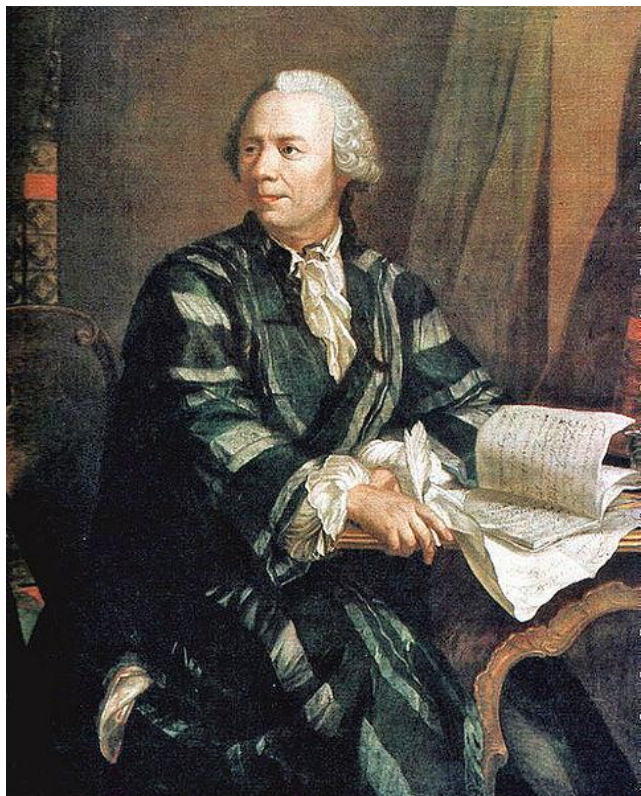


Задачи, приводящие к теории  
графов.

Основные понятия и  
определения.

# Историческая записка



- Леонард Эйлер (1707-1783)- швейцарец по происхождению. Приехал в Санкт-Петербург в 1727 году. Не было такой области математики XVIII века, в которой Эйлер не достиг бы заметных результатов. Например, решая головоломки и развлекательные задачи, Эйлер заложил основы теории графов, ныне широко используемой во многих приложениях математики.
- Напряженная работа повлияла на зрение ученого, в 1766 году он ослеп, но и после этого продолжал работу, диктуя ученикам свои статьи.
- Эйлер умер в 76 лет и был похоронен на Смоленском кладбище Санкт-Петербурга. В 1957 году его прах был перенесен в Александро-Невскую лавру.

# Приложения теории графов

## - Задача о кратчайшей цепи

- составление расписания движения транспортных средств,
- размещение пунктов скорой помощи,
- размещение телефонных станций.

## - Задача о максимальном потоке

- анализ пропускной способности коммуникационной сети
- организация движения в динамической сети
- оптимальный подбор интенсивностей выполнения работ
- задача о распределении работ

## - Задача об упаковках и покрытиях

- оптимизация структуры ПЗУ
- размещение диспетчерских пунктов городской транспортной сети

## - Раскраска в графах

- распределение памяти в ЭВМ
- проектирование сетей телевизионного вещания

## - Связность графов и сетей

- проектирование кратчайшей коммуникационной сети
- синтез структурно-надежной сети циркуляционной связи
- анализ надежности стохастических сетей связи

## - Изоморфизм графов и сетей

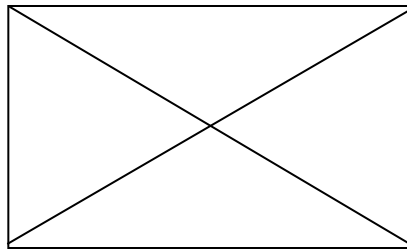
- структурный синтез линейных избирательных цепей
- автоматизация контроля при проектировании БИС
- - Изоморфное вхождение и пересечение графов
- локализация неисправности с помощью алгоритмов поиска МИПГ
- покрытие схемы заданным набором типовых подсхем

