Алгебра высказываний
Лекция 3

Цель: ознакомить с понятиями ДНФ, СДНФ, сформировать навыки приведения высказываний к ДНФ и СДНФ, показать возможности применения алгебры высказываний при решении логических задач, упрощении переключательных схем

Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)

Определение 1

$$F^{a} = \begin{cases} F, \text{если } a = 1 \\ \overline{F}, \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Утверждение 2

$$A^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow A = \alpha$$

Доказательство

A	a	A^{a}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Определение 3

Конъюнкция логических переменных или их отрицаний называется *элементарной конъюнкцией* (**ЭК**).

Общий вид элементарной конъюнкции: $A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot A_n^{a_n}$

Пример

$$\overline{AC},\ AB,\ A \vee \overline{C},\ \overline{B}C,\ \overline{A}B\overline{C},\ \overline{\overline{B} \cdot C},\ \mathrm{A}$$

Определение 4

Высказывание называется *дизъюнктивной нормальной формой* (**ДНФ**), если оно представляет собою дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Общий вид ДНФ: $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$

Примеры

$$AB \vee C$$

$$A \cdot (B \vee C)$$

$$\overline{A}$$

$$A \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee C}$$

$$\overline{A} \cdot C$$

$$A\overline{B}C \vee B\overline{C} \vee \overline{A}$$

Теорема

Любое высказывание приводимо к ДНФ.

Схема приведения высказывания к ДНФ

1) Избавиться от импликации и эквивалентности, используя законы 16), 17)
2) Донести отрицания до переменных, используя законы Моргана.
3) Раскрыть скобки, используя дистрибутивные законы.
4) Упростить полученное высказывание.

Пример

Привести высказывание к ДНФ

$$F = AC \to \overline{B} \leftrightarrow A \to C\overline{B} =$$

$$= \overline{AC} \vee \overline{B} \leftrightarrow \overline{A} \vee C\overline{B} =$$

$$= \left(\overline{AC} \vee \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee C\overline{B}\right) \vee \overline{\overline{AC} \vee \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \vee C\overline{B}} =$$

$$= \left(\overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee C\overline{B}\right) \vee ACB \cdot A\overline{C\overline{B}} =$$

$$= \left(\overline{A} \vee C\overline{B}(\overline{C} \vee \overline{B})\right) \vee ACB \cdot A(\overline{C} \vee B) =$$

$$= \left(\overline{A} \vee C\overline{B}\overline{C} \vee C\overline{B}\overline{B}\right) \vee ABC\overline{C} \vee ABCB =$$

$$= \overline{A} \vee C\overline{B} \vee ABC =$$

$$= \overline{A} \vee C\overline{B} \vee BC =$$

$$= \overline{A} \vee C(\overline{B} \vee B) =$$

$$= \overline{A} \vee C$$

Построение высказываний по таблице истинности. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ)

Определение 1

Пусть $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – некоторое множество логических переменных. Элементарная конъюнкция, в которую входят все логические переменные, называется *полной элементарной конъюнкцией* относительно множества X .

Пример

$$X = \{A, B, C\}$$

$$A, A\overline{C}, ABC, B\overline{AC}, B\overline{A}C, \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

СДНФ

Определение 2

- Дизъюнктивная нормальная форма называется *совершенной* (СДНФ), если все составляющие ее элементарные конъюнкции являются полными.

Примеры

$$X = \left\{ A, B, C \right\}$$

$$AB \vee B\overline{C}A \vee \overline{B}$$

$$AB\overline{C}$$

$$A\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$\overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{BC}$$

Приведение высказывания к СДНФ

Теорема

Высказывание, не являющееся тождественно ложным, приводимо к СДНФ.

Правило приведения высказывания к СДНФ

- СДНФ содержит столько полных элементарных конъюнкций, сколько единиц в последнем столбце таблице истинности.
- Вид каждой полной элементарной конъюнкции определяется соответствующим набором значений переменных, а именно, если переменная принимает значение 0, то над ней в полной элементарной конъюнкцией ставится отрицание, иначе – отрицание не ставится.

Пример

- Построить по таблице истинности СДНФ

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee ABC$$

Задача

- «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
- - Говорит Мегрэ. Есть новости?
- - Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов.
- Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи.
- Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Затем звонила …
- - Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.»
- Что знал Мегрэ?

