# <u>Инвариантность систем</u>

***Инвариант*** *– отображение φ рассматриваемой совокупности M математических объектов, снабженной* ***фиксированным отношением эквивалентности ρ****, в другую совокупность N математических объектов, постоянное на классах эквивалентности M по ρ.*
***Концепция инвариант*** *является одной из важнейших в математике, поскольку изучение инварианта непосредственно связано с* ***задачами классификации объектов того или иного типа.***

*Пример:* ***ранг*** *– инвариант квадратичной формы.*

***<u>Проблема инвариантности.</u>***

*<u>Это проблема определения таких структур и параметров систем управления, при которых влияние некоторых произвольно меняющихся внешних воздействий и собственных параметров системы на динамические характеристики процессов управления могут быть частично или полностью компенсированы.</u>*

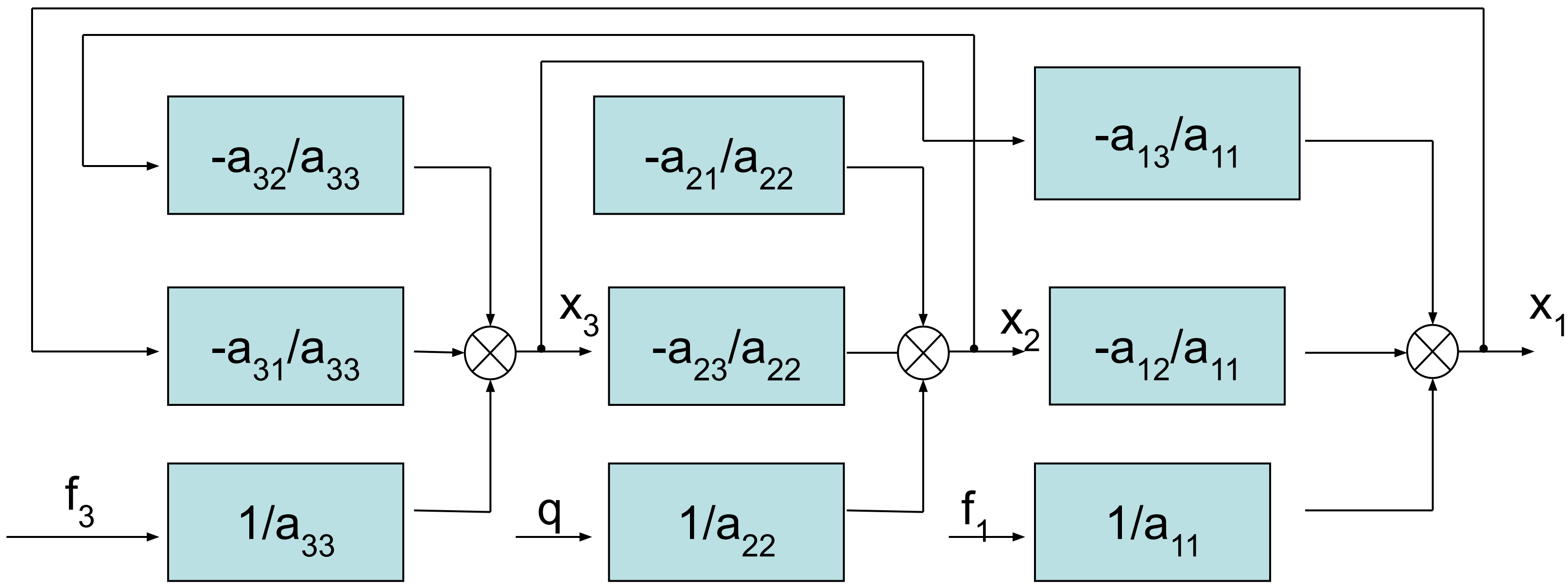
Более простая постановка – требуется сделать по возможности **независимой ту или иную переменную (обобщенную координату) от одного или нескольких внешних воздействий.**
В 1938 г. – *идея инвариантности была высказана Т.В.Щипановым*, а *достаточные и необходимые условия сформулированы Н.Н.Лузиным.*

Рассмотрим **линейную стационарную систему с тремя степенями свободы**, состоящую из
- объекта регулирования с регулируемой координатой $x_1(t)$;
- регулятора с двумя обобщенными координатами $x_2(t)$ и $x_3(t)$.