## - Автоморфизм графов

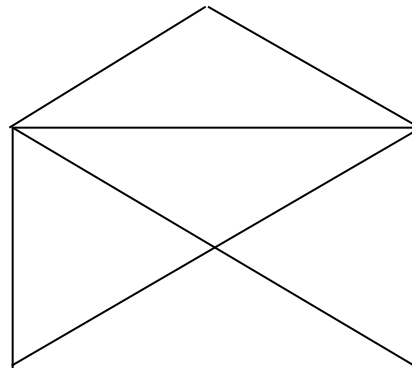
- конструктивное перечисление структурных изомеров для
- производных органических соединений
- синтез тестов цифровых устройств

# Задачи, приводящие к теории графов

- Попробуйте нарисовать закрытый конверт одним росчерком, т.е., не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды один и тот же отрезок.

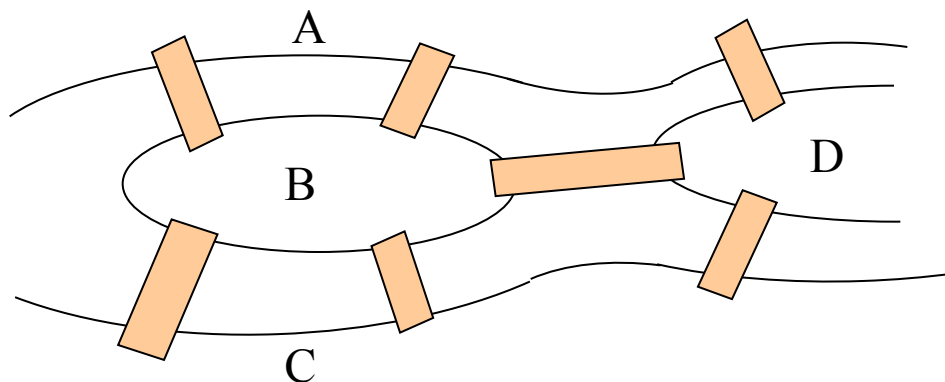


- А если конверт распечатать?

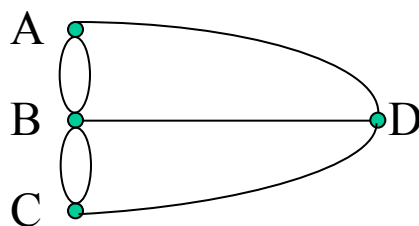


# Задача о Кёнигсбергских мостах

- Впервые над задачей описанного выше типа задумался Леонард Эйлер после посещения города Кенигсберга (ныне Калининград).
- В городе было семь мостов через реку Прегель.

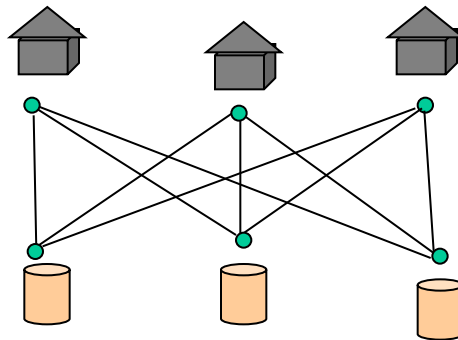


- Гостям города предлагали задачу: пройти по всем мостам ровно один раз. Никому из гостей не удавалось справиться с задачей.
- Эйлер отметил на карте города по одной точке на каждом берегу реки и на каждом острове.
- Затем он соединил эти точки в соответствии с расположением мостов. Задача обхода мостов свелась к задаче изображения одним росчерком следующей картинке



# Задача о трех домах и трех колодцах

- Всегда ли можно изобразить граф на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались? Впервые этот вопрос возник при решении старой головоломки. Вот как ее описывает Льюис Кэрролл.
- В трех домиках жили три человека, неподалеку находилось три колодца: один с водой, другой с маслом, а третий с повидлом. Однако хозяева домиков перессорились и решили провести тропинки от своих домиков к колодцам так, чтобы эти тропинки не пересекались. Первоначальный вариант по этой причине их не устраивал.



