Теория вероятностей

Случайные величины

Содержание презентации

- Понятие случайной величины.
- Закон распределения ДСВ.
- Операции над случайными величинами.
- Числовые характеристики ДСВ.
  - Математическое ожидание ДСВ
  - Дисперсия ДСВ
  - ССреднее квадратическое отклонение

Понятие случайной величины

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

Решение. Вероятность изготовления бракованной детали
$p = 1 - 0,8 = 0,2$.
Искомые вероятности находим по формуле Бернулли:

$P_5(0)=0,32768$; $P_5(3)=0,0512$;

$P_5(1)=0,4096$; $P_5(4)=0,0064$;

$P_5(2)=0,2048$; $P_5(5)=0,00032$.

Полученные вероятности запишем в виде таблицы:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
P	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

Понятие случайной величины

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

Число появления бракованных деталей можно рассматривать как некоторую переменную (величину), которая в результате испытания случайно может принимать одно из своих значений 0, 1, 2, 3, 4, 5, (какое именно — заранее не известно). Этим значениям соответствую вероятности. Такая величина называется **случайной.**

Понятие случайной величины.

Случайной называют **величину**, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Примеры случайных величин:

1) число родившихся детей в течение суток в г. Ярославле;
2) количество бракованных изделий в данной партии;
3) число произведенных выстрелов до первого попадания;
4) дальность полета артиллерийского снаряда;
5) расход электроэнергии на предприятии за месяц.

Понятие случайной величины

Понятие случайной величины тесно связано с понятием случайного события. Здесь также первичным служит **испытание,** но результат теперь характеризуется не альтернативным исходом (появляется или нет событие), а **некоторым числом** (например, число *k* появлений события в n повторных независимых испытаниях; число очков, выбиваемых стрелком).

Связь со случайным событием заключается в том, что принятие ею некоторого числового значения есть случайное событие, характеризуемое вероятностью p_i.

Понятие случайной величины

Примеры случайных величин:

1. X – число попаданий при 10-ти выстрелах по цели. Значения X: 0,1, 2, 3, …, 10.
2. X – число родившихся мальчиков среди 100 новорожденных. Значения: 0,1, 2, …,99, 100.
3. Интервал времени между моментами прихода автобусов к остановке в пределах от нуля до пяти минут. Значения: [0;5].

В примерах 1) и 2) случайные величины могут принимать конечное число значений – такие величины называются **дискретными**, а в примере 3) – целый промежуток, т.е. бесконечное и несчетное число значений - такие величины называются **непрерывными**.

Понятие случайной величины

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным, но счетным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Закон распределения

Случайные величины будем обозначать прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z,..., а их значения — соответствующими строчными буквами x_i, y_i, z_i,... .

Наиболее полным, исчерпывающим описанием случайной величины является ее **закон распределения**.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Про случайную величину говорят, что она «распределена» по данному закону распределения или «подчинена» этому закону распределения.

Закон распределения

Пример распределения **дискретной** случайной величины

Значения x_i	0	10	50	100	500
Вероятности p_i	0,915	0,05	0,02	0,01	0,005

Примеры распределения **непрерывной** случайной величины

Равномерный закон распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b;\\ 0, x>b.\end{cases}$$

Нормальный закон распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Теория вероятностей

Дискретные случайные величины

Закон распределения

Для **дискретной** случайной величины закон распределения может быть задан в виде *таблицы*, *аналитически* (в виде формулы) и *графически*.

1. В виде таблицы (ряд распределения).

   Ряд распределения -таблица (матрица), в первой строке которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины, а во второй - соответствующие им вероятности, т.е.

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n

Закон распределения

События $X=x_1$, $X=x_2,...,$ $X=x_n$ состоящие в том, что в результате испытания случайная величина X примет соответственно значения x_1, $x_2,...,$ x_n, являются несовместными и единственно возможными (т.к. в таблице перечислены все возможные значения случайной величины), т.е. *образуют полную группу*.

