Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Основные вопросы:

- Понятие производной. Геометрический и физический смысл.
- Понятие сложной функции. Производная сложной функции.
- Производные высших порядков.
- Исследование функций с помощью производной

Определение.

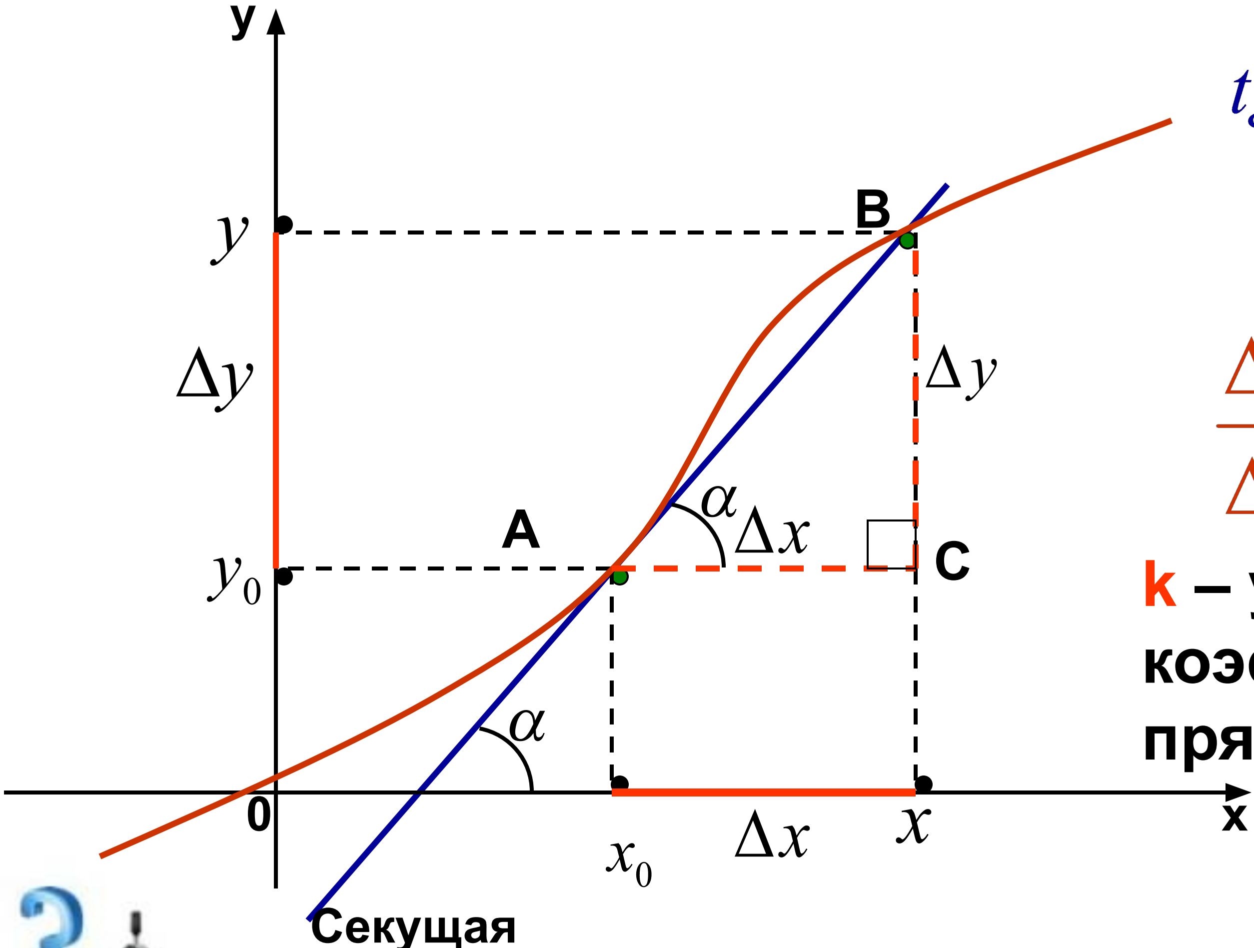
Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что - ***называется производной данной функции и имеет вид:***

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Операция вычисления производной называется дифференци-рованием.

- Функция называется дифференци-руемой в данной точке, если в этой точке существует её производная.

Геометрический и физический смысл производной.



$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

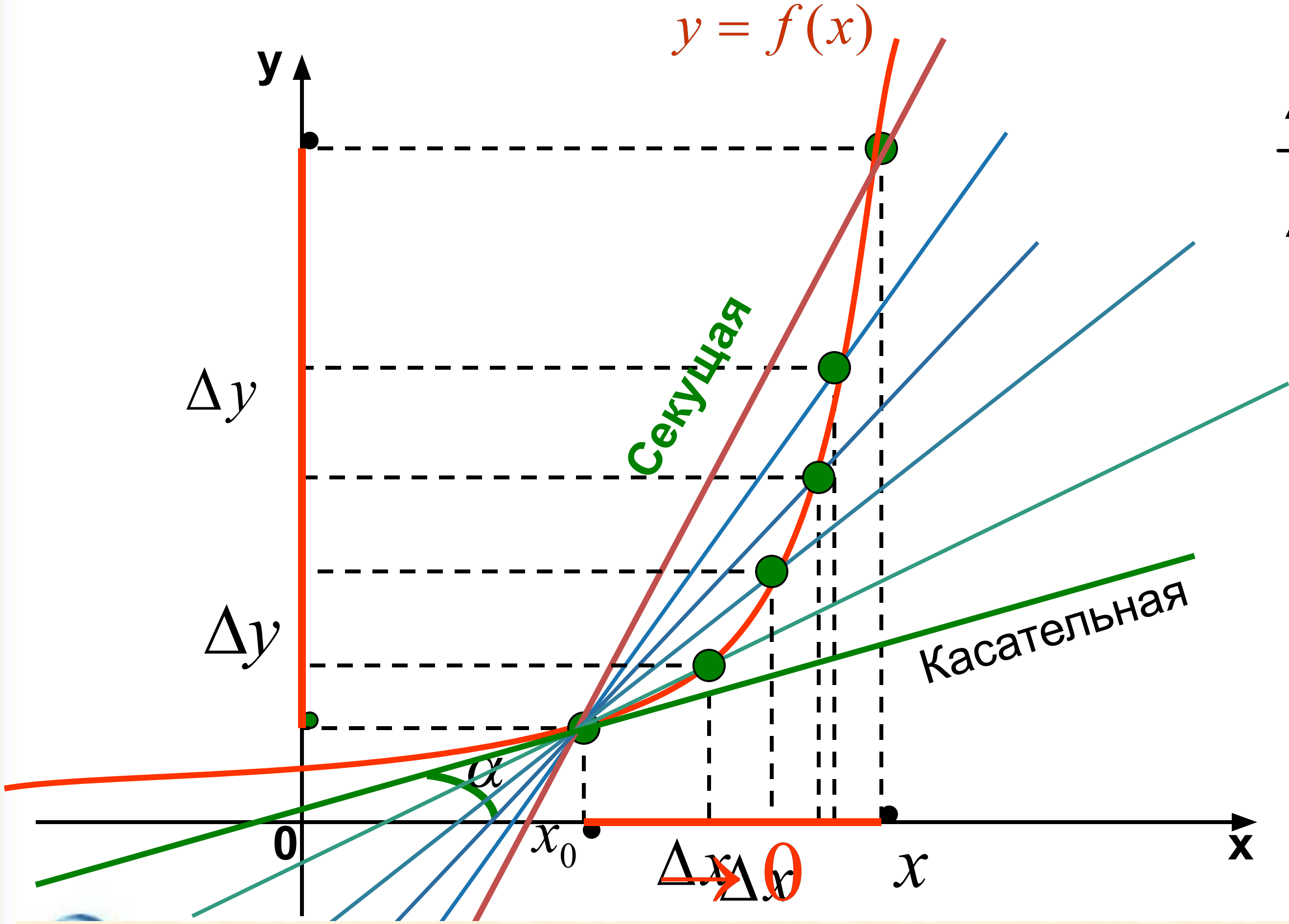
Итак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$