# Основные понятия и определения

## Определение 1

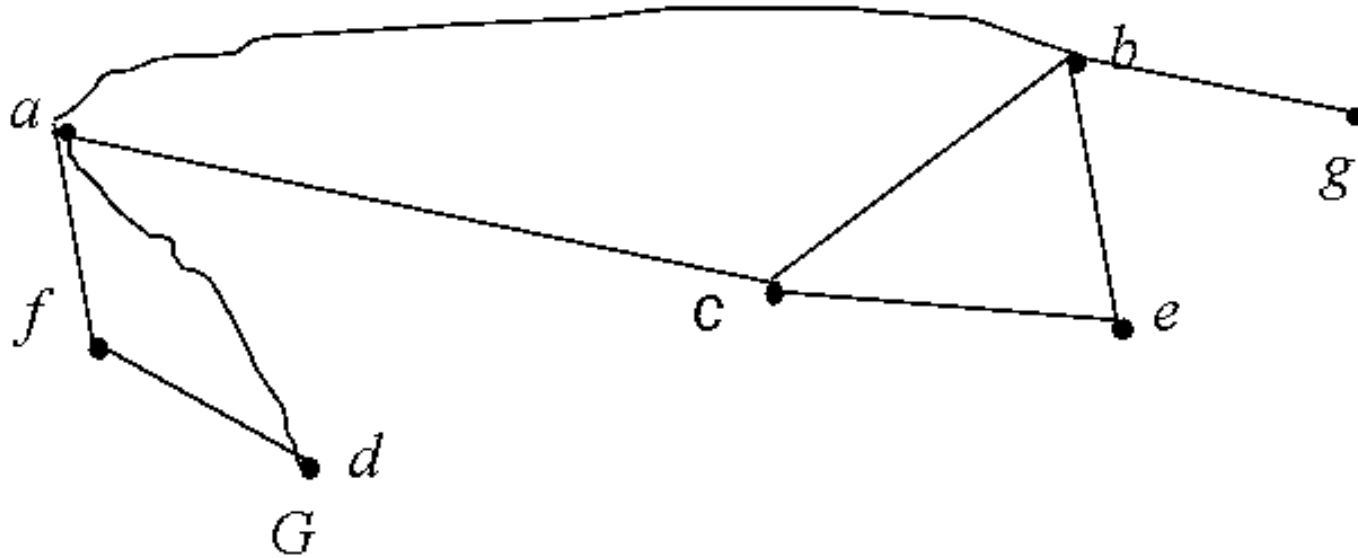
Под графом будем понимать пару  $(V, E)$ , где  $V$  – непустое множество, а  $E$  – произвольное  $V^{(2)}$  ( $E \subseteq V^{(2)}$ ) подмножество множества

Если множество  $V$  конечно, то граф называется конечным, элементы множества  $V$  называются вершинами графа, а элементы множества  $E$  – ребрами графа.

Вершины графа обозначают точками на плоскости, а ребра графа – кривыми на плоскости, соединяющими соответствующие точки. Такие рисунки называют графами.

Множество вершин и ребер графа  $G$  обозначают  $V(G)$  и  $E(G)$  соответственно.

