Кафедра математики и моделирования

Емцева Е.Д.

Метод математической индукции

Введение

- Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной.
- Один из наиболее распространенных методов доказательств истинности таких предложений является

  метод математической индукции

Введение

- Вспомним знаменитого Шерлока Холмса. Какой метод рассуждения применялся им при расследовании дел?
- 👍 Правильно, метод дедукции – метод рассуждения, при котором новое положение выводится логическим путем от общих положений к частным выводам.
- А какой метод рассуждений является противоположным дедукции?
- 👍 Верно, индукция – способ рассуждения от частных положений к общим выводам.
- ☺ «Это невозможно!»- скажешь ты, вспомнив тему сегодняшнего урока. Математикам не свойственно делать общие выводы на основании частных случаев. Не спеши огорчаться, математики придумали свою индукцию – математическую, которая не уступает в строгости другим математическим методам.

Метод математической индукции
(1838 г., Британская энциклопедия, де Морган)

- **Огастес - де Мо́рган** (1806-1871) — шотландский математик и логик.

Принцип домино

Метод математической индукции

- Утверждение $P(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной n, если выполняются следующие условия:
- Утверждение $P(1)$ верно;
- Для любого натурального числа k из предположения, что верно $P(k)$, следует, что верно $P(k+1)$.

Схема доказательства ММИ

1. ***база индукции*** (проверка справедливости утверждения $P(1)$);
2. ***индуктивное предположение*** (допущение, что утверждение $P(k)$ верно для любого натурального k);
3. ***индуктивный переход*** (доказательство, что верно утверждение $P(k+1)$ с помощью индуктивного предположения).

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

немецкий математик, астроном, физик, иностранный член-корреспондент (1802), иностранный почетный член (1824) Петербургской АН.

Пример 1

- $1+2+3+\ldots+100=?$
- $1+2+3+\ldots+n=?$

Задача 1

- Доказать, что для любого $n \in N$.

$$-1+3-5+\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n \qquad (1)$$

Задача 2

- Доказать, что для любого $n \in N$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2 \qquad (3)$$

Задача 3

- Доказать , что для любого $n \in N$

$n^3 + 5n$ делится на 6

Задача 4

- Доказать , что для любого $n \in N$

$$7^n + 3n - 1 \text{ делится на } 9$$

Другая формулировка ММИ

- Заметим, что индуктивный процесс не обязан начинаться с 1. В качестве базы индукции может выступать любое целое число a, и тогда формулировка метода математической индукции примет вид.
- Утверждение $P(n)$ считается истинным для всех целых значений переменной $n \geq a$, если выполняются следующие условия:

1. Утверждение $P(n)$ верно при $n = a$;
2. Для любого целого числа $k \geq a$ из справедливости утверждения $P(k)$ следует, что верно и $P(k+1)$.

Задача 5

- Предположить при каких натуральных значениях верно неравенство

$$2^n > n^2 + 1$$

- Доказать ММИ справедливость неравенства, начиная с найденного натурального n.

Задача 6

- Доказать, что при любом натуральном n число

$$\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$$

является натуральным

Задача 7

- Докажите, что число диагоналей любого выпуклого n-угольника равно

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Задача 8

- Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки данной бесконечной таблицы равна квадрату количества чисел в ней:

1

2,3,4

3,4,5,6,7

4,5,6,7,8,9,10

Замечание

- Необходимо отметить, что важно соблюдать всю цепочку индуктивного доказательства.

Пример 2

- Докажем ММИ, что каждое натуральное число равно следующему за ним , таким образом, доказывая, что все натуральные числа равны между собой.
- ***Доказательство.*** Пусть утверждение верно при некотором k , т.е. $k = k + 1$. Покажем, что тогда $k + 1 = k + 2$. Действительно, прибавим к обеим частям единицу $k = k + 1 \Rightarrow k + 1 = k + 2$. Значит, все натуральные числа равны между собой.

Пример 3

- Докажем, что все кошки на земле черные.
- Докажем, что любое конечное общество кошек одного цвета.
- Доказательство поведем индукцией по n - числу кошек в обществе.

Домашнее задание

1. Доказать, что для любого $n \in N$

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

2. Доказать , что для любого $n \in N$ $3^{2n+2}-8n-9$ делится на 16.
3. Доказать, что любую сумму денег, большую 3 рублей, можно разменять только двухрублевыми и пятирублевыми монетами.
4. Доказать неравенство $\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}} < \frac{1 + \sqrt{4c+1}}{2}$

Использование материалов презентации