$a_{11}x_1(t)+ a_{12}x_2(t)+ a_{13}x_3(t)=f_1(t)$ – возмущенное воздействие на объект
$a_{21}x_1(t)+ a_{22}x_2(t)+ a_{23}x_3(t)=g(t)$ – управляющее воздействие
$a_{31}x_1(t)+ a_{32}x_2(t)+ a_{33}x_3(t)=f_3(t)$ – возмущение на регулятор
$a_{ij}=m_{ij}p^2+l_{ij}p+r_{ij}$, где ; i,j=1, 2, 3
p = d/dt

**Допустим**, что функция удовлетворяет **требованиям оригинала**, и перейдем от дифференциальных уравнений к уравнениям алгебраическим с помощью преобразования Лапласа.

# Структура системы




$$x_1 = f_1 \frac{1}{a_{11}} + x_2(-\frac{a_{12}}{a_{11}}) + x_3(-\frac{a_{13}}{a_{11}})$$

$$x_2 = g \frac{1}{a_{22}} + x_1(-\frac{a_{21}}{a_{22}}) + x_3(-\frac{a_{23}}{a_{22}})$$

$$x_1 = f_3 \frac{1}{a_{33}} + x_1(-\frac{a_{31}}{a_{33}}) + x_2(-\frac{a_{32}}{a_{33}})$$

Упорядоченность системы заключается в том, что *порядковый номер уравнения соответствует номеру обобщенной координаты, для которой это уравнение составлено.*

Поэтому ***элементы главной диагонали операторной матрицы (p) представляют собой собственные (характеристические) операторы каждой из обобщенных координат схемы.***

*Остальные операторы отражают воздействие одних обобщенных координат на другие.*

Найдем условие, при котором регулируемая координата $x_1(t)$ не будет зависеть от внешнего воздействия $f_1(t)$.

От оригиналов перейдем к лапласовым изображениям переменных, учитывая начальные условия в виде

$$x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0)...$$

$$a_{11}(S)x_1(S)+ a_{12}(S)x_2(S)+ a_{13}(S)x_3(S)=F_1(S)+r_1(S)$$
$$a_{21}(S)x_1(S)+ a_{22}(S)x_2(S)+ a_{23}(S)x_3(S)=G(S)+r_2(S)$$
$$a_{31}(S)x_1(S)+ a_{32}(S)x_2(S)+ a_{33}(S)x_3(S)=F_3(S)+r_3(S)$$

где $r_1,r_2,r_3$ (S) определяются начальными условиями и согласно исходному уравнению имеет вид

$$r_1(S) = m_1[x_1(0)s + \dot{x}_1(0)] + l_{11}x_1(0) + m_2[x_2(0)s + \dot{x}_2(0)] + ...$$

Решаем систему относительно $x_1(S)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot x_1(S) = \begin{vmatrix} F_1 + r_1 & a_{12} & a_{13} \\ G + r_2 & a_{22} & a_{23} \\ F_3 + r_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$Раскрывая \quad определитель \quad третьего \quad порядка, запишем$$

$$\left\{ a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} x_1 =$$

$$= (F_1 + r_1) \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{=\Delta 11} - (G + r_2) \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{=\Delta 21} + (F + r_3) \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{=\Delta 31}$$

Условие инвариантности, при котором $x_1(t)$ не будет зависеть от возмущения $f_1(t)$ (полученное Щипачевым)

$$\Delta_{11}(S) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{Итак}$$

$$(a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31})x_1 = (G + r_2)\Delta_{21} + (F_3 + r_3)\Delta_{31}$$

*Перейдя к Лапласову преобразованию для* $x_1(S)$

*при выполнении условий инвариант. по* $f_1(t)$

$$x_1(S) = \frac{(G(S) + r_2(S))\Delta_{21}(S) + (F_3(S) + r_3(S))\Delta_{31}(S)}{a_{21}(S)\Delta_{21}(S) + a_{31}(S)\Delta_{31}(S)}$$

*видим, что оказывается исключается только компонента,*

*вызываемая действием* $f_1(t)$

Теперь положим, что g(t) = 0, $f_3(t) = 0$ и все начальные условия нулевые. Рассмотрим только влияние $f_1(t)$ . Очевидно, что ***при удовлетворении для координаты $x_1(t)$ условий <u>абсолютной инвариантности</u> все члены вида $a_{i1}(s)x_1(s) = 0$ при всех $i \neq 1$, а это эквивалентно размыканию системы на выходе элемента, поведение которого характеризуется координатой $x_1(t)$.***

$$\begin{aligned}
&a_{11}(S)x_1(S) + a_{12}(S)x_2(S) + a_{13}(S)x_3(S) = F_1(S)\\
&0 \qquad\qquad\quad + a_{22}(S)x_2(S) + a_{23}(S)x_3(S) = 0\\
&0 \qquad\qquad\quad + a_{32}(S)x_2(S) + a_{33}(S)x_3(S) = 0
\end{aligned}$$