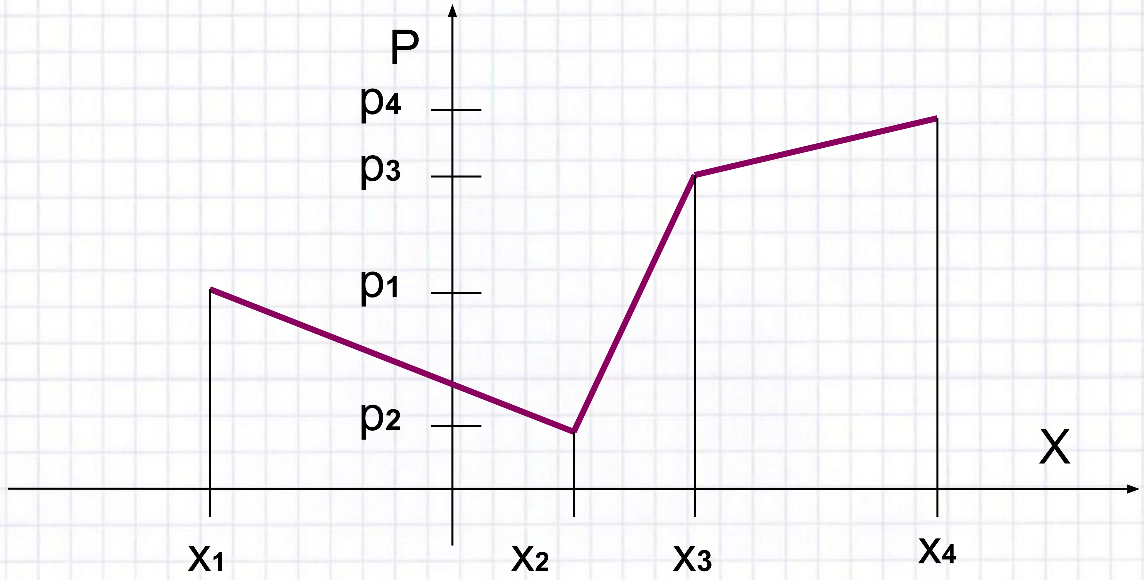
Следовательно, сумма их вероятностей равна 1. Таким образом, для любой дискретной случайной величины

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Закон распределения

2. Графический способ.

   Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником (полигоном) распределения. Для его построения возможные значения x_i случайной величины откладываются по оси абсцисс, а вероятности - по оси ординат; точки с координатами (x_i, p_i) соединяются отрезками



Закон распределения

3. Аналитический способ.

Аналитическим выражением закона распределения может быть, например формула Бернулли (в случае биноминального распределения), формула Пуассона (в случае распределения Пуассона), формула геометрической прогрессии (в случае геометрического распределения) и т.д.

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

$$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p$$

Закон распределения

Пример. Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,8. Найти закон распределения ДСВ X - числа промахов при 5 выстрелах.

Решение.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i						

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Закон распределения

Пример. Найти ряд распределения случайной величины, являющейся частотой выпадения “орла” при трех бросаниях монеты. Построить полигон распределения вероятностей.

Решение.

X - частота выпадения “орла” при трех бросаниях монеты.
Возможные значения частоты X выпадения “орла” следующие: 0,1,2,3.

