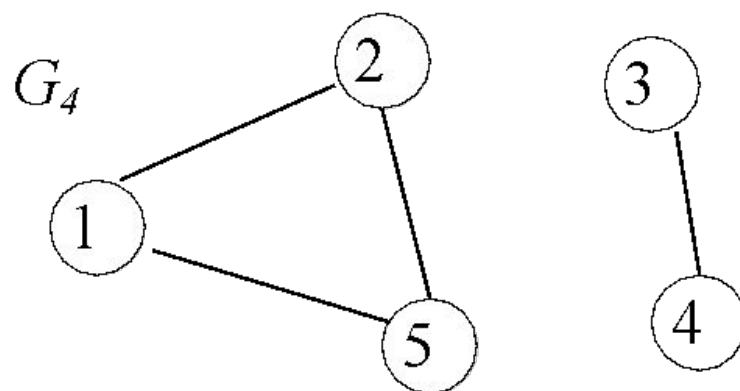
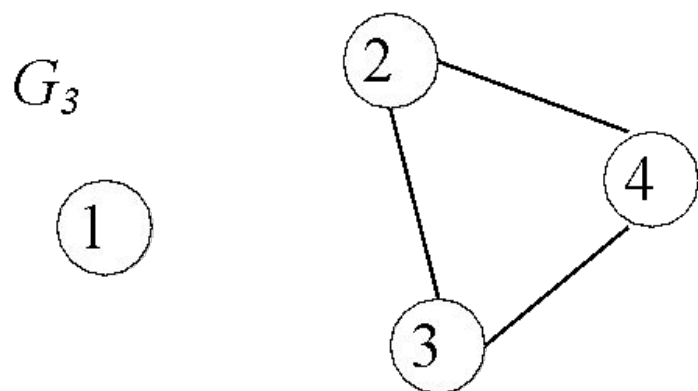
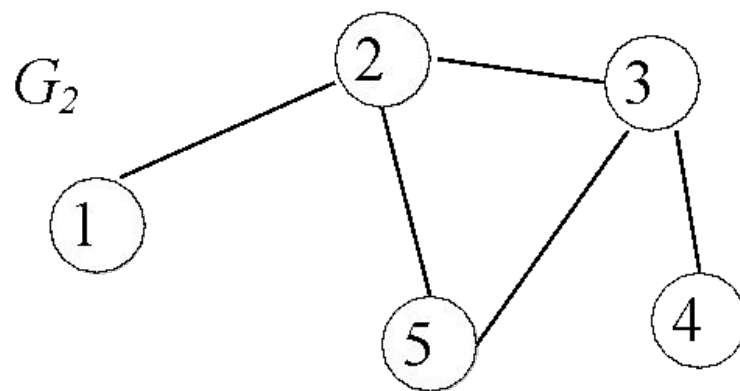
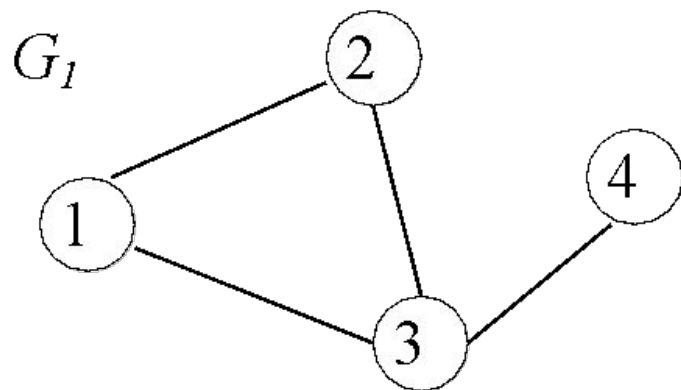


3.5. Связные графы. Компоненты связности

3.5.1. Понятие связности

Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены цепью.

Пример.

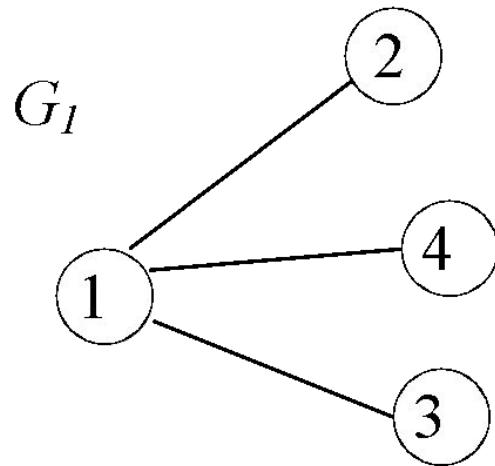


Всякий максимально связный подграф графа G называется *компонентой связности* графа G .