Из уравнений следует, что
$$x_1(S) = \frac{\Delta_{11}(S)}{\Delta p(S)} \cdot F_1(S)$$

$\Delta p(S)$ - характеристический определитель разомкнутой системы по координате $x_i(t)$

$\Delta p(S) = a_{11}(S) \cdot \Delta_{11}(S)$, т.е. при соблюдении условий абсолют. инвар. ( $\Delta_{11}(S) = 0$) матрица системы разомкнутой по $x_1(t)$ оказывается особой и следовательно при $f_1(t)$ поведение $x_1(t)$ будет описываться особым решением

$$x_1(S) = \frac{1}{a_{11}(S)} F_1(S) \neq 0$$

Но тогда оказывается, что $x_1(S)$ зависит от $F(S)$, т.е. реализация абс. инвар. оказалась невозможной. *Это объясняется тем, что в системе имеется лишь один канал распространения сигнала от точки приложения воздействия $f_1(t)$ к точке измерения $x_1(t)$ .*

По аналогии рассмотрим реализацию абсолютной инвариант. координаты $x_1$ от $f_3(t)$.

$$\Delta_{31}(S) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}(S)x_1(S) + a_{12}(S)x_2(S) + a_{13}(S)x_3(S) = 0$$
$$0 \quad + a_{22}(S)x_2(S) + a_{23}(S)x_3(S) = 0$$
$$0 \quad + a_{32}(S)x_2(S) + a_{33}(S)x_3(S) = F_3(S)$$

$$x_1(S) = \frac{\Delta_{31}(S)}{\Delta p(S)} F_3(S)$$

Но при $\Delta_{31}(S) = 0$ ***характерист. определитель разомкнутой системы $\Delta_p(S)$ не обращается в нуль и система уравнений не становится особой.***

Это происходит (как следует из схемы) благодаря тому, что между $f_3$ и $x_1$ есть два канала, и тогда возможна компенсация. Это условие известно как ***принцип двухканальности*** (Петров).

Это **необходимое условие физической реализуемости абсолютной инвариантности.**

Критерии реализуемости условий абсолютной инвариантности:

***Необходимое условие реализуемости инвариантности переменной $x_i(t)$ по отношению к внешнему воздействию $f_j(t)$ является тождественное совпадение множества решений исходной системы и системы разомкнутой на выходе элемента $x_i(t)$ в точке измерения при выполнении условия инвариантности и равенстве всех остальных воздействий и равенстве начальных условий.***

***Для достижения абс. инвар. некоторой координаты $x_i(t)$ относительно $f_i(t)$ необходимо и достаточно, чтобы передаточная функция между точкой приложения внешней силы и точкой измерения была тождественно равна 0, когда все остальные воздействия отсутствуют и нулевые нач. условия.***

*Для получения абс. инвар. как в разомкнутом, так и в замкнутом состоянии необходимо удовлетворить требование $\Delta_{ij}(S) = 0$, а также потребовать, чтобы $\Delta(S) \neq 0$ для разомкнутой и замкнутой системы.*

Абс. инвар. не может быть реализована в том случае, если матрица системы ДУ в разомкнутом состоянии становится **особой** после учета условий абс. инвариантности.

## Устойчивость движения

Под устойчивостью функционирования сложной системы понимают ***способность системы сохранять требуемые свойства в условиях действий возмущений.***

Рассматривая нелинейные системы вводят понятие устойчивости *«в малом», «в большом», «в целом».*

Система устойчива «в малом», если констатируют ***лишь факт наличия области устойчивости,*** но не определяют каким-либо образом ее границы.

Систему называют устойчивой «в большом», когда определены ***границы области устойчивости, т.е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние.***

Когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных условиях, систему называют ***устойчивой «в целом».***

Устойчивость «в целом» для определенного класса нелинейностей называют **«абсолютной устойчивостью».**

## Постановка задачи.

$$\frac{dy_1}{dt} = Y_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = Y_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \qquad (1)$$

$$y = \bar{y}(0)$$

$y_1 \ldots y_n$ - вещественные переменные, характеризующие состояние системы.

$Y_1 \ldots Y_n$ – известные функции, удовлетворяющие условию существования и единственности решения.