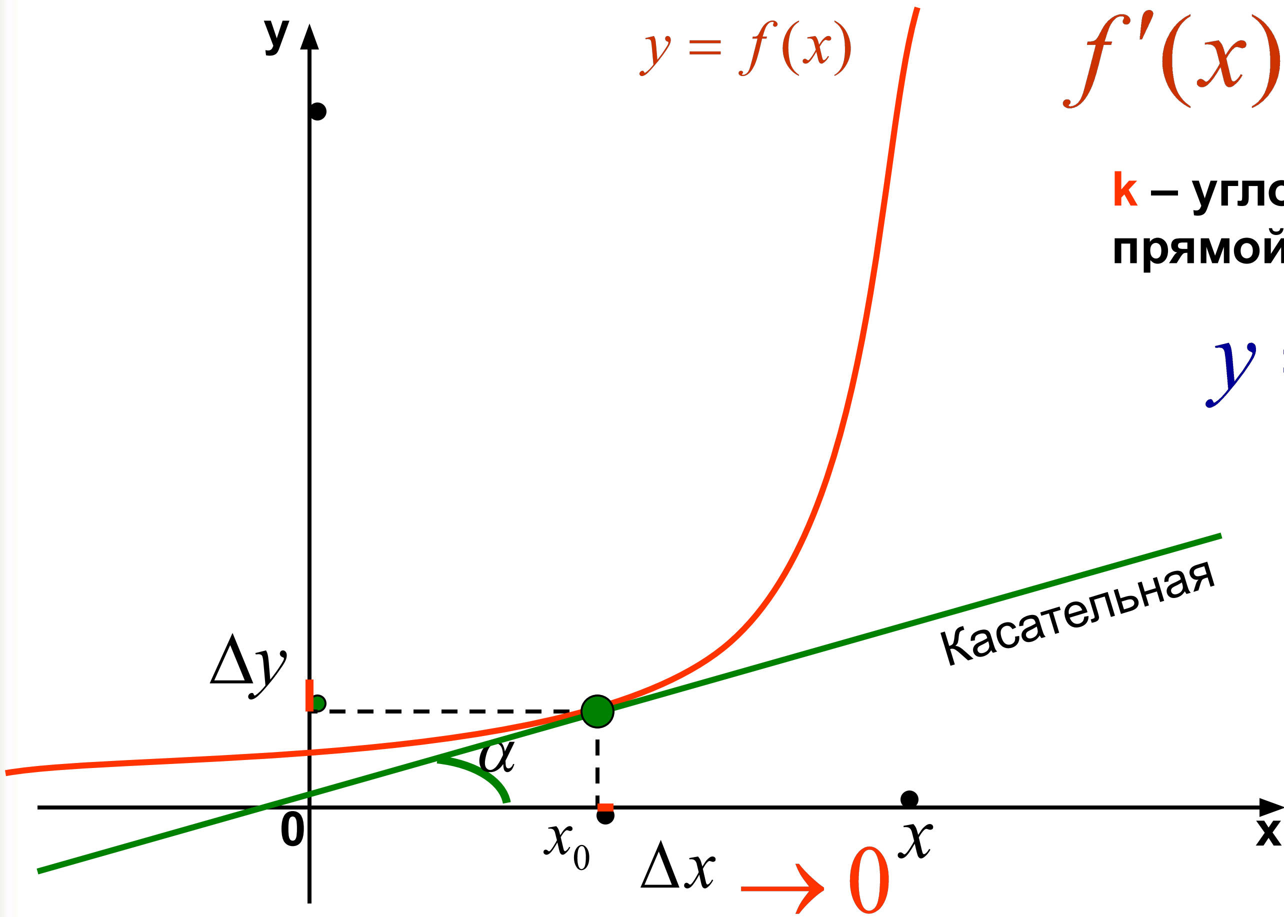
При $\Delta x \to 0$ угловой коэффициент секущей $\to$ к угловому коэффициенту касательной.

Автоматический показ. Щелкните 1 раз.

$$f'(x) = tg\alpha = k$$

k – **угловой коэффициент прямой(касательной)**

$$y = kx + b$$



Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к графику функции в этой точке.

Физический смысл производной функции в данной точке

- Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то скорость ее движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $x'(t)$, т.е. **производная от координаты по времени есть скорос** $(v(t) = x'(t))$.

- **Производная от скорости по времени есть ускорение:**

$$a = v'(t).$$

Ускорение движения есть скорость изменения скорости $v'(t)$, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t.$

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени ***t;***

б) в момент времени ***t=2c.***

<u>Решение.</u>

а) $$V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$$

б) $$V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(м/с)$$

Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону $S(t) = t^2 + 2t + 3:$

а) в момент времени *t;*

б) в момент времени *t=3c.*

<u>Решение.</u>

$$а) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2*3 + 2 = 8 (м/с)$$

$$a(3) = 2 (м/с^2)$$

1. Производная от числа (константы) равна нулю.

$$(C)' = 0$$

2. Производная переменной равна единице.