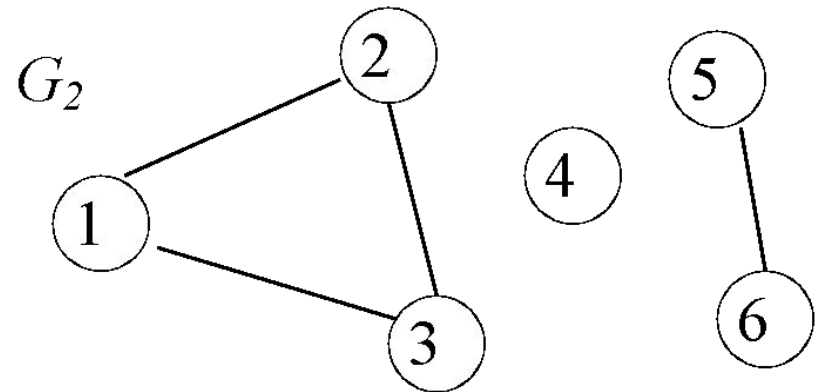
«**максимально**» означает, что он не содержится в связном подграфе с бóльшим числом элементов.

Множество вершин компоненты связности называется *областью связности графа*.

Пример.



Компонента связности
 $\{1, 2, 3, 4\}$



Компоненты связности
 $\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}$

Теорема 3.1. Для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

Теорема 3.2. Пусть G – связный граф, $e \in E_G$. Тогда

1) если ребро e принадлежит какому-нибудь циклу графа G , то граф $G - e$ связен;

2) если ребро e не входит ни в один цикл, то граф $G - e$ имеет ровно две компоненты.

Теорема 3.3. (О числе ребер в графе) Если число компонент связности графа G равно k , то

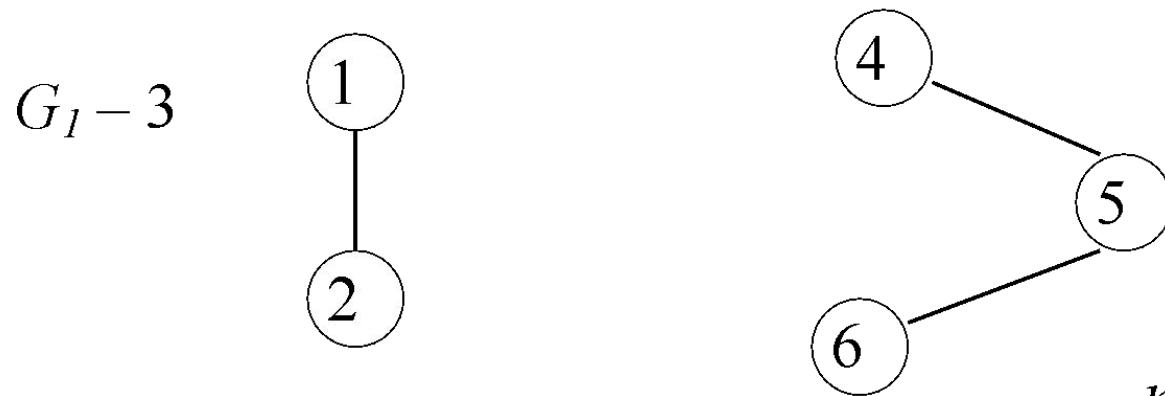
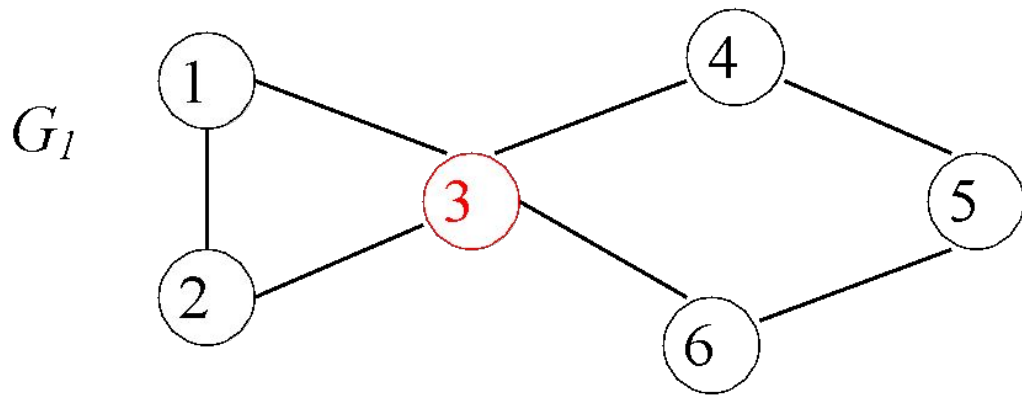
$$n - k \leq m \leq \frac{(n - k)(n - k + 1)}{2}$$