Соответствующие вероятности нетрудно подсчитать по формуле классической вероятности. Число всех возможных случаев равно 8: (ooo), (oop), (opo), (opp), (poo), (pop), (ppo), (ppp).
$P(X=0)= 1/8$, $P(X=1)= 3/8$, $P(X=2)= 3/8$, $P(X=3)= 1/8$

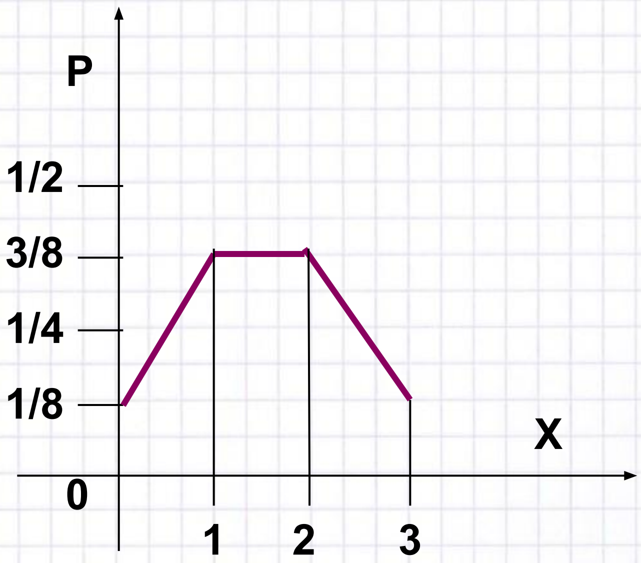
Таким образом, запишем ряд распределения

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Проверка:
1/8+3/8+3/8+1/8 = 1

Закон распределения

Построим многоугольник распределения



x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Теория вероятностей

Операции над ДСВ

Операции над ДСВ

Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

В противном случае случайные величины называются **зависимыми**.

Например, если имеются билеты двух различных денежных лотерей, то случайные величины X и Y, выражающие соответственно выигрыш по каждому билету (в денежных единицах), будут **независимыми**.

Если же случайные величины X и Y выражают выигрыш по билетам одной денежной лотереи, то в этом случае X и Y являются **зависимыми**, ибо любой выигрыш по одному билету (X = xi) приводит к изменению вероятностей выигрыша по другому билету (Y), т.е. к изменению закона распределения Y.

Операции над ДСВ

Пусть дана случайная величина X.

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n

Произведением $k \cdot X$ случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения $k \cdot x_i$ с теми же вероятностями p_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

kx_i	kx_1	kx_2	kx_3	…	kx_{n-1}	kx_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n

Операции над ДСВ

Пример. Пусть дана случайная величина X:

x_i	0	3	4	6
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Найти закон распределения случайной величины Y = 3X

Решение. По определению

y_i	0	9	12	18
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Операции над ДСВ

m-й степенью случайной величины *X*, т.е. X^m, называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями pᵢ (i= 1, 2, ..., n).

x_i^m	x_1^m	x_2^m	x_3^m	…	x_{n-1}^m	x_n^m
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n

Вернемся к предыдущему примеру. Закон распределения ДСВ $Y = X^3$ будет такой:

x_i	0	3	4	6
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

y_i	0	27	64	216
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Операции над ДСВ

Суммой случайных величин X и Y называется случайная величина X+Y, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности возможных значений X+Y для *независимых* величин X и Y равны произведениям вероятностей слагаемых; для *зависимых* величин — произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

y_i	y_1	y_2
$p`_i$	$p`_1$	$p`_2$

$X+Y$	x_1+y_1	x_2+y_1	x_1+y_2	x_2+y_2
p	$p_1p`_1$	$p_2\,p`_1$	$p_1p`_2$	$p_2p`_2$

Операции над ДСВ

X:

x_i	0	3	4	6
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Y:

y_i	-1	2	8
p_i	0,4	0,3	0,3

X^2:

x_i				
p_i				

2Y:

y_i			
p_i			

X^2-2Y:

p													

Операции над ДСВ

Произведением независимых случайных величин X и Y называется случайная величина XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	p_1	p_2	p_3

y_i	y_1	y_2
$p`_i$	$p`_1$	$p`_2$

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_3y_1	x_1y_2	x_2y_2	x_3y_2
p	$p_1p`_1$	$p_2p`_1$	$p_3p`_1$	$p_1p`_2$	$p_2p`_2$	$p_3p`_2$

