)

$$\mathrm{W}_{\mathrm{xy}}(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s)W_2(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_{\mathrm{pc}}(s)}$$

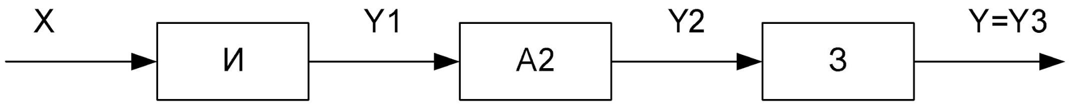


Математические модели объектов управления





$$W(s) = W_{A1}(s)W_{A2}(s)W_3(s) = \\ = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



$$W(s) = W_{И}(s)W_{A2}(s)W_3(s) = \\ = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(T_2 s + 1)}$$

Контрольные вопросы

В чем состоит принцип наложения?

Какая динамическая система называется линейной?

Какие существуют типовые (или тестовые) входные воздействия?

Что называется функцией Хевисайда?

Что называется переходной характеристикой?

Что называется функцией Дирака?

Что называется импульсной переходной характеристикой?

Как можно экспериментально найти переходную/импульсную переходную характеристику?

Как можно представить произвольное входное воздействие в виде последовательности импульсов? В виде последовательности ступенек?

Что называется интегралом свертки?

В чем состоит различие статической и динамической систем?

Запишите формулу прямого и обратного преобразования Лапласа.

Для чего применяется преобразование Лапласа?

Запишите изображение по Лапласу функции Хевисайда, линейной функции, экспоненты.

Каковы свойства преобразования Лапласа?

Как вычислить начальное и конечное значение оригинала, зная изображения?

Что называется передаточной функцией?

Каким образом можно получить передаточную функцию по дифференциальному уравнению системы?

Каким образом можно решить дифференциальное уравнение с помощью преобразования Лапласа?

Запишите дифференциальное уравнение апериодического звена, постройте его характеристики.