где m – число ребер, n – порядок графа G .

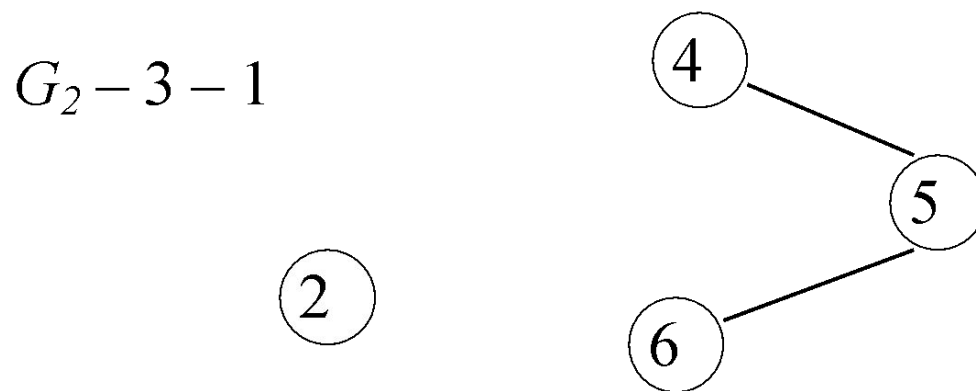
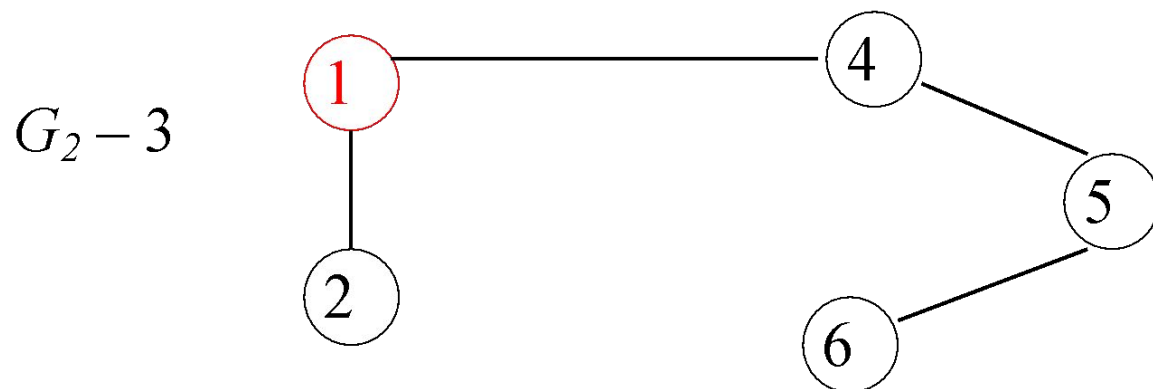
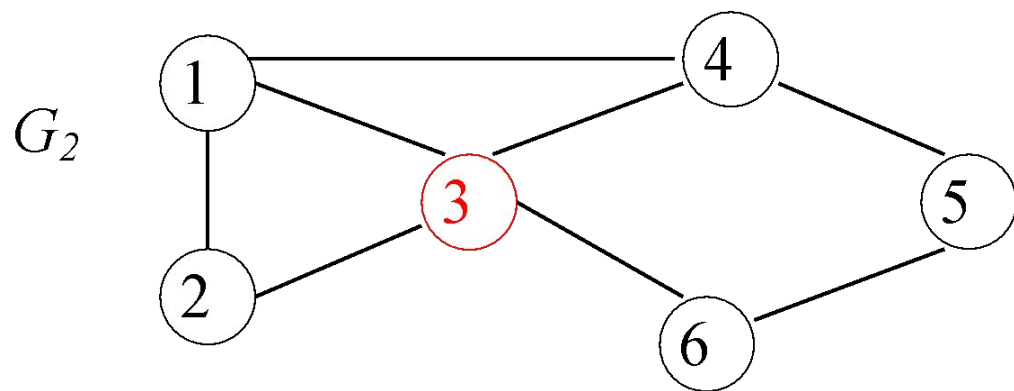
3.5.2. Вершинная и реберная связность