Операции над ДСВ

X:

x_i	0	3	4	6
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Y:

y_i	-1	2	8
p_i	0,4	0,3	0,3

x_i*y_i	0	0	0	-3	6	24	-4	8	32	-6	12	48
p	0,08	0,06	0,06	0,12	0,09	0,09	0,04	0,03	0,03	0,16	0,12	0,12

X*Y:

x_i*y_i	-6	-4	-3	0	6	8	12	24	32	48
p	0,16	0,04	0,12	0,20	0,09	0,03	0,12	0,0	0,03	0,12

Две ДСВ X и Y заданы своими законами распределения:

x_i	0	2
p_i	0,3	0,7

y_i	-1	3	5
p_i	0,3	0,4	0,3

Найти законы распределения ДСВ $Z=2X-Y$, $W= X^2 \cdot (-3Y)$.

$2x_i$		
p_i		

$-3y_i$			
p_i			

x^2_i		
p_i		

$2X-Y$						
p_i						

$X^2 \cdot (-3Y)$.						
p_i						

Операции над ДСВ

Пример. Две ДСВ X и Y заданы своими законами распределения:

x_i	-1	3	9
p_i	0,2	0,1	0,7

y_i	0	5
p_i	0,6	0,4

Найти законы распределения ДСВ Z=X+2Y, W= Y^2 (-3X).

Решение. Запишем закон распределения для 2Y, Y^2, -3X.

2Y:

$2y_i$	0	10
p_i	0,6	0,4

Y^2 :

y_i^2	0	25
p_i	0,6	0,4

-3X:

$-3x_i$	3	-9	-27
p_i	0,2	0,1	0,7

X+2Y	-1	9	3	13	9	19
p_i	0.12	0.08	0.06	0.04	0.42	0.28

Проверка:
0,12+0,08+0,06+0,04+0,42+0,28=1

Y^2 *(-3X)	0	0	0	75	-225	-675
p_i	0.12	0.06	0.42	0.08	0.04	0.28

Операции над ДСВ

Ответ:

X+2Y:

Z	-1	3	9	13	19
p_i	0.12	0.06	0,5	0.04	0.28

Y^2*(-3X):

W	-675	-225	0	75
p_i	0.28	0.04	0.6	0.08

Теория вероятностей

Числовые характеристики ДСВ

Числовые характеристики ДСВ

Задача. Известны законы распределения случайных величин X и Y — числа очков, выбиваемых 1-м и 2-м стрелками.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0.15	0.11	0.04	0.05	0.04	0.1	0.1	0.04	0.05	0.12	0.2

Y:

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0.01	0.03	0.05	0.09	0.11	0.24	0.21	0.1	0.1	0.04	0.02

Необходимо выяснить, какой из двух стрелков стреляет лучше.

Решение. Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.

Таким средним значением случайной величины является ее **математическое ожидание.**

Математическое ожидание ДСВ

Математическим ожиданием, или средним значением, M(X) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Вероятностный смысл математического ожидания: математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Математическое ожидание ДСВ

Пример. Вычислить M(X) и M(Y) в предыдущей задаче о стрелках.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0.15	0.11	0.04	0.05	0.04	0.1	0.1	0.04	0.05	0.12	0.2

Y:

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0.01	0.03	0.05	0.09	0.11	0.24	0.21	0.1	0.1	0.04	0.02

Решение. По определению математического ожидания:

$M(X)=0\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0{,}11 + 2\cdot 0{,}04 + 3\cdot 0{,}05 + 4\cdot 0{,}04 + 5\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}1 + 7\cdot 0{,}04 + 8\cdot 0{,}05 + 9\cdot 0{,}12 + 10\cdot 0{,}2 = 5{,}36$

$M(Y)=0\cdot 0{,}01 + 1\cdot 0{,}03 + 2\cdot 0{,}05 + 3\cdot 0{,}09 + 4\cdot 0{,}11 + 5\cdot 0{,}24 + 6\cdot 0{,}21 + 7\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}04 + 10\cdot 0{,}02 = 5{,}36$

Ответ: Среднее число выбиваемых очков у двух стрелков одинаковое.

