Лекция 6. Множества

Множества: определение и основные свойства

Множество (по Тьюрингу) – *это объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью.*

Множество (по Кантору) – *это совокупность объектов безразлично какой природы, неизвестно существующих ли, рассматриваемая как единое целое.*

Множества: определение и основные свойства

Множество, которое не имеет ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается Ø.

Единичное множество – множество, все элементы которого тождественны.

Множество M_1 называется ***подмножеством*** множества M тогда и только тогда, когда любой элемент множества M_1 принадлежит множеству M.

Множества называются ***равными***, если они имеют одни и те же элементы.

Подмножество M_1 множества M называется ***собственным*** подмножеством множества M, если M_1 является его подмножеством, но при этом существует хотя бы один элемент, принадлежащий M, но не принадлежащий M_1.

Множества: определение и основные свойства

Пусть A и B – два множества. Множество M=A U B такое, что его каждый элемент принадлежит A или B (а возможно и A и B), называется суммой или ***объединением*** множеств A и B.

Пусть A и B – два множества. Множество M=A ∩ B такое, что его каждый элемент принадлежит и A и B одновременно, называется ***пересечением*** множеств A и B.

Пусть A и B – два множества. Множество M=A \ B такое, что оно состоит из тех элементов множества A, которых нет во множестве B, называется разностью множеств A и B, или ***дополнением*** B до A.

Множества: определение и основные свойства

- Пусть А и В – два множества. Множество М=А × В такое, что оно образовано из всех пар (a, b) таких, что a принадлежит А и b принадлежит В, называется ***декартовым произведением*** множеств А и В.
  Пусть A = {a,b}; B = {m,n}
  Тогда A×B = {(a,m),(a,n),(b,m),(b,n)}
- Пусть А – множество. Множество М, элементами которого являются подмножества множества А, включая само А и пустое множество, называется множеством всех подмножеств множества А или ***булеаном*** А и обозначается P(A). *Пусть A = {a,b,c}*
  Тогда M= P(A)={Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

Множества: определение и основные свойства

- ***Отображением*** f множества A в множество B называется некое правило, по которому каждому элементу множества A ставят в соответствие элемент множества B.
- ***Множество всех отображений*** множества A в B обозначается как B^A (B в степени A).
- *Пусть A = {a,b,c}; B = {m,n}*
  Тогда B^A *это набор функций* f_i

A	$f_1(A)$	$f_2(A)$	$f_3(A)$	$f_4(A)$	$f_5(A)$	$f_6(A)$	$f_7(A)$	$f_8(A)$
a	m	m	m	m	n	n	n	n
b	m	m	n	n	m	m	n	n
c	m	n	m	n	m	n	m	n

Равномощные множества и кардинальные числа

Мощность множества (по Кантору) – *это та общая идея, которая остается у нас, когда мы, мысля об этом множестве, отвлекаемся как от всех свойств его элементов, так и от их порядка.*

Мощность множества – *это характеристика, которая объединяет данное множество с другими множествами, применение процедуры сравнения к которым дает основание предполагать, что каждый элемент одного множества имеет парный элемент из другого множества и наоборот.*

Кардинальное число

Далее мощность будем называть ***кардинальным числом*** множества.

Кардинальные числа некоторых множеств

- Мощность пустого множества равна 0: $|\varnothing|=0$.
- Мощность множества из одного элемента равна 1: $|\{a\}|=1$.
- Если множества равномощны ($A\sim B$), то их кардинальные числа равны: $|A|=|B|$.
- Мощность булеана множества A равна $2^{|A|}$: $|P(A)|=2^{|A|}$
- Мощность множества B^A всех отображений A в B равна $|B|^{|A|}$

Классификация множеств

множество

- **конечное** — множество, состоящее из конечного числа элементов
- **бесконечное** — множество, состоящее из бесконечного числа элементов
  - **счетно-бесконечное** — бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел (его элементы можно пронумеровать натуральными числами)
  - **несчетное** — бесконечное множество, не равномощное множеству натуральных чисел

Для обозначения мощности конечных множеств используются **натуральные числа**

Для обозначения мощности бесконечных множеств используются **трансфинитные числа**

Алеф-нуль $\aleph_0$ – первое трансфинитное число. По определению – это мощность множества всех натуральных чисел. Это наименьшая бесконечная мощность

Свойства множеств

Множество А={ 1, 2 }

Подмножества множества А:={ ∅ , {1 }, { 2 }, {1 , 2} }

Из них собственные подмножества множества А:={ ∅ , {1}, {2} }

Конечное множество → конечное множество не равномощно никакому своему собственному подмножеству

Бесконечное множество → бесконечное собственное подмножество бесконечного множества ***может быть*** равномощно самому множеству