Решение задачи

- Пусть
- P=« Франсуа был пьян»
- L=«Франсуа лжет»
- I=«Этьен убийца»
- U=«Убийство произошло после полуночи»
- Тогда получим высказывание

$$(P \to I \vee L)(I \vee \bar{P}U)(U \to I \vee L) = 1$$

$$(\bar{P} \vee I \vee L)(I \vee \bar{P}U)(\bar{U} \vee I \vee L) =$$

$$= I \vee (\bar{P} \vee L)\bar{P}U(\bar{U} \vee L) =$$

$$= I \vee \bar{P}UL$$

- Так как $\bar{P}UL = 0$, то Этьен - убийца

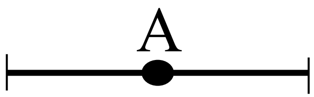
Приложения алгебры высказываний.

Исследование переключательных схем

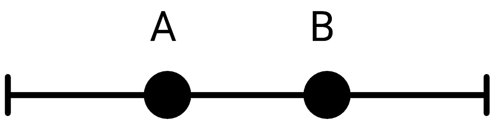
Переключательная схема — это схематическое изображение некоторого устройства, состоящего из переключателей и соединяющих их проводников, а также из входов и выходов, на которые подаётся и с которых снимается электрический сигнал.

Каждый переключатель X имеет только два состояния: замкнутое (X=1) и разомкнутое(X=0). .

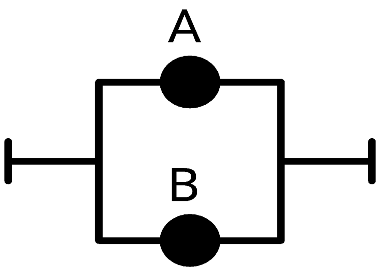
Переключательные схемы



F=A

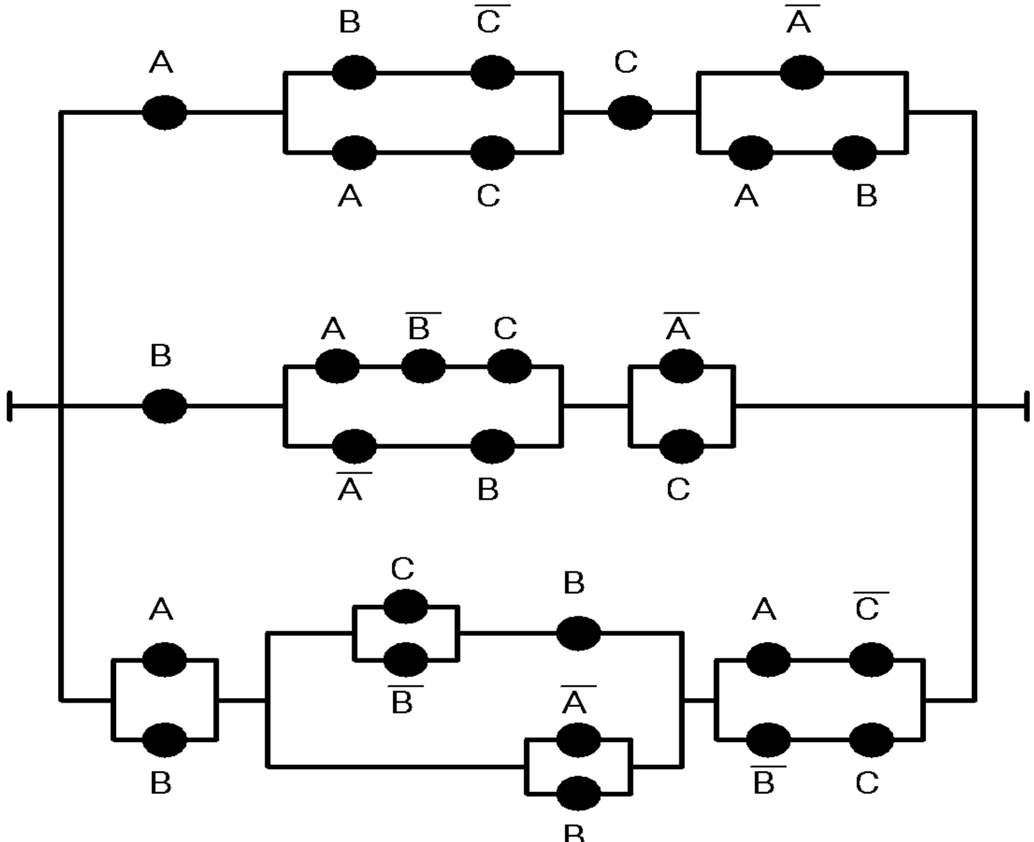


F=AB



$$F = A \vee B$$

Переключательные схемы
Пример 1



$$F = A\left(B\overline{C} \vee AC\right)\cdot C\left(\overline{A} \vee AB\right) \vee B\left(A\overline{B}C \vee \overline{A}B\right)\left(\overline{A} \vee C\right) \vee$$

$$\vee\left(A \vee B\right)\left(\left(C \vee \overline{B}\right)\cdot B \vee \left(\overline{A} \vee B\right)\right)\cdot\left(A\overline{C} \vee \overline{B}C\right).$$