***Невозмущенное движение*** – некоторое вполне определенное движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость. ***Возмущению подвергаются только начальные условия.***

Невозмущенному движению системы отвечает определенное частное решение ДУ (1)

$$y_1 = f_1(t) \dots y_n = f_n(t) \qquad (2)$$

$$-\textit{получили} \quad \textit{такое решение.}$$

$$\textit{При } t = t_0 - \textit{начальное условие}$$

$$y_1 = f_1(t_0) \dots y_n = f_n(t_0) \qquad (3)$$

Дадим начальным значениям некоторое приращение ε

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(t_0) + \varepsilon_n \end{array}\right\} \quad (4)$$

***Движение системы, отвечающие измененным начальным условиям (4), есть возмущенное движение, а $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ - возмущения.***

Обозначим

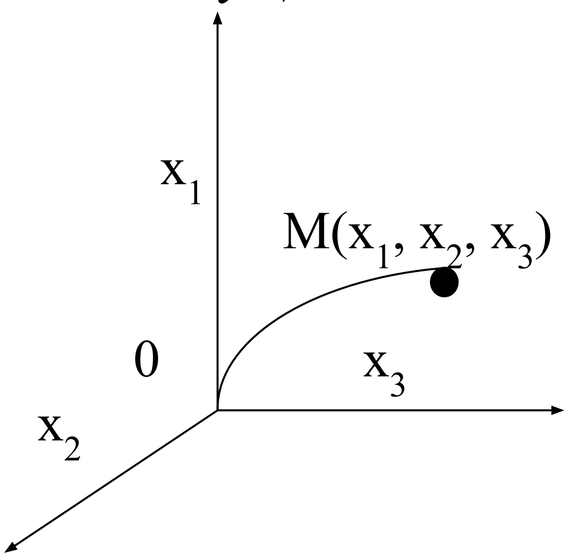
$y_j$ – возмущенное движение;

$f_j$ - невозмущенное движение;

$x_j$ - отклонение или вариация $x_j = y_j(t) - f_j(t)$ $(j = 1 \ldots n)$ (5)

***Если $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$*** ***(6) ,***

***то возмущенное движение совпадает с невозмущенным***




Геометрически можно интерпретировать так: совокупность отклонений в n–мерном пространстве переменных $x_1 \ldots x_n$ определяет точку M (изображающая точка).

В возмущенном движении при изменении в-н

$x_1 \ldots x_n$ , M будет описывать некоторую траекторию.

**Невозмущенному движению $x_j = 0$ отвечает неподвижная точка – начало координат.**

**Мера отклонения:**

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \quad (7)$$

При $t = t_0$ $x_j = x_{0j} = \varepsilon_j$ $(j = 1..n)$, т.е. начальные значения отклонений $x_{oj}$ представляют возмущения системы (8)

# <u>Определение устойчивости движения по Ляпунову</u>.

Если по любому положительному числу ***ε***, как бы оно не было мало, можно найти такое положительное число ***δ***, что при всяких возмущениях $\boldsymbol{x_{0j}}$, удовлетворяющих условию $\sum x_{0j}^2 \le \delta$ (9) и при любых $t \ge 0$ будет определяться неравенство $\sum x_j^2 \le \varepsilon$ (10), то **невозмущенное движение устойчиво**, в противном случае нет.

**<u>Практически устойчивость данного невозмущенного движения означает, что при достаточно малых начальных возмущениях, возмущенное движение будет сколь угодно мало отличаться от невозмущенного.</u>**

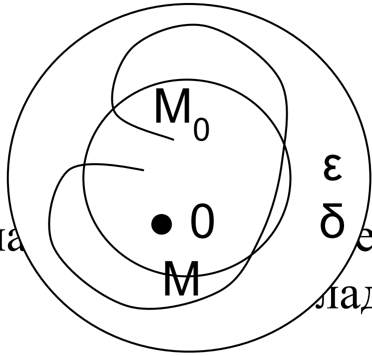
*Если же невозмущенное движение неустойчиво, то возмущенное движение будет отходить от него, как бы малы ни были начальные возмущения.*

Если невозмущенное движение устойчиво и при этом любое возмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях ***<u>стремится к невозмущенному движению,</u>*** т.е $\lim\limits_{t\to\infty}\sum x_j^2(t) = 0$ (11),

то невозмущенное движение называется ***асимптотически устойчивым .***

Рассмотрим сферу

$$\sum x_j^2 = \varepsilon$$




Выберем радиус √ε произвольно малым.

***движение устойчиво***, то для этой сферы должна на ера ,

$$\sum x_j^2 = \delta$$

ладающая следующим свойством.

Изображающая точка ***M***, начав свое движение из любого положения ***M$_0$***, лежащего внутри или на поверхности сферы ***δ***, при своем дальнейшем движении **остается всегда внутри сферы ε, никогда не достигая ее поверхности**.

***Если же невозмущенное движение неустойчиво,*** то хотя бы одна траектория изображающей точки ***M*** с течением времени пересечет сферу ***ε*** изнутри наружу при сколь угодно близком положении точки ***M$_0$*** к началу координат.

