ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

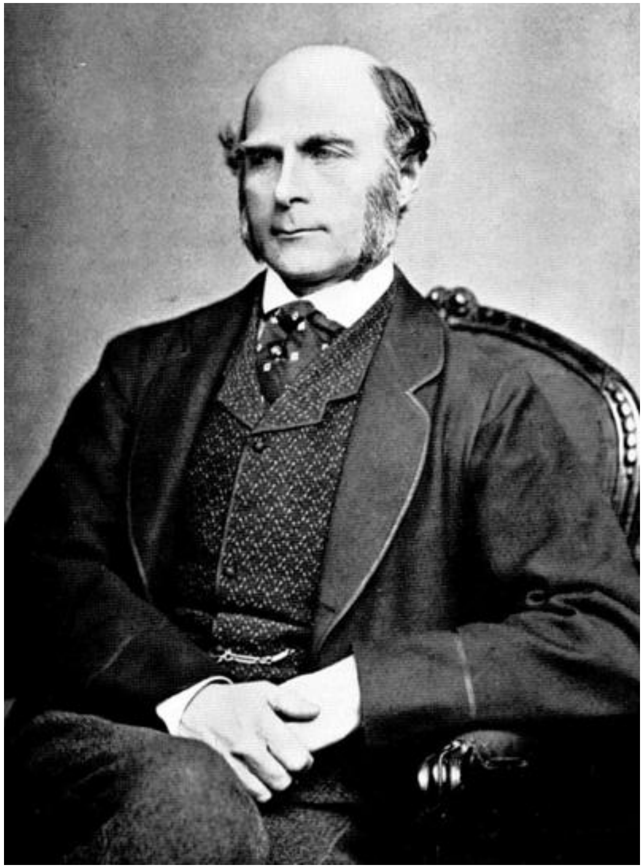
Кафедра Промышленной теплоэнергетики

Математическое моделирование

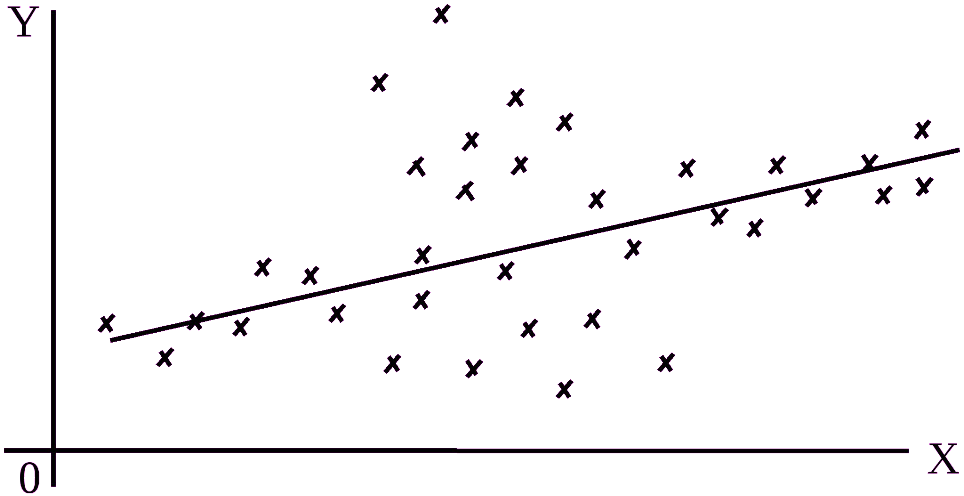
РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Липецк 2018

Регрессия – (от латинского слова «**regressio**» – обратное движение, возвращение) - математическое выражение, отражающее зависимость зависимой переменной *y* от независимых переменных *x* при условии, что это выражение будет иметь статистическую значимость.



Френсис Гальтон, английский исследователь



Регрессионный анализ – статистический метод исследования влияния одной или нескольких независимых переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ на зависимую переменную Y.

Цель регрессионного анализа: определение связи между некоторой характеристикой Y наблюдаемого явления или объекта и величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые обуславливают, объясняют изменения Y.