## Пример



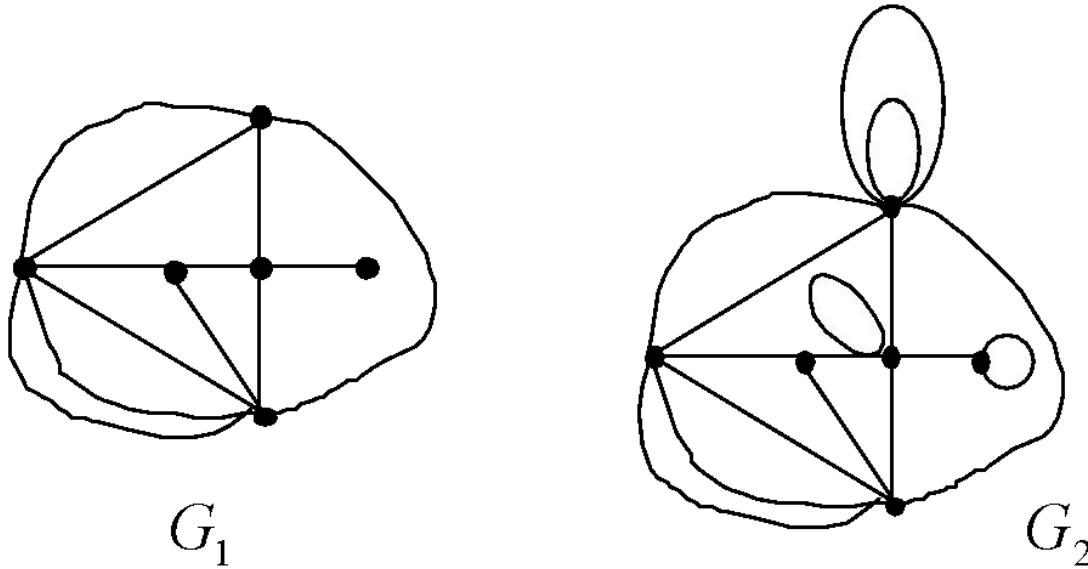
$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}, E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, f), (b, c), (b, g), (b, e), (c, e), (d, f)\}.$$



## Определение 2

- a) Если в графе допускается существование повторяющихся  
(
- a) Если в графе, кроме того, допускается существование петель, т.е. ребер, соединяющих вершину саму с собой, то граф называется псевдографом.

# Пример



$G_1$  - мультиграф,  $G_2$  - псевдограф

### Определение 3

Если мощность множества  $V$  равна  $n$ , то число  $n$  называется порядком графа.

### Определение 4

Если  $V$  равна  $n$ ,  $E$   
равна  $m$ , мощность множества  $(n, m)$  - графа мощность множества

### Определение 5

Две вершины графа называются смежными, если они соединены ребром.

### Определение 6

Два ребра называются смежными, если они выходят из одной вершины.

## Определение 7

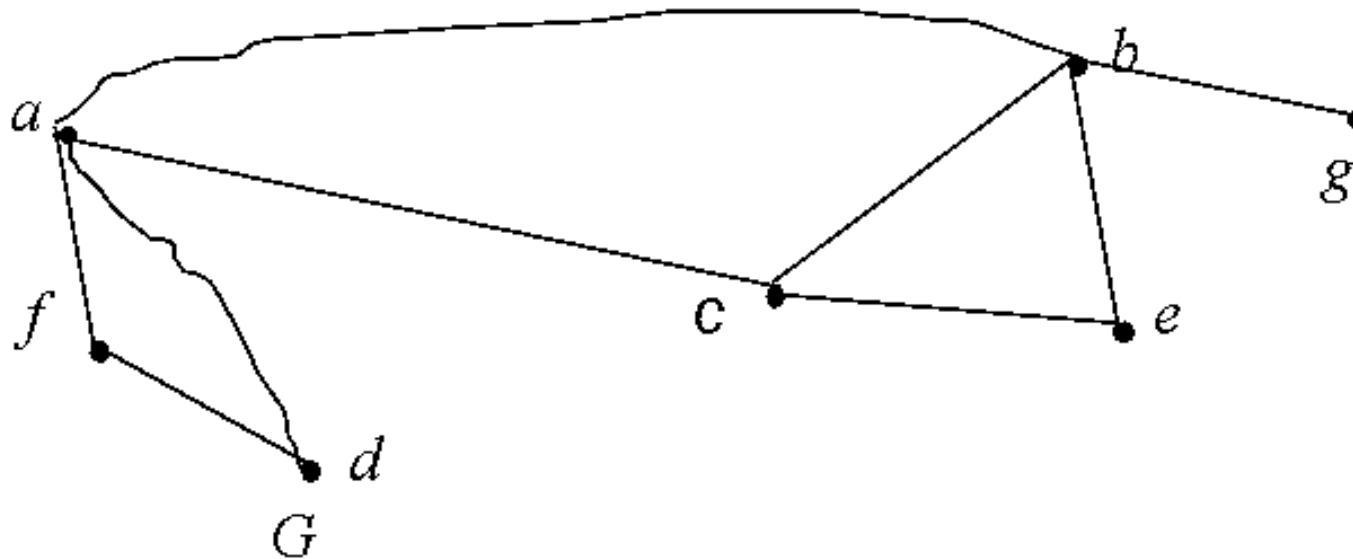
Ребро и вершина называются инцидентными, если данная вершина является концом данного ребра.