Геометрически это означает, что при асимптотической устойчивости ***изображающая точка должна неограниченно стремится к началу координат, не выходя из сферы ε.***

В тех случаях, когда асимптотическая устойчивость имеет место при любых возмущениях (не обязательно малых), ***невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым в целом.***

Иногда устойчивость имеет место не при любых возмущениях, а при возмущениях, подчиненных некоторым условиям. Такая устойчивость называется *условной*.

## *Особенности определения устойчивости по Ляпунову.*

1. Возмущения накладываются только на ***начальные условия***, что физически говорит о том, что ***возмущенное движение происходит при тех же источниках энергии, что и невозмущенное***.

2. Устойчивость рассматривается на ***бесконечно большом интервале времени***.

3. ***Возмущения предполагаются малыми.***

Тем не менее, **методы развитые Ляпуновым лежат в основе исследования других видов устойчивости движения.**

*Существуют два метода Ляпунова:*

1. **Оценка устойчивости по приближенному решению – основан на линеаризации.**

2. **Прямой метод Ляпунова – осуществляется через функцию Ляпунова.**

Составим уравнения возмущенного движения

**$y_j(t) = f_j(t) + x_j(t)$**

Подставим в уравнение (1)

$$\frac{df_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} = Y_j(f_1 + x_1, f_2 + x_2, \ldots, f_n + x_n, t)$$

*Разложим правые части этих уравнений в ряды Тейлора по степеням $x_j$ (предполагается, что фукнции разлагаемые в ряды удовлетворяют соответствующим требованиям)*

$$\frac{df_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} = Y_j(f_1, f_2, \ldots, f_n, t) + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_n}\right)_0 x_n + X_j^*$$

где $X_j^*$ – совокупность членов, зависящих от отклонений $x_i$ в степени выше первой. Учтем, что в невозмущенном движении функции $f_j(t)$ должны удовлетворять уравнению (1), т.е.

$$\frac{df_j}{dt} = Y_j(f_1, f_2, \ldots, f_n, t)$$

Тогда диф. уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\right)_0}_{a_{ji}} x_i + X_j^* \quad j=1\ldots n \quad (12)$$

$$коэф. \quad a_{jk}=\left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_k}\right)_{x=0} \quad (13)$$

в общем случае являются функциями времени, в частности могут быть постоянными.

Если в уравнениях (12) отбросить члены $X_j^*$, то полученные при этом уравнения называются **уравнениями первого приближения.**

$$\frac{dx_j}{dt}=a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n \quad (14)$$

**Ур-ия первого приближения во многих случаях дают верный ответ на вопрос об устойчивости движения,** но иногда заключение, которое можно получить из этих приближенных уравнений ничего общего не имеет с решением исходных уравнений

Пример.

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Умножим первое уравнение на $x_1$, второе на $x_2$ и сложим почленно оба ур-ия:

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = \alpha (x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = \alpha (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}$$

Положим $x_1^2+x_2^2=r^2$ , где r – расстояние от начала координат до изображающей точки. После перехода к новой переменной r имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt} = \alpha r^3 \quad \textit{или} \quad \frac{dr}{dt} = \alpha r^2$$

$$\textit{Интегрируем} \quad \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = \alpha \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow -r^{-1}\Big|_{r_0}^{r} = \alpha t\Big|_{t_0}^{t}$$

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} = \alpha(t - t_0) \quad r_0 = r - rr_0\alpha(t - t_0)$$

$$r = \frac{r_0}{1 - \alpha r_0(t - t_0)}$$

При $\alpha > 0$ r неограниченно возрастает при $t \rightarrow t_0 + 1/\alpha r_0$

[$1 - \alpha r_0(t - t_0) = 0$ $\alpha r_0 t = 1 + \alpha r_0 t_0$ $t = t_0 + 1/\alpha r_0$ , т.е. при $t = t_0 + 1/\alpha r_0$ знаменатель равен 0 и r-неограниченно возрастает], т.е. движение неустойчиво.

Это пример того, что одного предельного условия $\lim\limits_{t \to \infty} r^2 = 0$

***асимптотической устойчивости недостаточно,***

необходимо, чтобы **движение было устойчивым.**

При $\alpha<0$ r монотонно убывает, стремясь к нулю при $t\to\infty$, т.е. движение асимптотически устойчиво.