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

3. Производная алгебраической суммы (разности) функций равна алгебраической сумме производных этих функций:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

4. Производная произведения 2-х функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

5. Производная частного 2-х функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

6. Постоянный множитель **с** можно выносить из-под знака производной:

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

7. Производная степенной функции равна произведению показателя степени на переменную в степени меньшей на единицу

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Производная показательной функции

Функция $f(x) = e^x$ дифференцируема в каждой точке области определения, и

$$(e^x)' = e^x.$$

Показательная функция $y = a^x$

дифференцируема в каждой точке области определения, и

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Производные некоторых элементарных функций.

- $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Производные обратных тригонометрических функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathrm{R};$$

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathrm{R}.$$

Задание 1.

Найдите производную функции

$$f(x) = sinx + \ 3x^2 + 6x + 5$$

Решение:

$f'(x) = cosx + 6x + 6$

Задание 2.

Найдите производную функции

$$f(x) = \sqrt{x} + \ x^3 - 5x + sinx$$

Решение:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2 - 5 + cosx$$

Задание 3.

Найдите производную функции

$$f(x) = cosx + 8x^2 + 5x + 8$$

Решение:

$f'(x) = -\ sinx + 16x + 5$

Задание 4.

Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{1}{x} + 4x^3 - 5x^2 - cosx$$

Решение:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 12x^2 - 10x + sinx$$

Задание 5

Найдите производную функции

$$f(x) = lnx + 5x^2 + 8x + 15$$

Решение:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 10x + 8$$

Задание 6

Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{3}{x^3} - lnx + 8x^5 + x$$

Решение:

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} - \frac{1}{x} + 40x^4 + 1$$

Задание 7

Найдите производную функции

$$f(x) = e^x - 3x^4 + 7$$

Решение:

$$f'(x) = e^x - 12x^3$$

Задание 8

Найдите производную функции

$$f(x) = -\frac{2}{x^4} - e^x + \frac{1}{2}x^2$$

Решение:

$$f'(x) = \frac{8}{x^5} - e^x + x$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Примеры:

1) $y = \left(3x^2 - 2x\right)^5.$ $\begin{cases} y = f^5; \\ f = 3x^2 - 2x. \end{cases}$

2) $y = \sqrt{\sin x}.$ $\begin{cases} y = \sqrt{f}; \\ f = \sin x. \end{cases}$

3) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right).$ $\begin{cases} y = \cos f; \\ f = 2x - \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right) \cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right) \cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n\left(x\right)$	$n \cdot f^{n-1}\left(x\right) \cdot f'\left(x\right)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f\left(x\right)}$	$-\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f\left(x\right)}$	$\frac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f\left(x\right)$	$\cos f\left(x\right) \cdot f'\left(x\right)$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right)\cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n\left(x\right)$	$n\cdot f^{n-1}\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)$

Пример: 1) $y = \left(2x-1\right)^4.$ $\begin{cases} y = f^4; \\ f = 2x-1. \end{cases}$

$$y' = \left[\left(2x-1\right)^4\right]' = 4\left(2x-1\right)^3\cdot\left(2x-1\right)' = 4\left(2x-1\right)^3\cdot 2 = 8\left(2x-1\right)^3.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

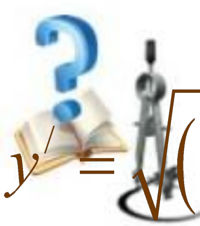
Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right)\cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	**Производная простой функции**	**Сложная функция**	**Производная сложной функции**
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f\left(x\right)}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{f\left(x\right)}}\cdot f'\left(x\right) = \dfrac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}$

Пример: 1) $y = \sqrt{2x^3 - x}.$ $\begin{cases} y = \sqrt{f}; \\ f = 2x^3 - x. \end{cases}$



$$y' = \sqrt{\left(2x^3 - x\right)^4}' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 - x}}\cdot\left(2x^3 - 1\right)' = \frac{6x^2}{2x\sqrt{2x^2 - 1}} = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 - 1}}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g\left(f\left(x\right)\right).$

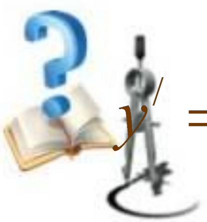
Правило нахождения производной сложной функции

$$g'\left(f\left(x\right)\right) = g'\left(f\right)\cdot f'\left(x\right)$$

(производная сложной функции равна производной основной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f\left(x\right)$	$\cos f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)$

Пример: 1) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right).$ $\begin{cases} y = \sin f; \\ f = 2x - \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$



$$y' = \sin'\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)' = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n(x)$	$n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x)\cdot f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\cdot f'(x)$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgf(x)$	$\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

Таблица производных для сложной функции

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} u'$.

1а. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

1б. $\left(u^{-1}\right)' = \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

2а. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

3а. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

7. $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

9. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

10. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

11. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

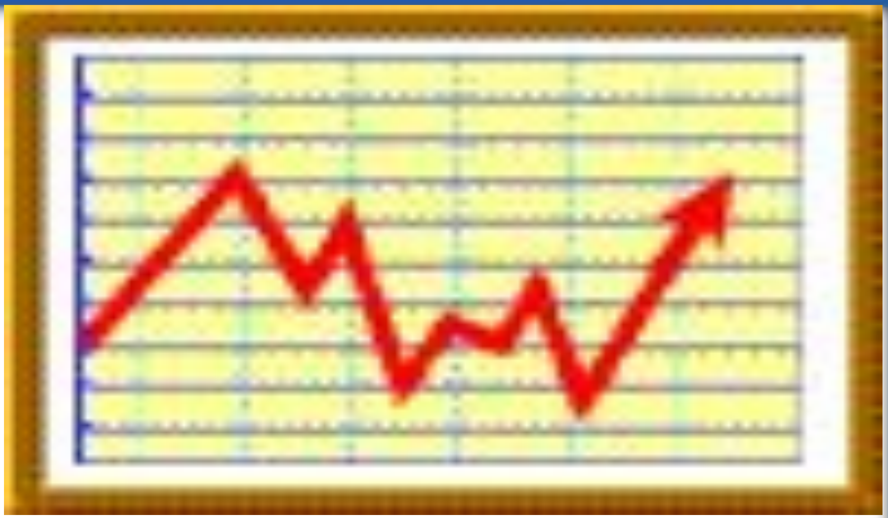
Производные высших порядков

Под **производной высших порядков** понимают дифференцирования функции более одного раза. Если производную $y'(x)$ повторно дифференцировать, то получим производную второго порядка, или **вторую производную функции** $y=f(x)$, и она обозначается