## Определение 8

Окружением вершины  $v$  в графе  $G$  называются множество смежных с ней вершин графа  $G$ . Обозначают:  $N_G(v)$ .

Вернемся к примеру.

## Пример



$N(a) = ?$  Смежны ли вершины  $a$  и  $b$ ,  $a$  и  $g$  ?

Смежны ли ребра  $(a, b)$  и  $(a, d)$ ,  $(a, b)$  и  $(c, e)$  ?

Являются ли инцидентными вершина  $f$  и ребро  $(f, d)$  ?

## Определение 9

Граф называется пустым, если в нем нет ребер.

Обозначают:  $O_n$  или  $E_n$  – пустой граф порядка  $n$ .

## Определение 10

Граф называется полным, если любые две его вершины соединены ребром.

Обозначают:  $K_n$  или  $F_n$  – полный граф порядка  $n$ .

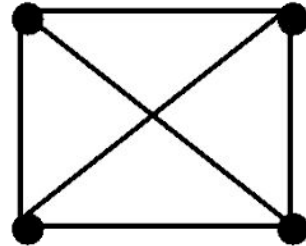
## Определение 11

Два графа  $G$  и  $H$  называются равными, если  $V(G)=V(H)$  и  $E(G)=E(H)$ .

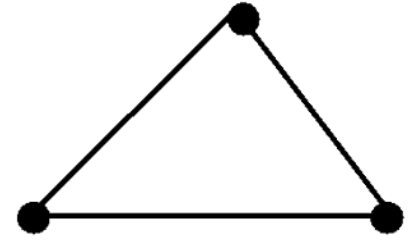
Обозначают:  $G=H$ .

## Пример

$\cdot O_1$       $\cdot \cdot O_2$



$K_4$



$K_3$

## Теорема 12

Число ребер в полном графе порядка  $n$  равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Дополнительные графы.  
Самодополнительные графы



# Дополнительные графы. Самодополнительные графы.

## Определение 1

Пусть дан граф  $G = (V, E)$ .

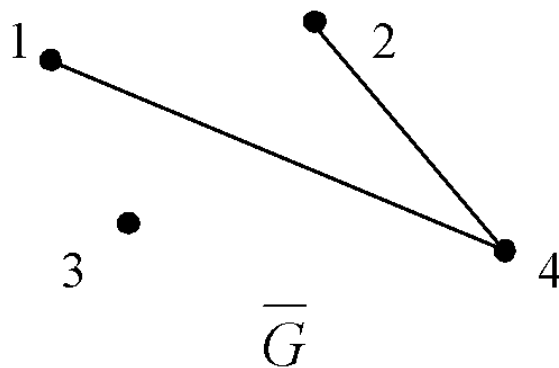
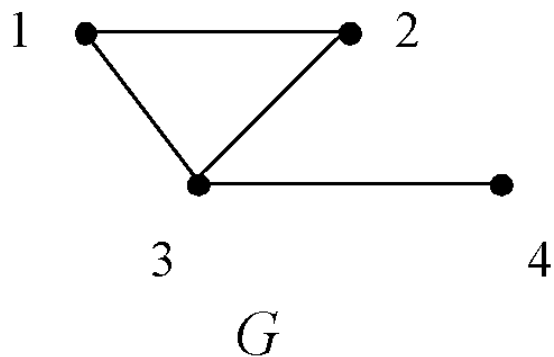
Дополнением графа  $G$

(или дополнительным графом) называется граф

т.е.  $V(\bar{G}) = V(G)$  и любые две несовпадающие вершины смежны в  $\bar{G}$ .