парадоксы

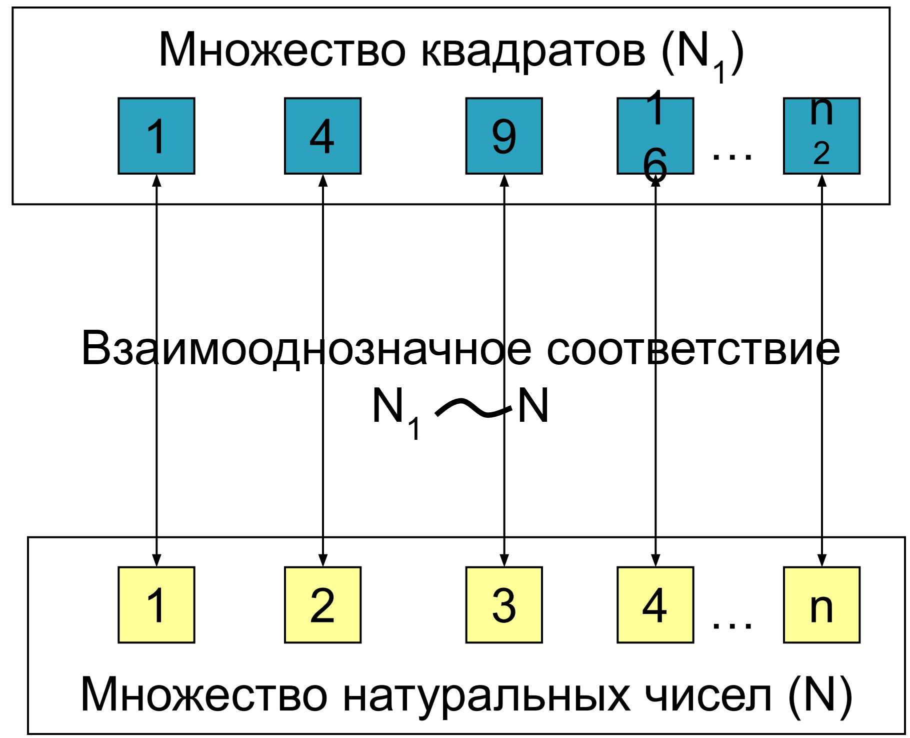
Галилея

Гильберта

Парадокс Галилея

Хотя большинство натуральных чисел не является квадратами, всех натуральных чисел не больше, чем квадратов

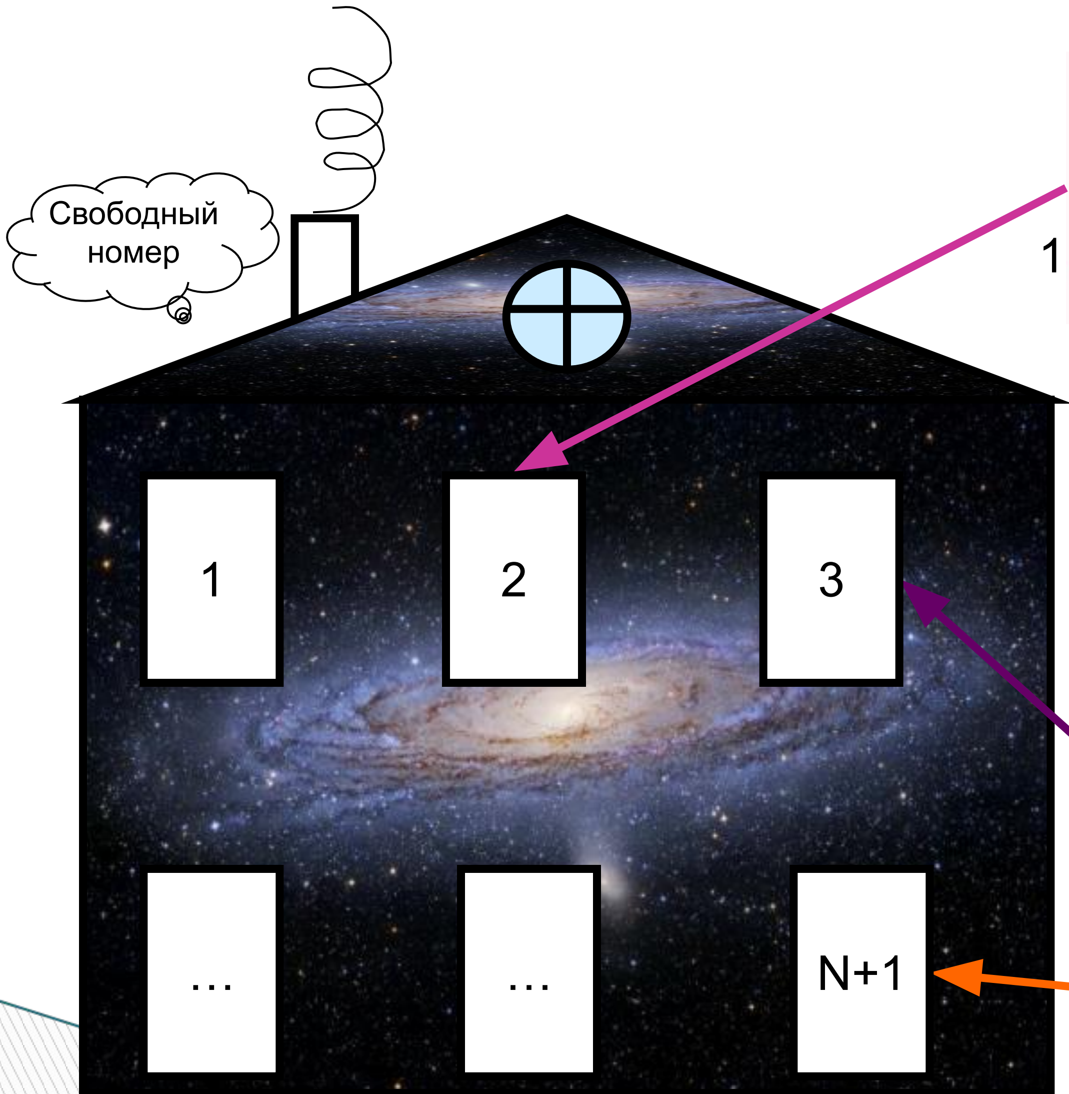
(если сравнивать эти множества по мощности)



N_1 - собственное подмножество N: $N_1 \subset N$

при этом их мощности равны: $|N_1|=|N|$

Парадокс Гильберта



Если гостиница с бесконечным количеством номеров полностью заполнена, в неё можно поселить ещё посетителей, даже бесконечное число.

(В оригинальной версии под термином «бесконечное» имеется ввиду «счетно-бесконечное число» посетителей)

https://www.youtube.com/watch?v=Xl7DhCUI2eo