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}.$$

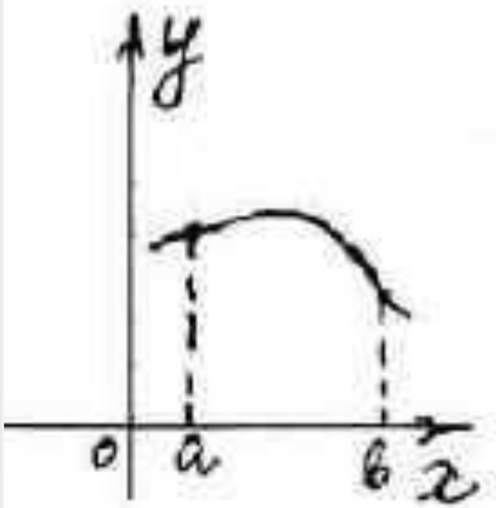
Производная третьего порядка будет иметь вид

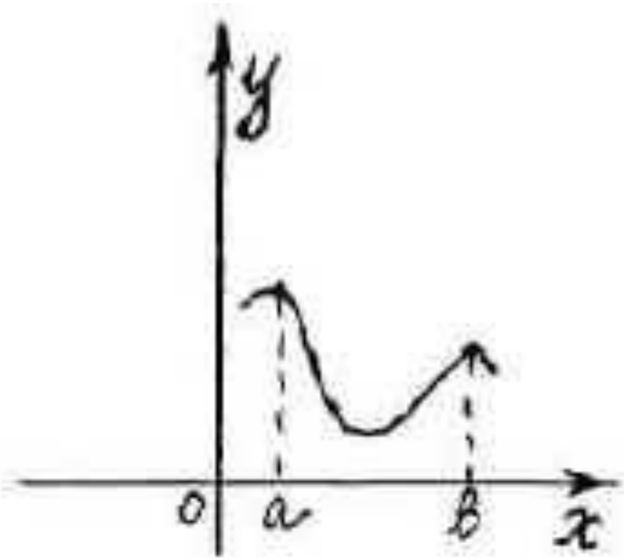
$$y'''=(y'')'=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

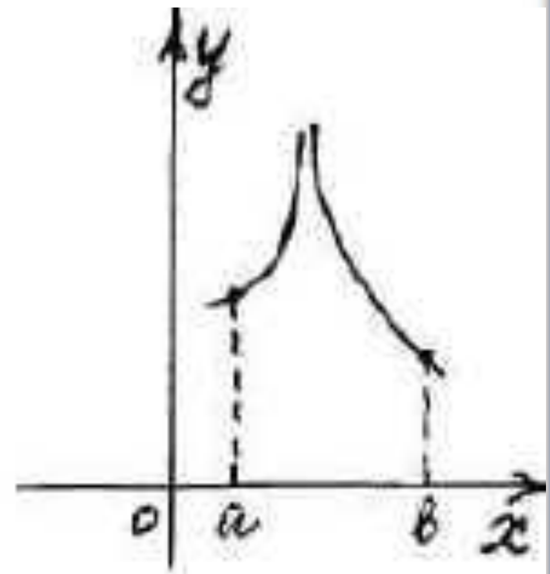


Применение производной к исследованию функции

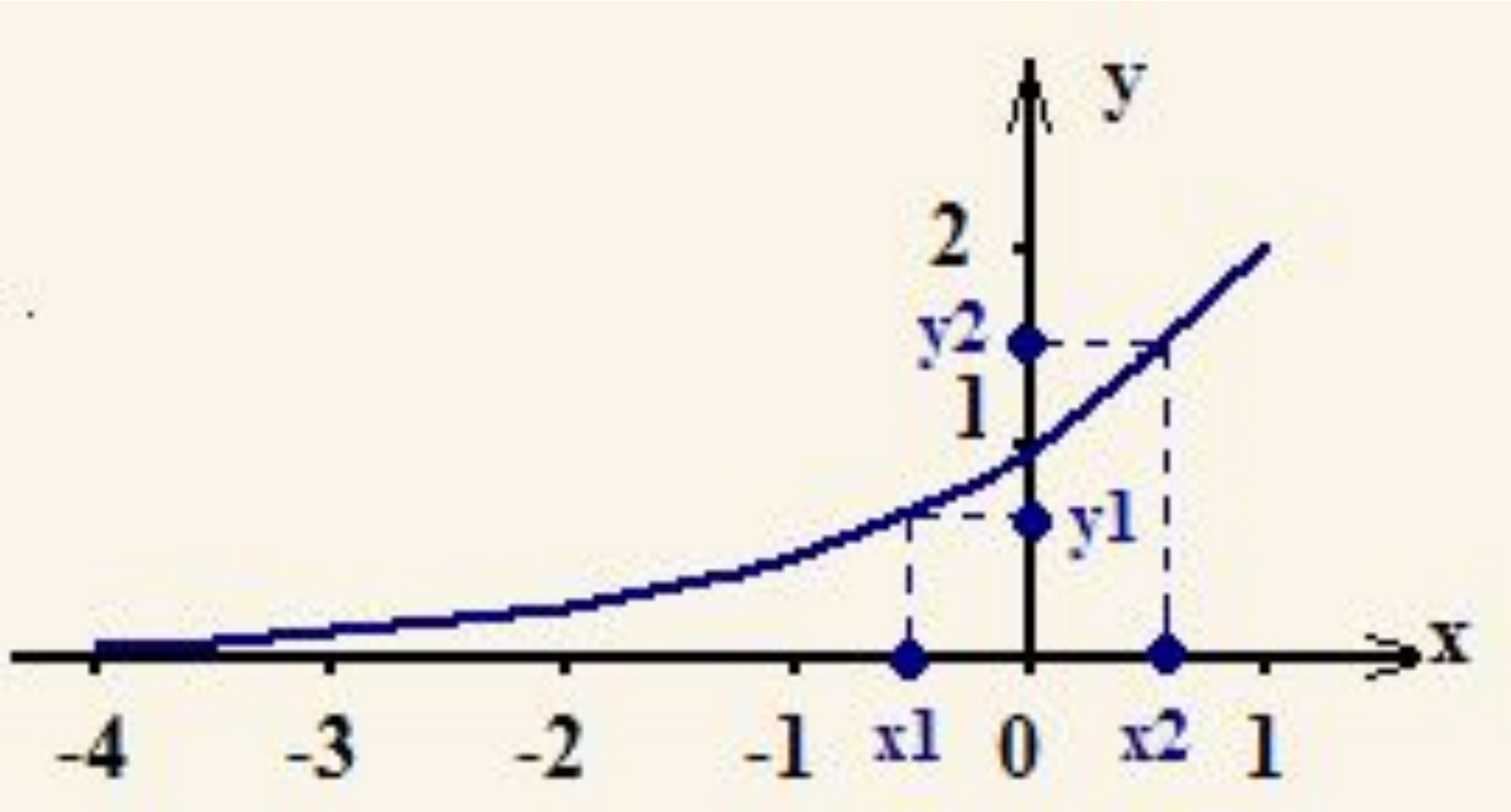
Одна из основных задач исследования функции- это нахождение промежутков ее возрастания и убывания.