Переключательные схемы. Пример 1

$$F = AC(B\overline{C} \vee AC)(\overline{A} \vee AB) \vee B(A\overline{B}C \vee \overline{A}B)(\overline{A} \vee C) \vee$$

$$\vee (A \vee B)((C \vee \overline{B}) \cdot B \vee (\overline{A} \vee B)) \cdot (A\overline{C} \vee \overline{B}C) =$$

$$= AC(\overline{A} \vee B) \vee \overline{A}B(\overline{A} \vee C) \vee$$

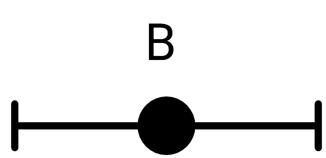
$$\vee (A \vee B)(BC \vee B \vee \overline{A}) \cdot (A\overline{C} \vee \overline{B}C) =$$

$$= ABC \vee \overline{A}B \vee (A \vee B)(B \vee \overline{A})(A\overline{C} \vee \overline{B}C) =$$

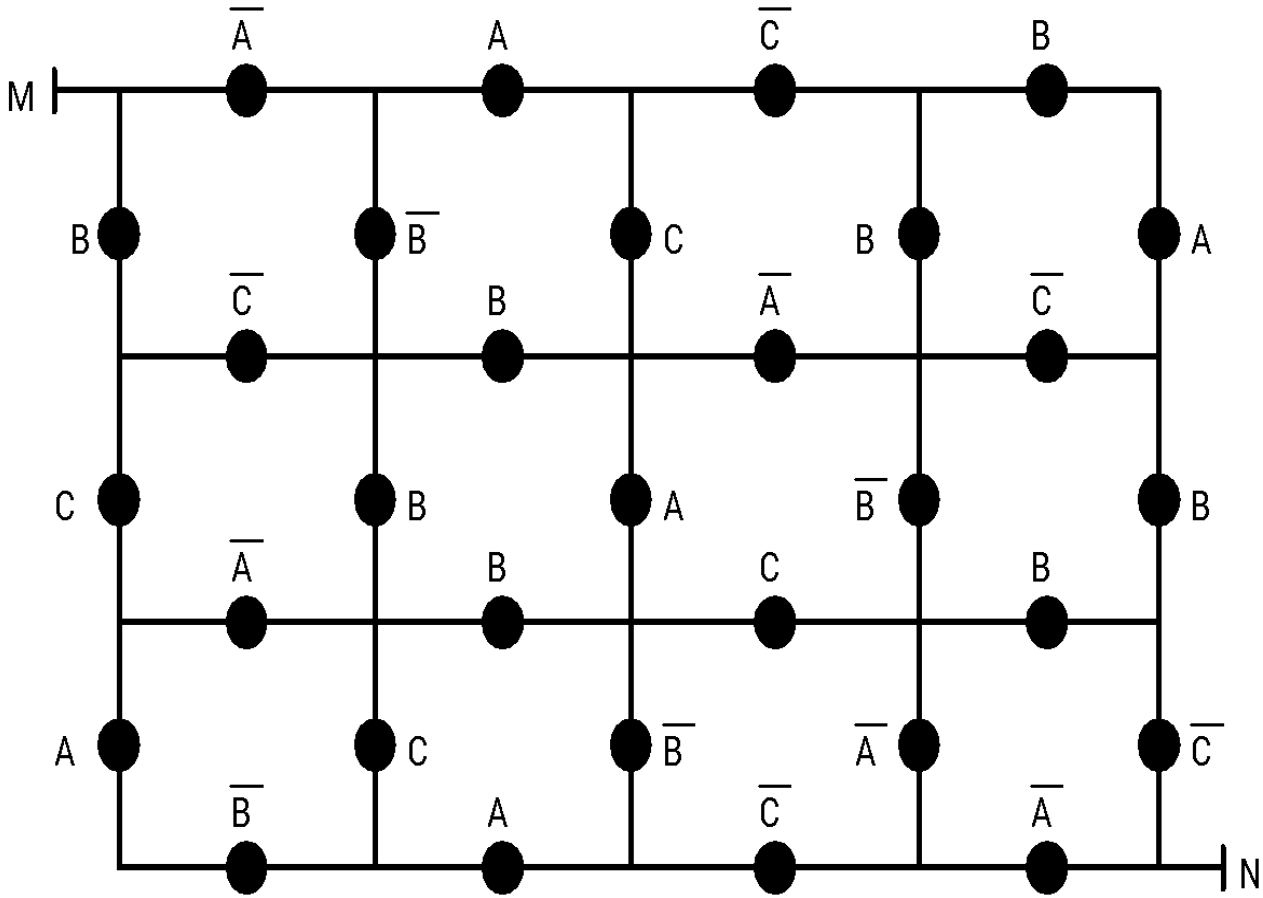
$$= B(AC \vee \overline{A}) \vee B(A\overline{C} \vee \overline{B}C) =$$