*Рассмотрим теперь уравнения первого приближения, которые получаются* *<u>отбрасыванием членов порядка выше первого</u>*

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1$$

$$\textit{для этих ур-ий имеем} \quad \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\textit{или, интегрируя,} \quad r = r_0$$

Это решение показывает, что изображающая точка М, отвечающая уравнениям первого приближения, движется по окружности, радиус которой равен начальному отклонению т.М от начала координат. Т.о. из уравнений первого приближения следует устойчивость невозмущенного движения при всех $\alpha$ ($x_1=x_2=0$),

***но этот вывод не совпадает с результатами анализа исходных уравнений.***

## Прямой метод исследования устойчивости

Так называют ***второй метод Ляпунова, который позволяет судить об устойчивости непосредственно по уравнениям возмущенного движения, не прибегая к их интегрированию.***

Уравнения возмущенного движения записываются **в нормальной форме Коши в отклонениях от невозмущенного движения**

$dx_i/dt = X_i(x_1,x_2\ldots x_n)$  $i=1\ldots n$.

Невозмущенному движению при этом соответствует *тривиальное решение,* т. е. $x_1=x_2=..x_n=0$.

***Если $X_i(x_1\ldots x_n)$ представляют собой функции фазовых координат (отклонений), непрерывные в некоторой области $R^n$, содержащей начало координат и имеющей частные производные по всем аргументам, то для анализа устойчивости невозмущенного движения могут быть использованы специальные функции фазовых координат , называемые*** **функциями Ляпунова.**

Прямой метод опирается на известную теорему Лагранжа, согласно которой равновесие устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы минимальна.

*Идея метода состоит в том, чтобы* ***подобрать такую функцию фазовых координат, которая бы в некотором смысле была аналогична потенциальной энергии системы в состоянии покоя.***

Функции Ляпунова обладают **специальными свойствами**.

Это *непрерывные однозначные функции фазовых координат, определенные в области* $R^n$ $\Sigma x_j^2 \leq \mu$ *(15) (* $\mu$*- постоянное положит. число), удовлетворяющие условию* $V(x_1 \ldots x_n)=0$ *при* $x_1=x_2=\ldots x_n=0$ *(16) и имеющие производные по всем аргументам.*

**Цель состоит в том, чтобы, предполагая невозмущенное движение устойчивым, попытаться подобрать такую функцию фазовых координат, которая при любом движении системы *уменьшалась,* т.е dV/dt<0.**

Если в окрестности начала координат функция V кроме нуля может принимать значения *только одного знака,* то она называется **знакопостоянной** (положительной или отрицательной)

**Если знакопостоянная ф-я обращается в нуль только в том случае, когда все** $x_1 \ldots x_n$ **равны нулю, то ф-я V называется знакоопределенной** (определенно-положительная или определенно-отрицательная)

**Знакоопределенная функция** имеет при $x_1=\ldots x_n=0$ экстремум (min для опред.-положит. функции и max для опред.-отриц).

Знакопостоянная функция в начале координат экстремума не имеет, т.к. в окрестности начала координат есть другие точки, в которых V=0.

Пусть V=V(x) непрерывна вместе с производными первого порядка: кроме того предположим, что V(x) знакоопределенная.

Тогда при $x_1 = \ldots x_n = 0$ она будет иметь изолированный. экстремум и все

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \quad j = 1 \ldots . n \quad (17)$$

*Разложим V в ряд Маклорена по степеням $x_1 \ldots x_n$*

$$V = V(0) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)x_k x_j + \ldots \qquad (18)$$

Учитывая (16) и (17), получим

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k}\right)x_k x_j + \ldots \quad (19)$$

Обозначим

$$r_{kj} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k}\right)_0 \quad и \quad r_{kj} = r_{jk} \quad или$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj} x_k x_j + \ldots \qquad (20)$$

Т.о. *разложение знакоопределенной функции V в ряд по степеням $x_1 \ldots x_n$ не содержит членов первой степени, т.е.* ***остается квадратичная форма:***

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj} x_k x_j \qquad (21)$$

Пусть квадратичная форма принимает положительные значения и в нуль обращается только при $x_1 = \ldots x_n = 0$ .

Тогда вне зависимости от членов высшего порядка при достаточно малых по модулю $x_j$ функция V будет принимать тоже положительные значения и в нуль обращается только при $x_1 = \ldots x_n = 0$ .