Возрастание функции

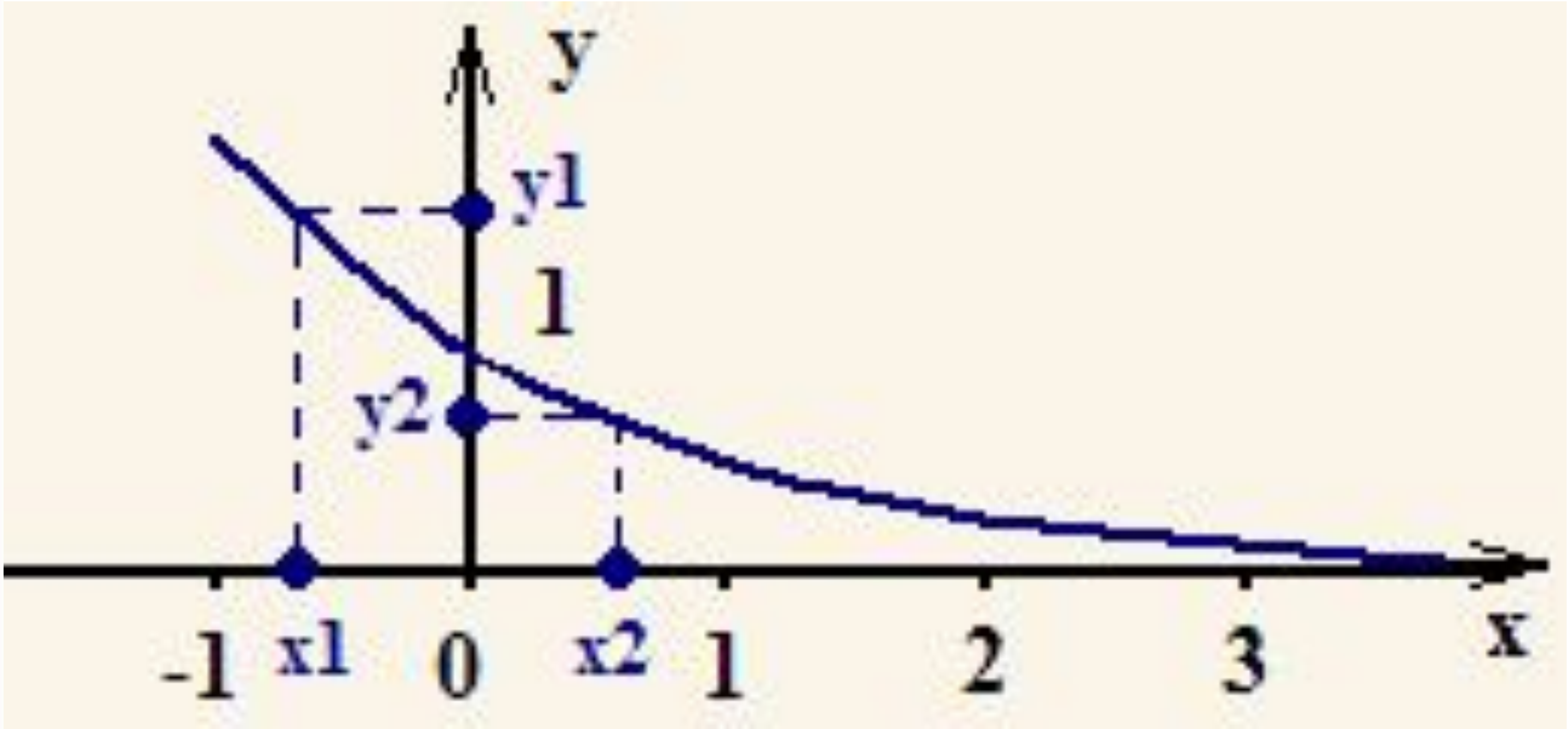


ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1:

Функция $f\,(x)$ называется **возрастающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\boldsymbol{f\,(x_1) < f\,(x_2)}$.

Другими словами, *функция называется* ***возрастающей*** *в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из данного интервала,* **большему соответствует большее значение функции.**