$$= B(C \vee \overline{A}) \vee BA\overline{C} = BC \vee \overline{A}B \vee BA\overline{C} =$$

$$= B(C \vee \overline{A} \vee A\overline{C}) = B(C \vee \overline{A} \vee \overline{C}) = B$$



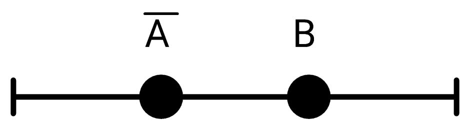
Переключательные схемы. Пример 2



Переключательные схемы.
Пример 2

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$F = \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC = \overline{A}B\left(\overline{C} \vee C\right) = \overline{A}B$$



Задача на голосование

Построить контактную схему для оценки результатов спортивного соревнования тремя судьями при условиях: судья засчитавший результат, нажимает имеющуюся в его распоряжении кнопку, а судья, не засчитывающий результат, кнопки не нажимает. В случае, если кнопки нажали не менее двух судей, загорается лампочка (положительное решение судей принятое большинством голосов).

Задача на голосование

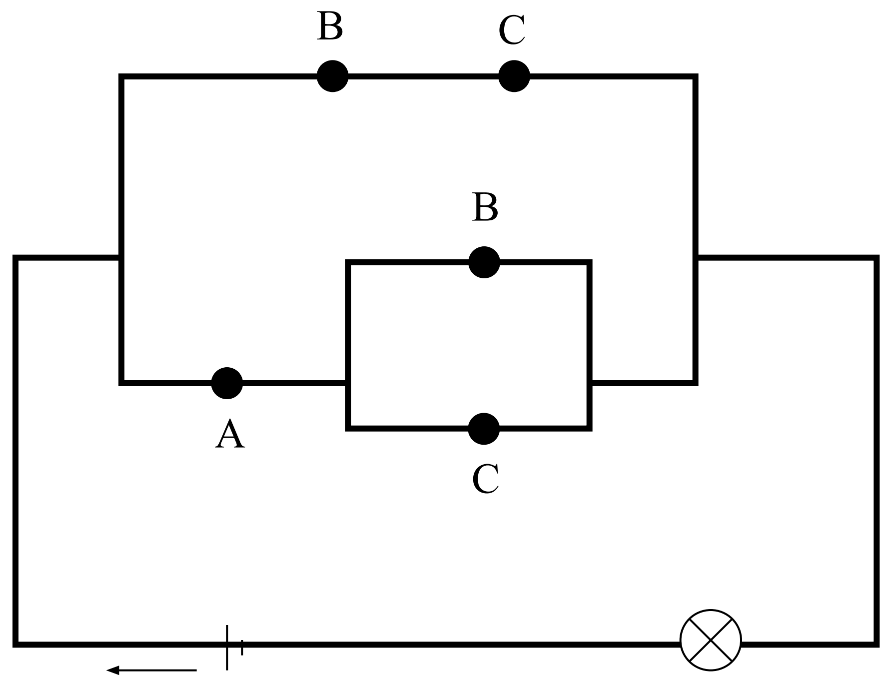
- Решение

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} \vee ABC =$$

$$= \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee AB = \overline{A}BC \vee AC \vee AB =$$

$$= BC \vee AC \vee AB = BC \vee A(B \vee C)$$



Задачи

2. Голосуют три человека A, B, C. Предложение принимается большинством голосов, причём C - председатель, обладающий правом вето, т. е. если он голосует "против", то предложение не принимается

Задачи

- 3. Голосуют три человека A, B, C. Предложение принимается большинством голосов, причём выполняются следующие условия:
- а) если C голосует "за", то B голосует "против";
- б) C голосует "против" тогда и только тогда, когда B голосует "за";
- в) если C голосует "за" или B голосует "за", то A голосует "против";
- г) A и B- коалиция, т. е. голосуют одинаково, а C им противоречит;
- д) C подозревает A и B в коалиции, т. е. если A и B голосуют одинаково, то C им противоречит;
- е) если C голосует "за", то A голосует "за" тогда и только тогда, когда B голосует "против";
- ж) если B голосует "за", то C голосует "против" тогда и только тогда, когда A голосует "против";
- з) если A голосует "за" или B голосует "против", то C голосует "за".