$$\bar{G} = (V, \bar{E}_{V^{(2)}}),$$

## Пример

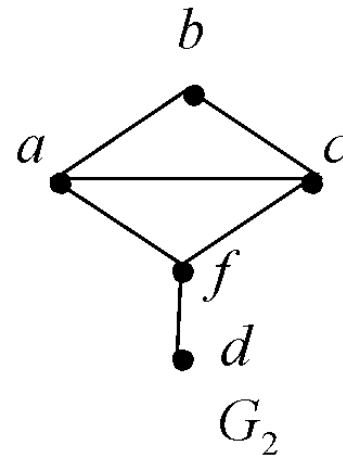
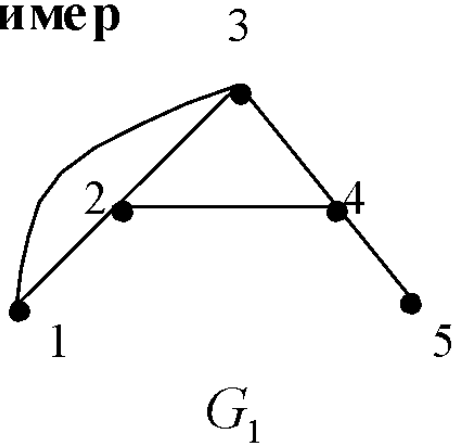


## Определение 2

Два графа называются **изоморфными**, если существует перестановка вершин, при которой графы совпадают. Иначе говоря, два графа называются **изоморфными**, если существует взаимно-однозначное соответствие между их вершинами и рёбрами, которое сохраняет смежность и инцидентность (графы отличаются только названиями своих вершин).

Обозначают:  $G \cong H$  -  $G$  изоморфен  $H$ .

Пример



$$G_1 \cong G_2,$$

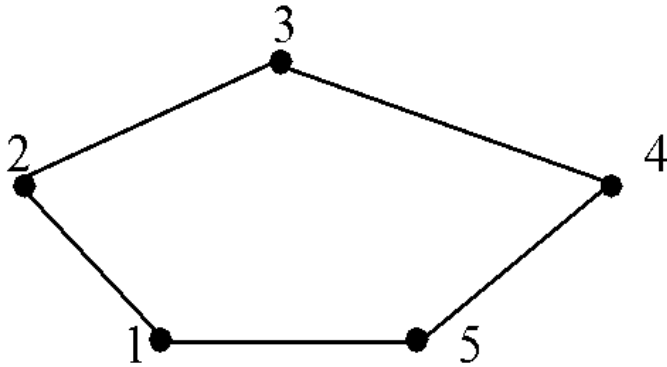
так как существует сохраняющая отношение смежности биекция  $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ .

$$\varphi(1) = b, \varphi(2) = a, \varphi(3) = c, \varphi(4) = f, \varphi(5) = d.$$

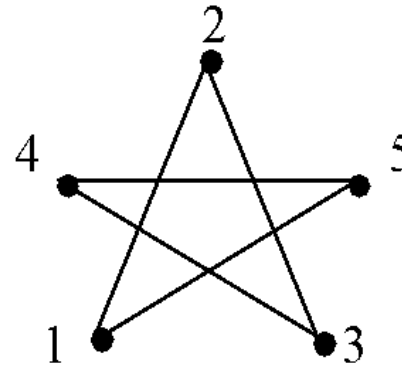
## Определение 3

Граф называется сомодополнительным, если он изоморфен своему дополнению.

Пример



$G$



$\bar{G}$

$G \cong \bar{G}$ ,  $G$ -сомодополнительный.

## Теорема 4

1)  $\overline{\overline{G}} = G$ .

2)  $G \cong H \Leftrightarrow \overline{G} \cong \overline{H}$ .

3) Для любого  $(n, m)$ -графа  $G$ , граф  $\overline{G}$  является  $\left( n, \frac{n(n-1)}{2} - m \right)$ -графом.

4) Если  $G$  — самодополнительный граф порядка  $n$ , то  $G$  является  $\left( n, \frac{n(n-1)}{4} \right)$ -графом.