Убывание функции

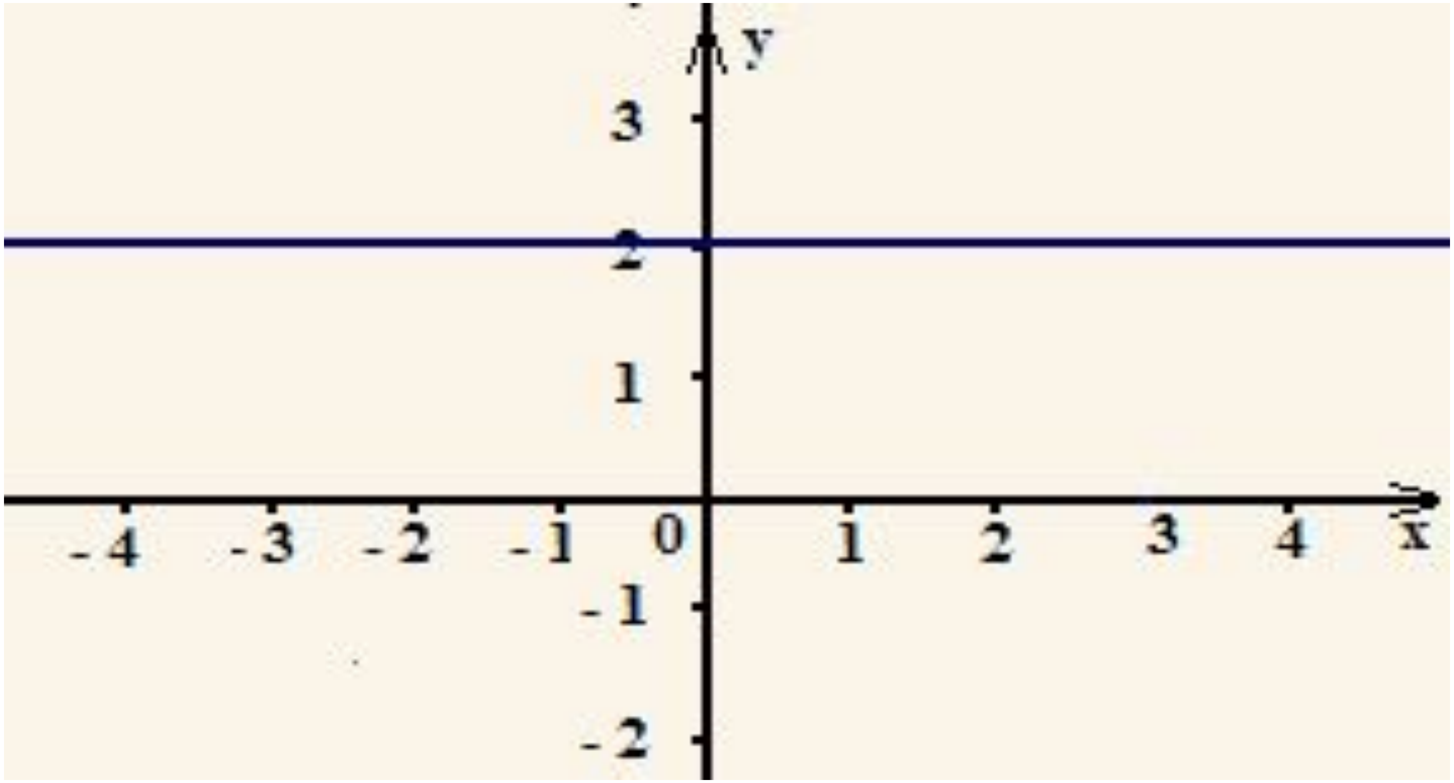


ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2:

Функция $f(x)$ называется **убывающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$.

Другими словами, *функция называется* ***убывающей*** *в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из данного интервала,* ***большему соответствует меньшее значение функции****.*

Определение постоянной функции



Функция, не возрастающая и не убывающая на всей области определения называется **постоянной**.

Промежутки монотонности

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то она называется **монотонной** на этом промежутке.

Промежутки возрастания и убывания называются **промежутками монотонности** функции.

<u>ТЕОРЕМА 1.</u>(необходимые условия возрастания и убывания функции).

Если дифференцируемая функция

$y = f(x),\ x \in (a,b)$

•**возрастает** на интервале (a, b), то $f'(x) \geq 0$ для любого $x_0 \in (a,b)$;

•**убывает** на интервале (a, b), то $f'(x) \leq 0$ для любого $x0 \in (a,b)$.

<u>ТЕОРЕМА 2</u>.(достаточный признак возрастания и убывания функций).

- Если $f'(x)>0$, в каждой точке интервала (a,b), то функция возрастает на этом интервале.

- Если $f'(x)<0$, в каждой точке интервала (a,b), то функция убывает на этом интервале.

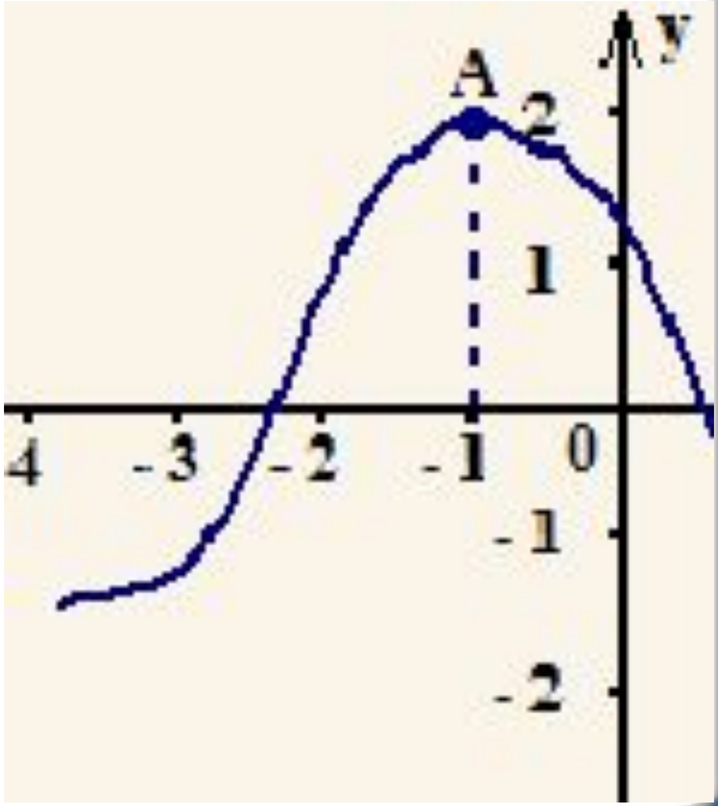
Точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются

КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ.

Точка максимума

- Точка x0 называется **точкой максимума** функции f(x) , если для всех *x* из некоторой окрестности x0 выполнено неравенство

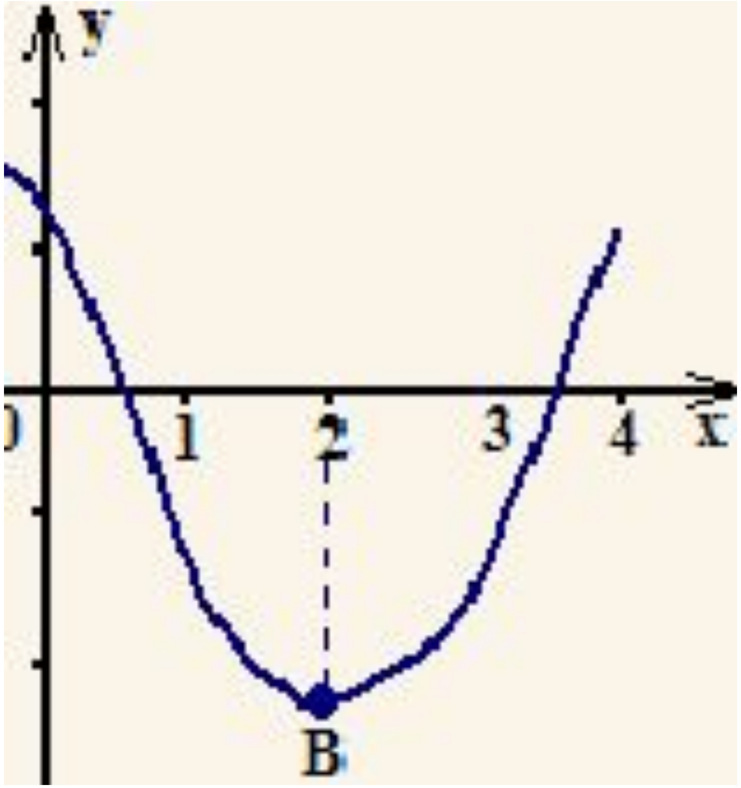
$f(x) < f(x_0)$.