***Если квадратичная форма (21) определенно – положительна, то и функция будет определенно положительной.***

Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратичной формы (21) и составим из нее n главных диагональных миноров.

$$r = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{vmatrix} \qquad (22)$$

В линейной алгебре доказывается следующий ***критерий Сильвестра***:

**Для того, чтобы квадратичная форма была определенно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы ее коэффициентов были положительны, т.е. $\Delta_1>0,\ \Delta_2>0\ldots\ \Delta_n>0$**

$$\Delta_1 = c_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \qquad (23)$$

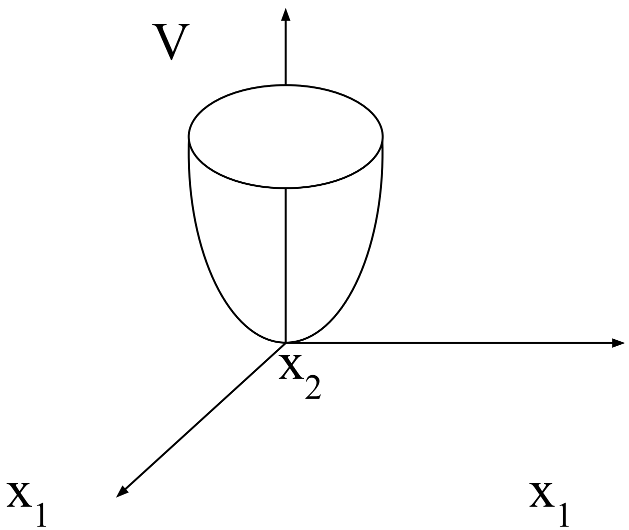
Для того, чтобы квадратичная форма была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$ , т.е. определители должны последовательно чередовать знак, причем знак $\Delta_1=c_{11}$ д.б. отрицательным.

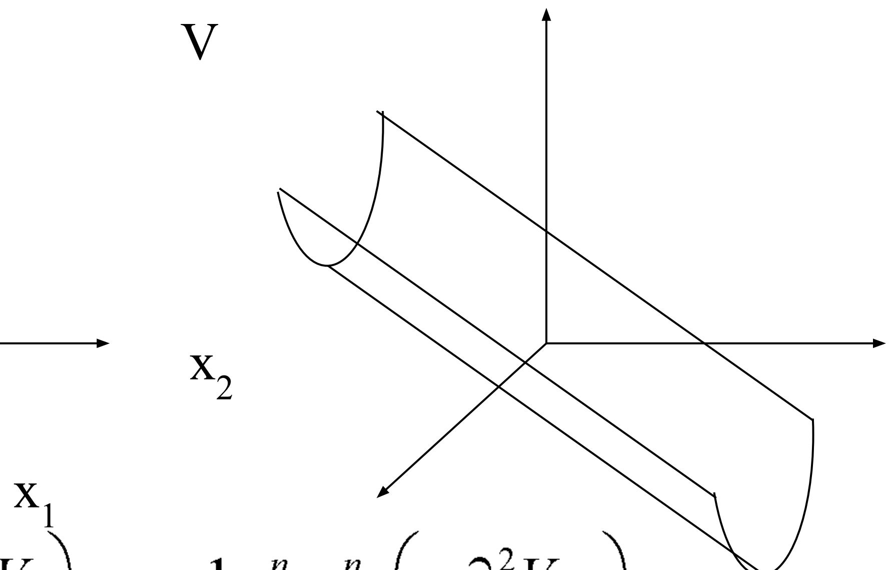
**Критерий Сильвестра для квадратичной части функции V является достаточным (но не необходимым) условием определенной положительности самой функции V.**

Пример.

$$V(x) = 2x_1^2 + 4x_2^4 \qquad\qquad V(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

Знакоопределенная функция Знакопостоянная функция




$$V(x) = V(0) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k}\right)_0 x_j x_k + \ldots + \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} = r_{jk}$$

$$\underbrace{V(x)}_{\textit{квадратичная форма}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_{jk} \cdot x_j x_k$$

*Может оказаться, что разложение знакоопределенной функции V в ряд по степеням $x_1 \dots x_n$ начинается не с членов второго, а с членов более высокого порядка. В этом случае общих приемов исследования функции на знакоопределенность нет.*

**Некоторые св-ва функции V**

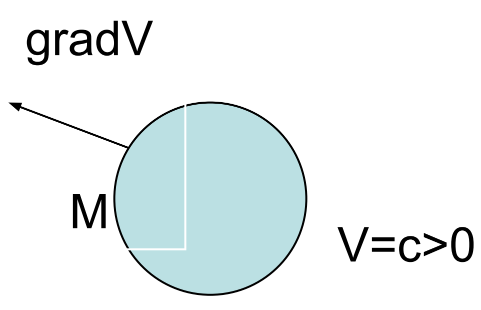
Если функция V знакоопределенная, то поверхность $V(x_1 \dots x_n)$ - замкнута. Выберем на поверхности V(x)=c произвольную точку M и вычислим в этой точке вектор gradV

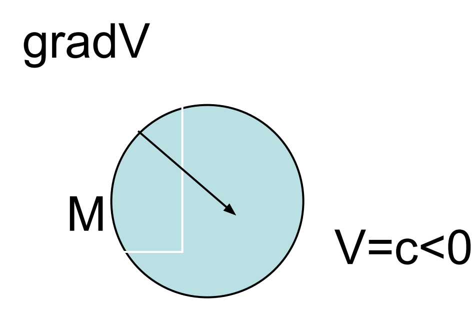
$$gradV = \frac{\partial V}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} e_2 + \dots \frac{\partial V}{\partial x_n} e_n \quad (24)$$

*$e_1 \dots e_n$ - орты осей $x_1 \dots x_n$.*

Известно, что вектор gradV направлен по нормали к поверхности V=c в точке M в сторону возрастания функции V.