Математическое ожидание ДСВ

Пример. В лотерее разыгрываются:
1 автомобиль стоимостью 5000 ден. ед.,
4 телевизора стоимостью 250 ден. ед.,
5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден. ед.
Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет. Найти математическое ожидание.

Решение. Возможные значения случайной величины X - чистого выигрыша на один билет - равны:
0 - 7 = -7 ден. ед. (если билет не выиграл), 200 - 7 = 193, 250 - 7 = 243, 5000 - 7 = 4993 ден. ед. (если на билет выпал выигрыш соответственно видеомагнитофона, телевизора или автомобиля).

Учитывая, что из 1000 билетов число невыигравших составляет 990, а указанных выигрышей соответственно 5, 4 и 1, и используя классическое определение вероятности, получим:
$P(X=-7) = 990/1000 = 0{,}990;$ $P(X=193) = 5/1000 = 0{,}005;$
$P(X=243) = 4/1000 = 0{,}004;$ $P(X=4993) = 1/1000 = 0{,}001.$

Математическое ожидание ДСВ

P(X=-7) = 990/1000 = 0,990; P(X=193) = 5/1000 = 0,005;
P(X=243) = 4/1000 = 0,004; P(X=4993) = 1/1000 = 0,001.

т.е. ряд распределения X:

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0.99	0.005	0.004	0.001

Найдем математическое ожидание:
M(X) = (-7)·0,990 + 193·0,005 + 243·0,004 + 4993·0,001 = 0,
т.е. средний выигрыш равен нулю.

Математическое ожидание

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $\mathbf{M(C) = C}$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $\mathbf{M(kX) = kM(X)}$.
3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е. $\mathbf{M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)}$.
4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий $\mathbf{M(XY) = M(X) \cdot M(Y)}$.

Математическое ожидание

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 8X - 5XY + 7$, если известно, что $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$.

Решение. Используя свойства 1, 2, 3, 4 математического ожидания, найдем

$M(Z) = M(8X - 5XY + 7) = M(8X) – M(5XY) + M(7) = 8M(X) – 5M(X) \cdot M(Y) + 7 = 8 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 2 + 7 = 24 – 30 + 7 = 1$

Ответ: математическое ожидание случайной величины Z равно 1.

Математическое ожидание

Пример. Даны распределения случайных величин X и Y:

x_i	-1	0
p_i	0,1	0,9

y_i	2	3	5
p_i	0,4	0,5	0,1

Найти математическое ожидание M(Z) случайной величины Z=Y-2X двумя способами:

1. исходя из закона распределения Z;
2. используя свойства математического ожидания.

Убедиться в том, что в условиях данной задачи эти свойства матожидания независимых случайных величин выполняются.

x_i	-1	0
p_i	0,1	0,9

y_i	2	3	5
p_i	0,4	0,5	0,1

$$Z=Y-2X$$

z_i						
p_i						

Математическое ожидание

Пример. В результате обработки данных многолетних наблюдений получены распределения случайных величин X и Y – числа хозяйств в каждом из двух районов области, в которых урожайность яровых зерновых культур может превысить 35 ц/га.

Для первого района:

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Для второго района:

y_i	0	1
p_i	0,2	0,8

Найти математическое ожидание M(Z) случайной величины Z=X+Y двумя способами:

1. исходя из закона распределения Z;
2. используя свойства математического ожидания.

Убедиться в том, что в условиях данной задачи эти свойства матожидания независимых случайных величин выполняются.

Математическое ожидание

Решение.