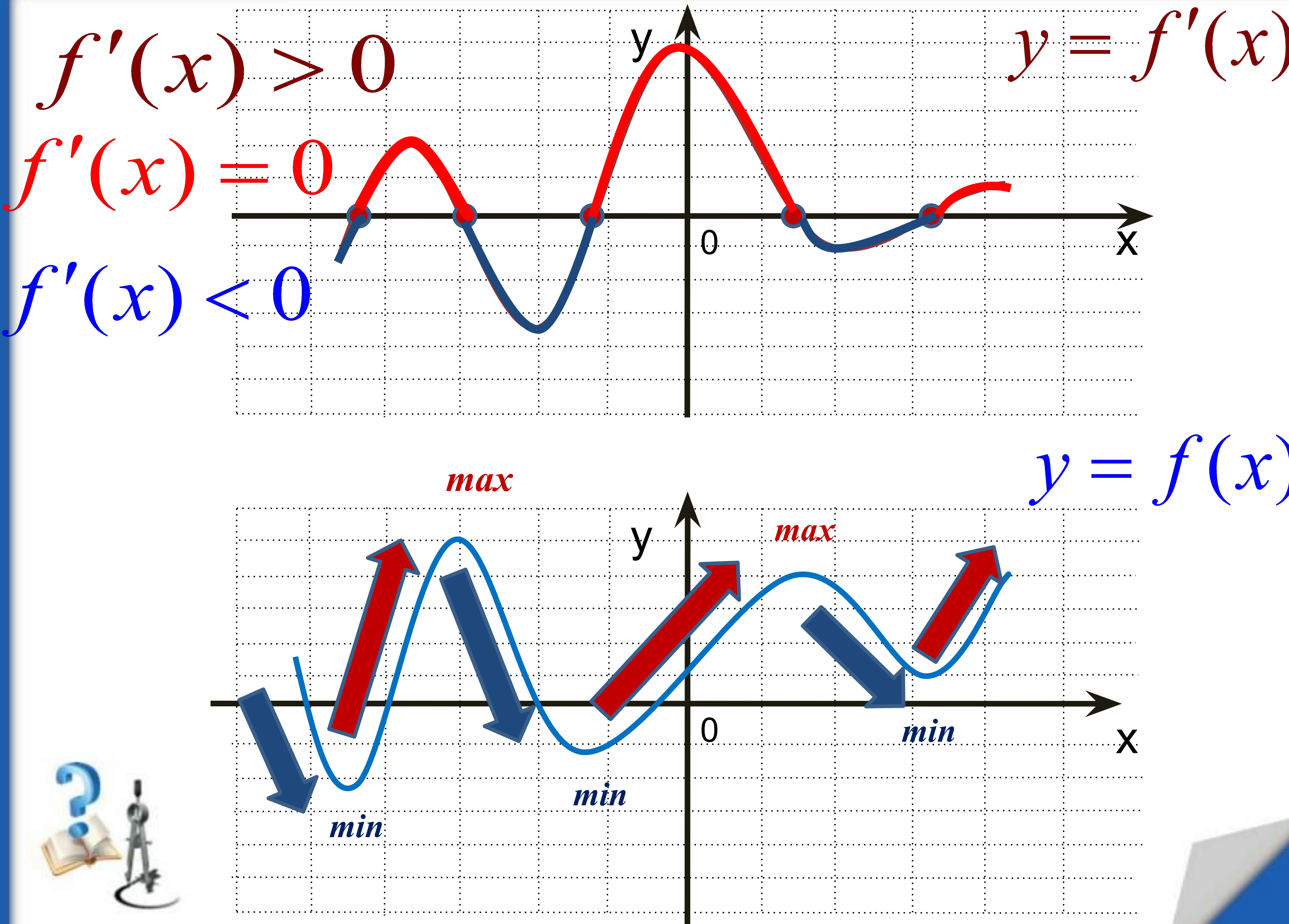
Точка минимума

- Точка x0 называется **точкой минимума** функции f(x) , если для всех *x* из некоторой окрестности x0 выполнено неравенство

$$f(x) > f(x0).$$



Точки максимума и минимума функции f(x) называются ***точками экстремума*** этой функции, а значения функции в точках максимума и минимума называются **максимумами** и **минимумами функции** или ***экстремумами функции***.


$f'(x) > 0$
$f'(x) = 0$
$f'(x) < 0$
$y = f'(x)$
y
0
x
$y = f(x)$
max
max
min
min
min
y
0
x

Экстремум функции, если он существует, может быть только в критических точках.

Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум

ТЕОРЕМА 3.(необходимое условие экстремума).

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = a$, то либо $f'(a) = 0$, либо $f'(a)$ не существует

ТЕОРЕМА 4.(достаточное условие существования экстремума).

- Если производная f ' (x) при переходе через точку x_0 **меняет знак с «+» на «-»**, то x_0 является **точкой максимума**;

- Если f ' (x) при переходе через точку x_0 **меняет знак с «-» на «+»**, то x_0 является **точкой минимума**;

- Если f ' (x) при переходе через точку x_0 **не именяет знак**, то в точке x_0 функция f (x) **не имеет экстремума**.

Правило исследования функции $y=f(x)$ на экстремум.

- 1).Найти область определения функции: $D(f)$.
- 2). Найти $f'(x)$.
- 3).Найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x)=0$

4). Найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x)$ не существует.

Правило исследования функции y=f(x) на экстремум.

- 5).Отметить на координатной прямой все **критические точки и область определения функции** y=f(x); получаются промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции **y=f(x) сохраняет постоянный знак.**
- 6). Определить знак y′ на каждом из промежутков, полученных в п.5

Правило исследования функции y=f(x) на экстремум.

- 7). Сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из критических точек:
- если знак производной меняется с «+» на «-», то при данном значении аргумента функция имеет максимум.
- если с «-» на «+», то минимум.
- Если смены знака в окрестности критической точки нет, то экстремума в этой точке нет.
- 8). Вычислить экстремальное значение функции.

<u>ПРИМЕР .</u> ИССЛЕДОВАТЬ НА ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЮ

$У = 2Х^3 – 15Х^2 + 36Х + 1$

1. Функция определена при всех х : Д (у) : R
2. $y' = 6x^2 – 30x + 36$
3. $y' = 0$, $6x^2 – 30x + 36 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
4. y' существует при всех х.

+ - +

5. х

2 3

6. $y' = 6(x – 2) \cdot (x – 3)$. Знаки производной отмечены на координатной прямой.

7.

x	(- ∞ ; 2)	2	(2;3)	3	(3; + ∞)
f(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	29	↘	28	↗
		max		min	

Исследование функции с помощью второй производной

Теорема . Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум — при $f''(x_0) > 0$

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью второй производной

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.