Числом вершинной связности $\kappa(G)$ (каппа) графа G называется **наименьшее число вершин**, удаление которых приводит к **несвязному** или **одновершинному графу**. Если граф **несвязный**, то $\kappa(G) = 0$.

Пример.



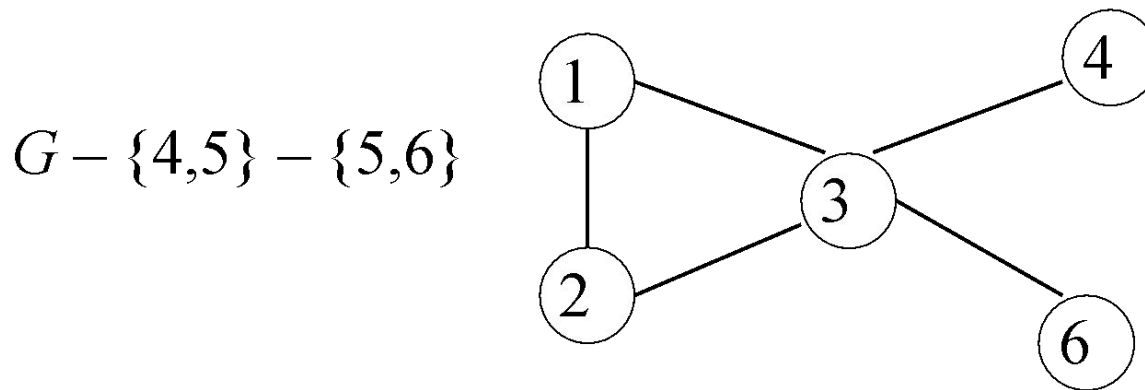
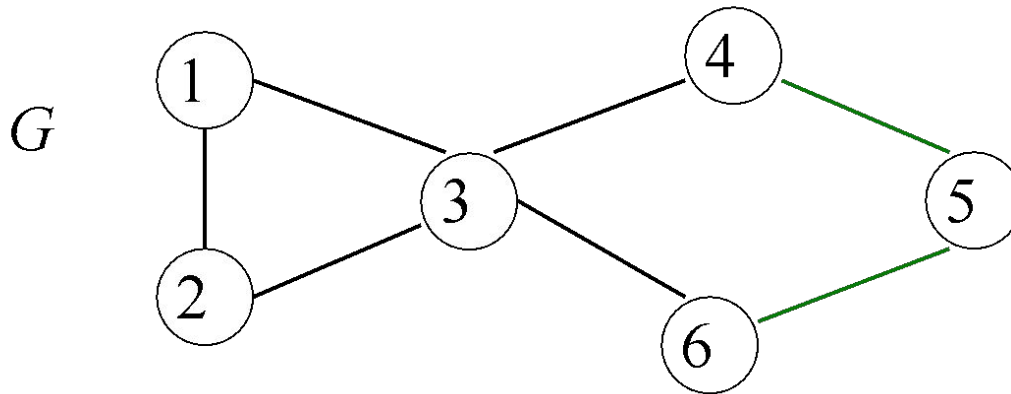
$$\kappa(G_1) = 1$$



$$\kappa(G_2) = 2$$

Пусть G – граф порядка $n > 1$. Числом реберной связности $\lambda(G)$ графа G называется **наименьшее число ребер**, удаление которых приводит к **несвязному графу**. Если граф **одновершинный** или **несвязный**, то $\lambda(G) = 0$.

Пример.