X:

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Y:

y_i	0	1
p_i	0,2	0,8

1) Найдем закон распределения ДСВ Z=X+Y:

Z:

z_i	1	2	2	3	3	4
p_i	0,02	0,08	0.12	0.48	0.06	0,24

Z:

z_i	1	2	3	4
p_i	0,02	0,2	0.54	0,24

$M(Z) = 1\cdot 0.02 + 2\cdot 0.2 + 3\cdot 0.54 + 4\cdot 0.24 = 3$

2) Вычислим матожидание ДСВ Z=X+Y, используя свойства.

Найдем M(X) и M(Y):

$M(X) = 1\cdot 0.1 + 2\cdot 0.6 + 3\cdot 0.3 = 2.2$

$M(Y) = 0\cdot 0.2 + 1\cdot 0.8 = 0.8$

$M(Z) = M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 2.2 + 0.8 = 3.$

Сравнив значение M(Z), полученное в пункте 1), с соответствующим ему значением, полученное в пункте 2), убеждаемся в том, что матожидания Z, найденные двумя различными способами, совпадают.

Дисперсия

Рассмотрим две ДСВ:

X:

x_i	-0.01	0.01
p_i	0,5	0,5

Y:

y_i	-150	100
p_i	0,4	0,6

Найдем математические ожидания этих величин:

$M(X) = -0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = -0{,}005 + 0{,}005 = 0.$

$M(Y) = -150 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}6 = -60 + 60 = 0$

Математические ожидания обеих величин *одинаковы*, а возможные значения *различны*, причем X имеет возможные значения, близкие к математическому ожиданию, а У - далекие от своего математического ожидания.

Для того чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются, в частности, числовой характеристикой, которую называют **дисперсией**.

Дисперсия

Пусть X - случайная величина и M (X) - ее математическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность X - M(X).

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Пусть закон распределения X известен:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Найдем закон распределения **отклонения:**

X - M(X):

$x_i - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	…	$x_n - M(X)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Дисперсия

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной величины X.

X:

x_i	2	4
p_i	0,2	0,8

Найти закон распределения её отклонения.

Решение. Вычислим математическое ожидание X:

M(X) = 2 ·0,2 + 4 ·0,8 = 0,4 + 3,2 = 3,6.

Найдем возможные значения отклонения:

x_1 – M(X) = 2 – 3,6 = -1,6;

x_2 – M(X) = 4 – 3,6 = 0,4.

Следовательно закон распределения отклонения будет следующим

X – M(X):

x_i – M(X)	-1.6	0.4
p_i	0,2	0,8

Дисперсия

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $\boldsymbol{D(X) = M\,(X - M(X))^2}$.

Пусть случайная величина задана законом распределения:

X:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Найдем закон распределения её отклонения от матожидания:

$X - M(X)$:

$x_i - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	…	$x_n - M(X)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Найдем закон распределения квадрата её отклонения от матожидания:

$(X - M(X))^2$:

$(x_i - M(X))^2$	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	…	$(x_n - M(X))^2$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Дисперсия

Пример. Вычислим дисперсию для ДСВ X из предыдущего примера.

X:

x_i	2	4
p_i	0,2	0,8

X – M(X):

$x_i - M(X)$	-1,6	0,4
p_i	0,2	0,8

$M(X) = 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8 = 0{,}4 + 3{,}2 = 3{,}6.$

$(X - M(X))^2$:

$(x_i - M(X))^2$	2,56	0,16
p_i	0,2	0,8

$D(X) = M(X - M(X))^2 = 2{,}56 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}8 =$
0.64

Ответ: D(X) = 0,64

Вычислить дисперсию для ДСВ Y

y_i	2	3	5
p_i	0,4	0,5	0,1

$(y_i - M(Y))^2$			
$y_i - M(Y)$			
y_i			
p_i	0,4	0,5	0,1

Дисперсия

Формула для вычисления дисперсии.