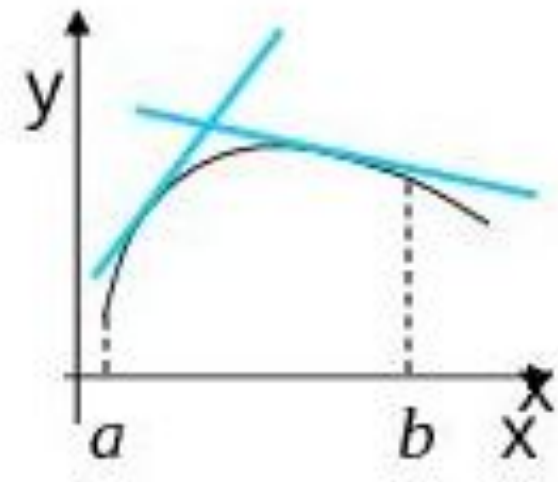
III. Найти вторую производную $f''(x)$.

IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то исследование функции нужно произвести с помощью первой производной.

V. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

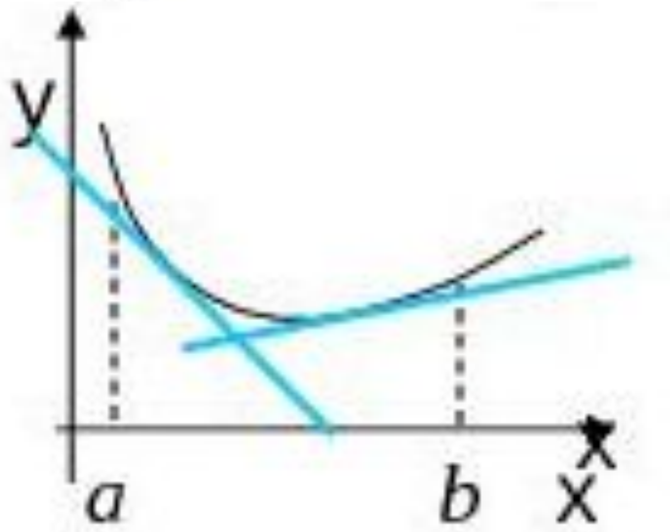
Опр . Кривая обращена выпуклостью вверх на (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на (a,b). Кривая называется *выпуклой*.



ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

Опр . Кривая обращена выпуклостью вниз на (a,b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется *вогнутой*.



ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

Теорема (*Достаточное условие выпуклости и вогнутости кривой*)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, и имеет в (a, b) производную до второго порядка включительно, тогда

a) если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна $f''(x) < 0$, то кривая на (a, b) выпукла;

b) если во всех точках интервала вторая производная положительна $f''(x) > 0$, то кривая на (a, b) вогнута.

Пример

♦ ПРИМЕР 1

Исследовать на выпуклость кривую $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Находим первую и вторую производные $f(x)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Подставляя значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$, получим $f''(-2) = 2 \cdot \frac{1}{(-2)^3}$, $f''(-2) < 0$; $f''(1) = \frac{2}{1}$, $f''(1) > 0$. Следовательно, в точке $x = -2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x = 1$ — выпукла вниз.

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка $x = x_0$ разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то $x = x_0$ является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

♦ ПРИМЕР 1

Найти точку перегиба кривой: 1) $f(x) = 6x^2 - x^3$; 2) $\varphi(x) = x + \sqrt[3]{x^5 - 2}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$. Полагая $f''(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$. Так как в промежутке $-\infty < x < 2$ имеем $f''(x) > 0$, а в промежутке $2 < x < +\infty$ имеем $f''(x) < 0$, то при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба. Находим ординату этой точки: $f'(2) = 16$. Итак, точка перегиба имеет координаты (2; 16);

2) находим $\varphi'(x) = \left(x + \frac{5}{x^3} - 2\right)' = 1 + \frac{5}{3}x^{2/3}$; $\varphi''(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. Здесь критической является точка $x = 0$, в которой вторая производная терпит разрыв.

Домашнее задание:

Упражнения

Найти производную функции (46—47).

46. 1) x^6; 2) x^{12}; 3) $3x^4+2x^{13}$;

4) $7x^3-3x^7$; 5) $\dfrac{3}{x^4}$; 6) $x^3+\dfrac{1}{x^2}$.

47. 1) $\sqrt[3]{x}$; 2) $\sqrt[5]{x}$; 3) $2\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x}+7\sqrt[14]{x}$;

5) $\dfrac{2}{5\sqrt{x}}$; 6) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$; 7) $\dfrac{x^3+1}{x}$; 8) $\dfrac{x^4-\sqrt{x}}{x}$.

48. Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+1$;

Домашнее задание:

Упражнения

Найти производную функции (63—75).

63. 1) $\ln x + \sin x$; 2) $e^x - \sin x$; 3) $\sqrt{x} - \cos x$;

4) $\frac{1}{x^2} + e^x$; 5) $\operatorname{tg} x + \ln x$; 6) $e^x - \operatorname{ctg} x$.

64. 1) $2\cos 3x$; 2) $-5e^{2x}$; 3) $-4\ln 2x$;

4) $-3\sin 2x$; 5) $\frac{3}{10}e^{-2x}$; 6) $2e^x - 4e^{-2x}$.

65. 1) $6x^4 - 9e^{3x}$; 2) $\frac{1}{4}x^8 + 3\sin 3x$; 3) $3\sqrt[3]{x} - 4\cos 4x$;

4) $\frac{5}{x^2} + 4e^{\frac{x}{4}}$; 5) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln 4x$; 6) $3\operatorname{tg} 2x - 2\sqrt[3]{x}$.

Домашнее задание:

66. 1) $8\sqrt[4]{x}+16e^{\frac{x}{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{4}\sin 4x$;

3) $3x\sqrt[3]{x}-3\ln\frac{1}{x}$; 4) $\frac{1}{x\sqrt{x}}+5\cos\frac{x}{5}$.

67. 1) $3x^2-4\sqrt[3]{x}+2e^{\frac{x}{3}}$; 2) $2x^3+3\sqrt{x}-\cos 2x$;

3) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\ln x^3$; 4) $2x^8-3\operatorname{tg}3x-\frac{1}{3}\sin 3x$;

5) $8x^{\frac{3}{4}}+7x^{\frac{1}{7}}-\cos 4x$; 6) $\frac{1}{5}\operatorname{ctg}x-5x^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{4}e^{2x}$.

68. 1) $(x+3)^8$; 2) $(x-4)^7$; 3) $\sqrt[3]{x-2}$; 4) $\sqrt{x+5}$;

5) $\frac{1}{(x+1)^2}$; 6) $\frac{1}{(x-1)^3}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$; 8) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-4}}$.