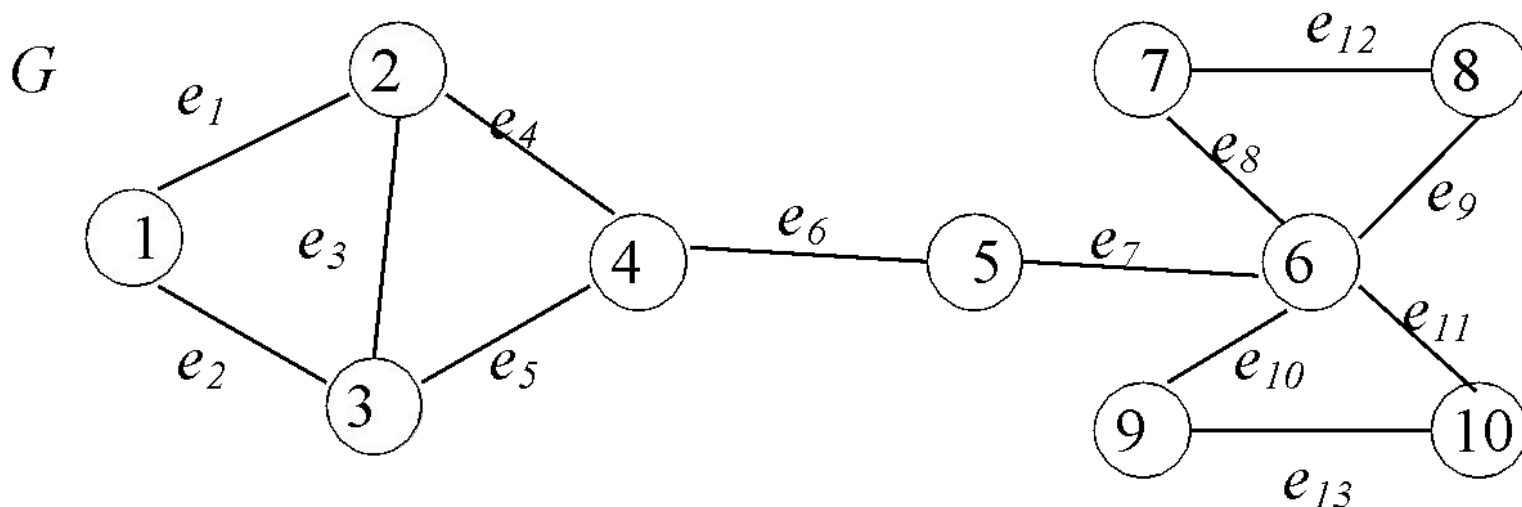


$$\lambda(G) = 2$$

Вершина v графа G называется *точкой сочленения* (или *разделяющей вершиной*), если граф $G - v$ имеет больше компонент связности, чем G .

Ребро e графа G называется *мостом*, если граф $G - e$ имеет больше компонент связности, чем G .

Пример.



Точки сочленения: 4, 5, 6

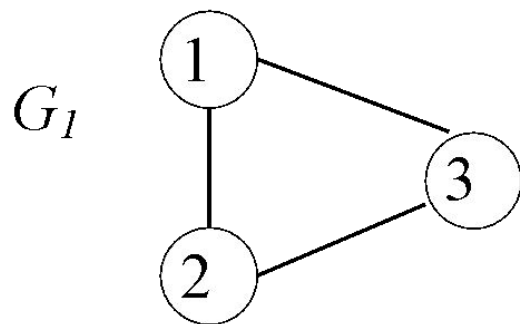
Мосты: e_6 , e_7 .

3.5.3. Двусвязные графы

Неориентированный граф называется *двусвязным*, если он является связным и не содержит точек сочленения.