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) — [M(X)]^2.$$

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

X^2:

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание M (X):

$M(X) = 2 \cdot 0{,}1+3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$

Найдем математические ожидания $M(X^2)$:

$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 +9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3= 13{,}3.$

Искомая дисперсия: $D(X)= M(X^2) — [M(X)]^2 = 13{,}3 – (3{,}5)^2 = 1{,}05.$

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$$

Пример. Найти среднее квадратическое отклонение ДСВ X, заданной законом распределения.

X:

x_i	1	3	6
p_i	0,2	0,6	0,2

X^2:

x_i^2	1	9	36
p_i	0,2	0,6	0,2

Вычислим M(X) и M(X^2):

$M(X) = 1\cdot0,2 + 3\cdot0,6 + 6\cdot0,2 = 3,2.$

$M(X^2) = 1\cdot0,2 + 9\cdot0,6 + 36\cdot0,2 = 12,8.$

$D(X) = M(X^2) – [M(X)]^2 = 12.8 – 3.2^2 = 12.8 – 10,24 = 2,56.$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,56} \approx 1,6$$

Дисперсия

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю:

   $$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

   $$D(kX) = k^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

   $$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

   $$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Пример. Даны две ДСВ X и Y:

X:

x_i	-2	0	4
p_i	0,2	0,4	0,4

Y:

y_i	1	3
p_i	0,3	0,7

Найти матожидание и дисперсию ДСВ Z =X-2Y двумя способами:

1) Исходя из закона распределения Z;
2) Используя свойства матожидания и дисперсии.

Решение. 1) Составим закон распределения Z:

z_i						
p_i						

Числовые характеристики ДСВ

Пример. Даны две ДСВ X и Y:

X:

x_i	1	3
p_i	0,3	0,7

Y:

y_i	-2	0	4
p_i	0,2	0,4	0,4

Найти матожидание и дисперсию ДСВ Z =Y-X двумя способами:

1) Исходя из закона распределения Z;
2) Используя свойства матожидания и дисперсии.

Решение. 1)Составим закон распределения Z:

Z:

z_i	-3	-1	3	-5	-3	1
p_i	0,06	0,12	0,12	0,14	0,28	0,28

Z:

z_i	-5	-3	-1	1	3
p_i	0,14	0,34	0,12	0,28	0,12

M(Z)= -5·0,14 + -3·0,34 + -1·0,28 + 1·0,28 + 3·0,12 = -1,2.

M(Z^2)= 25·0,14 + 9·0,34 + 1·0,28 + 1·0,28 + 9·0,12 = 8,04.

D(Z)= M(Z^2) – (M(Z))^2 =8,04 – (-1,2)^2= 6,6.

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6,6} = 2,569$$

Числовые характеристики ДСВ

X:

x_i	1	3
p_i	0,3	0,7

Y:

y_i	-2	0	4
p_i	0,2	0,4	0,4

2) Z =Y-X. Найдем M(Z) и D(Z), используя свойства этих числовых характеристик.

$M(X)=1\cdot 0,3 + 3\cdot 0,7= 2,4;$ $M(X^2)=1\cdot 0,3 + 9\cdot 0,7 =6,6;$

$D(X)= M(X^2)- (M(X))^2 = 6,6 – 2,4^2 = 0,84.$

$M(Y)=-2\cdot 0,2 + 0\cdot 0,4 + 4\cdot 0,4= 1.2;$ $M(Y^2)=4\cdot 0,2 + 0\cdot 0,4 + 16\cdot 0,4 =7,2;$

$D(Y)= M(Y^2)- (M(Y))^2 = 7,2 – 1,2^2 = 5,76.$

$M(Z) =M(Y-X) = M(Y)-M(X) = 1,2 – 2,4 = -1,2.$

$D(Z) = D(Y-X) = D(Y) + D(X) = 5,76 + 0,84 = 6,6.$

Сравнив значение M(Z) и D(Z), полученные в пункте 1), с соответствующими им значениями, полученными в пункте 2), убеждаемся в том, что числовые характеристики Z, найденные двумя различными способами, совпадают.