Из этого следует, что вектор gradV направлен во внешнюю часть поверхности V=c, если функция V определена положительно и внутрь V=c, если V определена отрицательно.



*Одновременно с функцией V будем рассматривать ее полную производную по времени t, взятую в предположении, что переменные $x_j$ удовлетворяют диф. ур. возмущенного движения* $dx_j/dt=x_j$ (j=1…n) (25)

Имеем

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n \qquad (26)$$

**или с учетом (25)**

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\mathrm{X}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}X_2 + \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}X_n \qquad (27)$$

Напомним, что ***величины $X_j$ равны проекциям скорости U***

изображающей точки M, а производные $\frac{\partial V}{\partial x_j}$ – проекциям *gradV.*

Поэтому правая часть равенства (27) равна скалярному произведению векторов U и gradV , т.е.

$$\dot{V} = U \cdot gradV$$

## Теоремы Ляпунова об устойчивости

1. ***Если при заданных уравнениях возмущенного движения системы можно найти такую <u>знакоопределенную функцию V</u>, полная производная которой является функцией <u>знакопостоянной</u> противоположного знака по отношению к V или тождественно равна нулю, то <u>невозмущенное движение устойчиво.</u>***

2. ***Если при заданных уравнениях возмущенного движения системы можно найти такую <u>знакоопределенную функцию V,</u> полная производная которой по времени в силу этих уравнений является <u>функцией знакоопределенной</u> противоположного знака по отношению к V, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.***

Рассмотренные теоремы Ляпунова дают **достаточные условия устойчивости, т.е. невыполнение этих условий не означает, что невозмущенное движение неустойчиво.** Полнота определения области устойчивости в пр-ве фазовых координат зависит от выбора конкретной функции.

*<u>Полученные условия устойчивости могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам.</u>*

**В нелинейных системах,** в отличие от линейных, возможны случаи, *когда невозмущенное движение устойчиво при «малых» отклонениях от состояния равновесия, и является неустойчивым при больших отклонениях.*

*Если при исследовании не удается подобрать необходимую знакоопределенную функцию и установить с ее помощью факт устойчивости, то это не означает неустойчивость*.

Сложность применения прямого метода исследования устойчивости состоит в том, что **отсутствуют общие методы отыскания функций Ляпунова.**

Пример

Рассмотрим функцию $V=1+\sin^2 x_1-\cos(x_1-x_2)$

Разложим эту функцию по степеням $x_1$ и $x_2$

$\sin^2 x_1 = x_1^2+\dots$ $\qquad\qquad$ $\cos(x_1-x_2)=1-1/2(x_1-x_2)^2+\dots$

$V=1+x_1^2-1+1/2(x_1-x_2)^2+\dots= 1/2(3x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)+\dots$

**Составим матрицу коэффициентов квадратичной части функции V (… обозначены члены выше второй степени). П**о главной диагонали стоят коэф. при квадратах переменных, элементы $c_{12}$, $c_{21}$ равны половине коэф. при произв. $x_1x_2$)

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычислим главный диагональный минор

$$\Delta_1 = 3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

т.к. все $\Delta_j>0$ , то неравенство Сильвестра выполнено и ***рассматриваемая функция V будет определенно-положительной.***

Пример

Вычислим полную производную

$$\dot V = \underbrace{(3x_1 - x_2)}_{\frac{\partial V}{\partial x_1}}\dot x_1 - \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\frac{\partial V}{\partial x_2}}\dot x_2$$

Пусть функция соответствует уравнениям возмущенного движения

$$\dot x_1 = -x_2 + x_1 x_2 - x_1^3 - \frac{1}{2}x_1 x_2^2$$

$$\dot x_2 = -3x_2 + x_1 x_2 + x_1^2 x_2 - \frac{1}{2}x_1 x_2^2$$

$$a \quad V = \frac{1}{2}(3x_1{}^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$\dot V = -3x_1^4 + 2x_1^2 x_2 - 2x_2^2$$

$$\Delta_1 = -3 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

т.е. ***производная V определенно отриц. и движение асимптотически устойчиво***