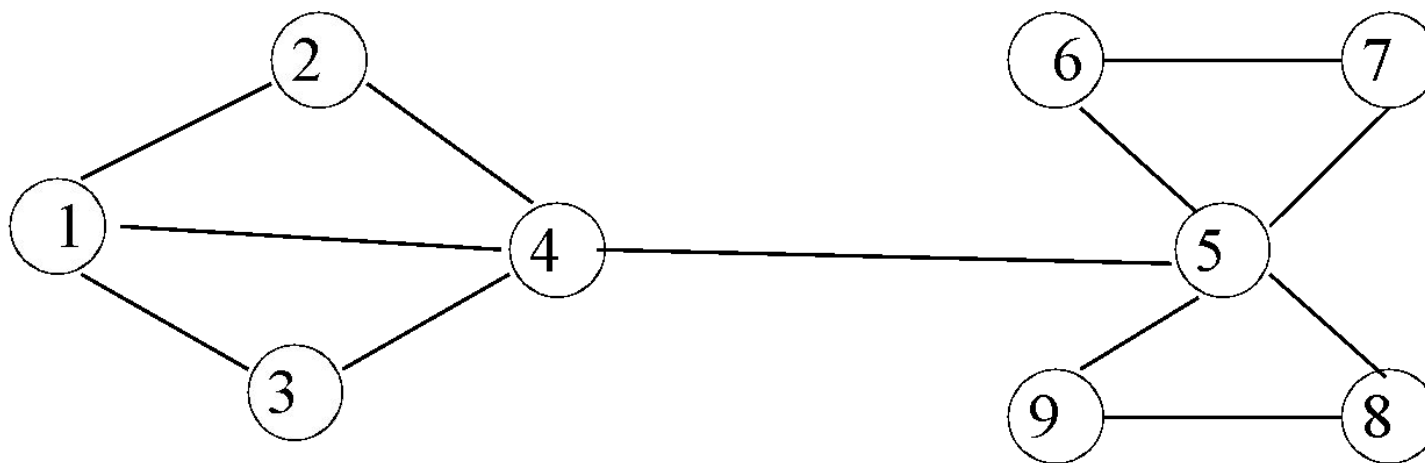
Произвольный максимально возможный двусвязный подграф графа G называется *блоком* (компонентой двусвязности) этого графа.

Пример.



граф G_1 является двусвязным

G_2



Блоки:

$\{1, 2, 4, 3\}$

$\{5, 6, 7\}$

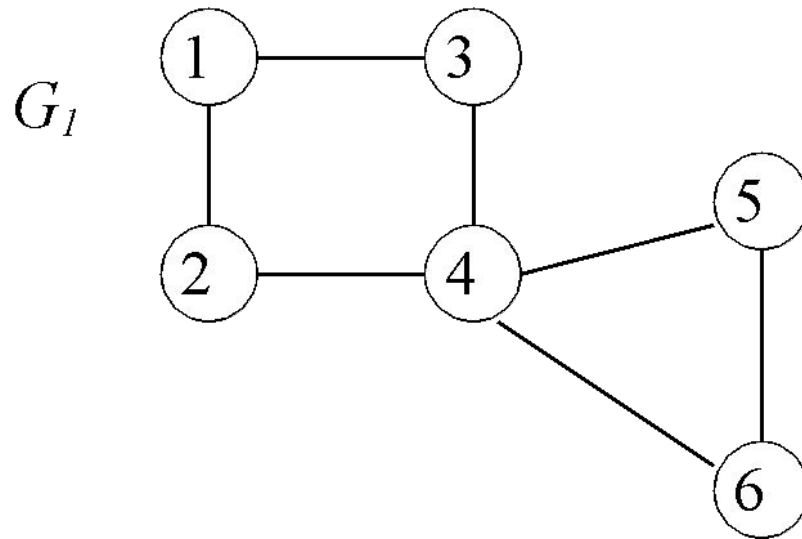
$\{5, 8, 9\}$

$\{4, 5\}$

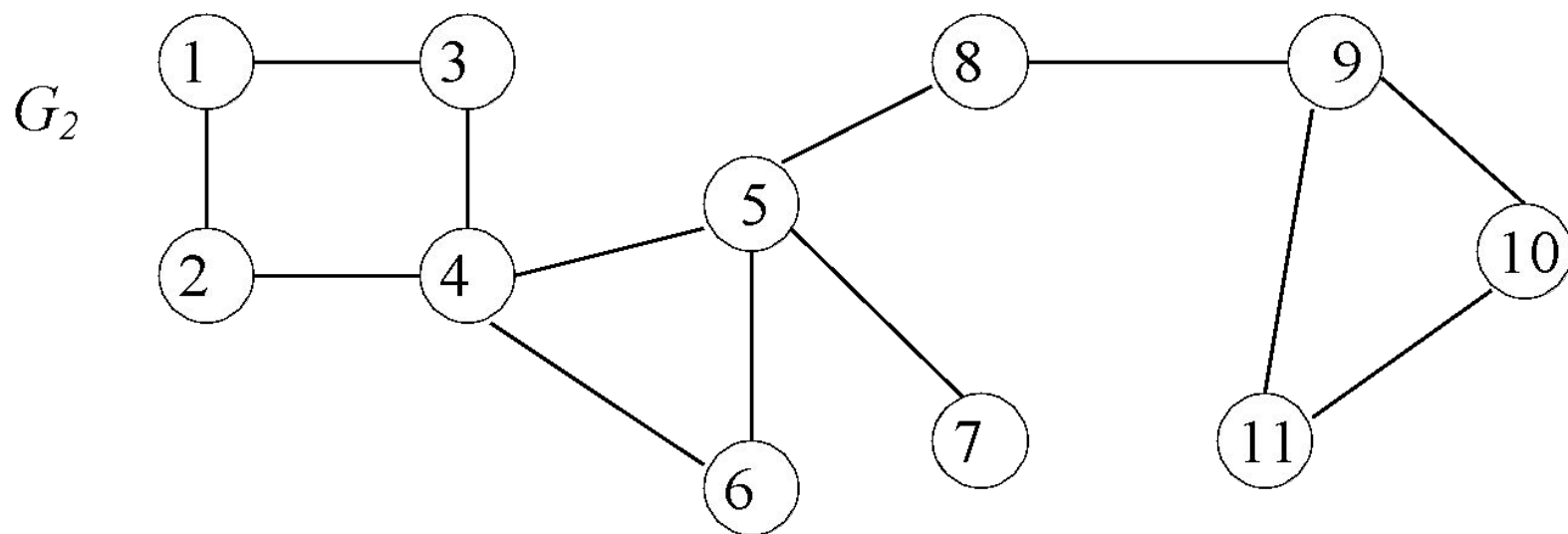
Неориентированный граф называется *реберно-двусвязным*, если он является связным и не содержит мостов.

Произвольный максимально возможный реберно-двусвязный подграф графа G называется *листом* этого графа.

Пример.



Граф G_1 является реберно-двусвязным



Листы:

$\{2, 1, 3, 4, 5, 6\}$

$\{7\}$

$\{9, 10, 11\}$

$\{8\}$

3.5.4. Связность в орграфах

Путь в ориентированном графе – ориентированная цепь.

Пусть $D(V, A)$ – орграф, v_1 и v_2 – его вершины. Тогда

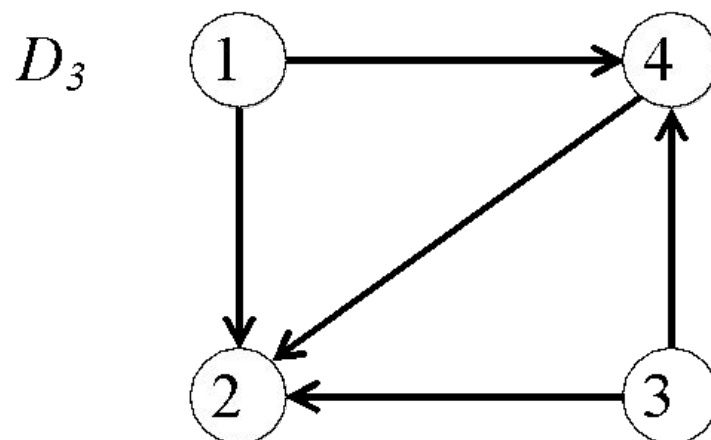
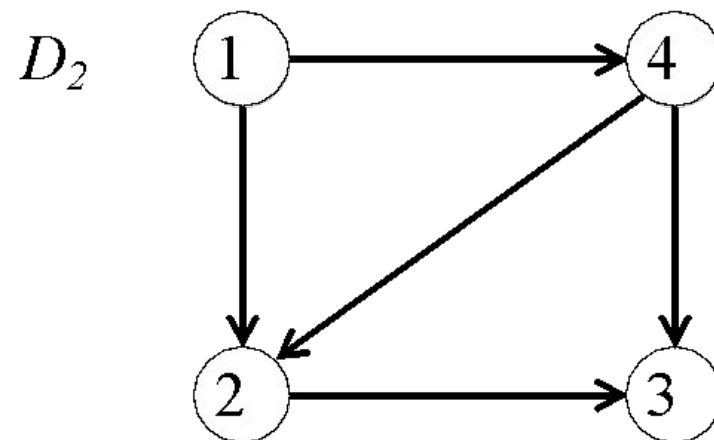
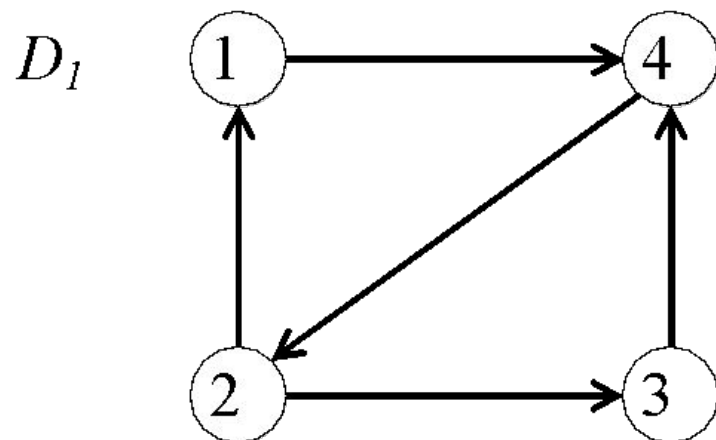
1) две вершины v_1 и v_2 *сильно связаны* в орграфе D , если существует путь из v_1 в v_2 **и** из v_2 в v_1 ;

2) две вершины v_1 и v_2 *односторонне связаны* в орграфе D , если существует путь **либо** из v_1 в v_2 , **либо** из v_2 в v_1 ;

3) две вершины v_1 и v_2 *слабо связаны* в орграфе D , если они **связаны в неориентированном графе** G , полученном из орграфа D путем отмены ориентации дуг.

Сильная связанность влечет одностороннюю связанность, которая влечет слабую связанность. Обратное неверно.

Пример.



Компонента сильной связности (КСС) орграфа D - это его максимально сильно связный подграф.

Каждая вершина графа принадлежит только одной КСС. Если вершина не связана с другими, то считается, что она сама образует КСС.

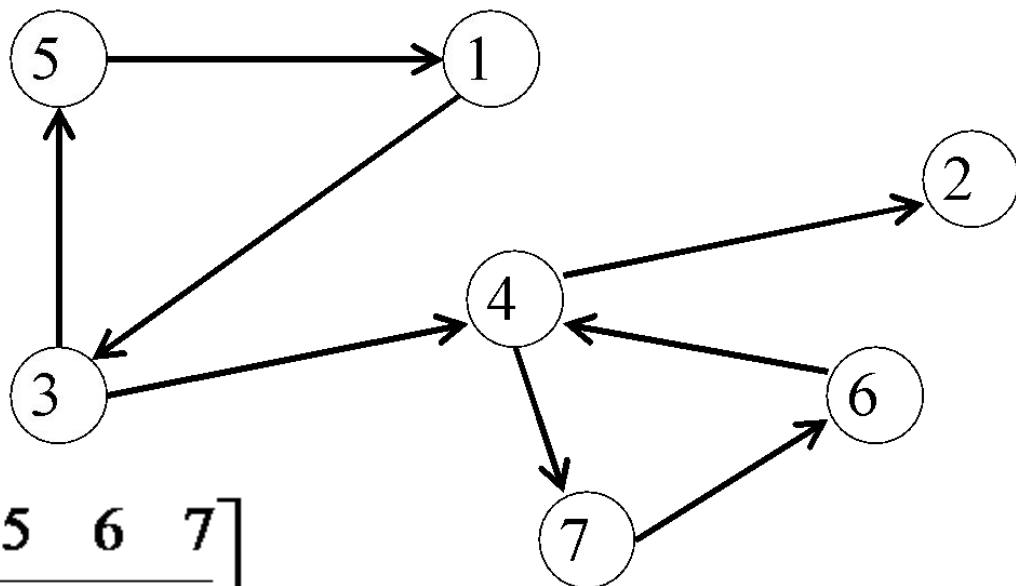
S – матрица компонент сильной связности (n -го порядка)

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i \rightarrow j \text{ и } j \rightarrow i, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

главная диагональ матрицы содержит 1.

Пример.

D



$$S_1 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \left[\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$S_2 = \left[\begin{array}{c|cccc} & 2 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$S_2 = \left[\begin{array}{c|cccc} & 2 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$S_3 = \left[\begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right]$$

Компоненты сильной связности:

$\{1, 3, 5\}$

$\{4, 6, 7\}$

$\{2\}$