Y – *зависимая переменная (отклик*), описывает процесс или объект, который мы пытаемся предсказать или понять.
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ – *влияющие переменные*, также называемые *факторами* (регрессорами), используются для моделирования и прогнозирования значений зависимых переменных.

Задачи регрессионного анализа:
- установление формы зависимости;
- подбор модели (уравнения) регрессии;
- оценка параметров модели.

Использование регрессионного анализа

- **Построение моделей**, объясняющих механизм влияния факторных признаков на результат;
- **Статистический прогноз** – вычисление значения результативной переменной для любых значений факторов;
- **Определение вклада** отдельных независимых переменных в вариацию зависимостей;
- **Восполнение пропусков** в данных.

Примеры применения регрессионного анализа

- Моделирование потоков миграции в зависимости от таких факторов, как средний уровень зарплат, наличие медицинских, образовательных учреждений, географического положения и т. д.;
- Моделирование автотранспортных происшествий как функции скорости, погодных и дорожных условий;
- Моделирование потерь от пожаров как функции таких переменных, как количество и расположение пожарных станций, время обработки вызова или цена собственности.

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

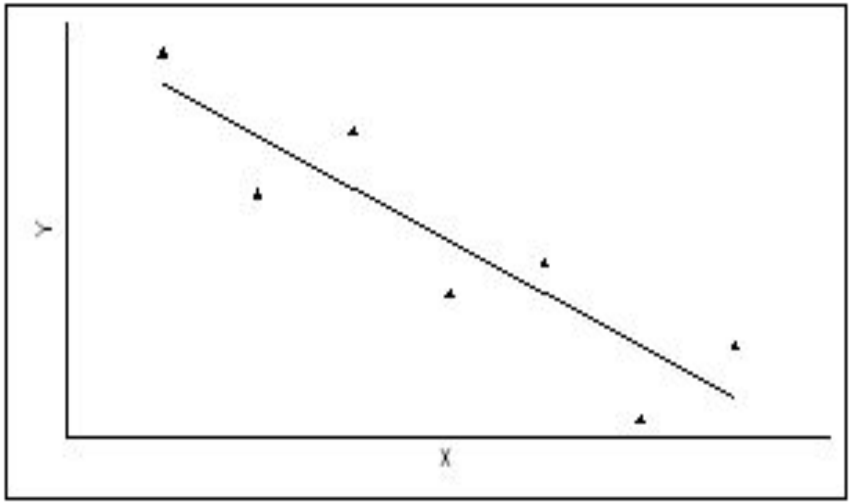
где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

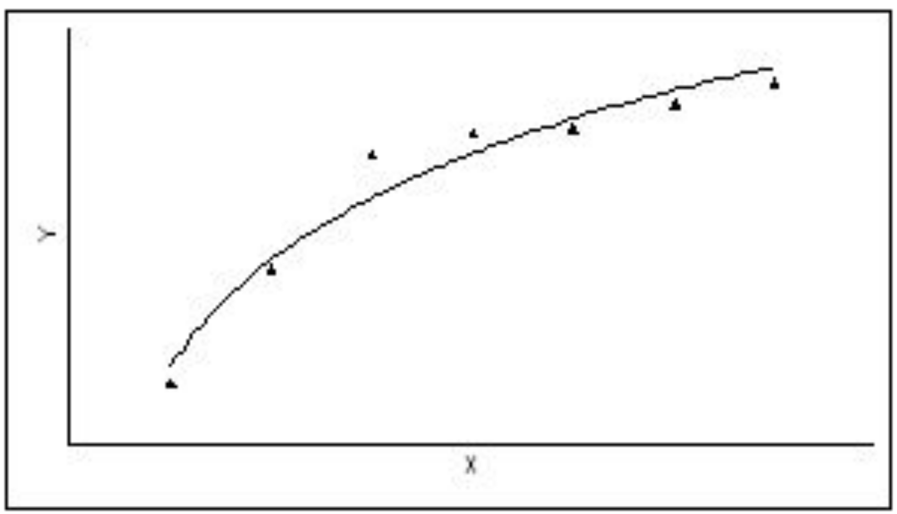
$$y_x = \varphi\left(x, b_0, b_1, \dots, b_p\right),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

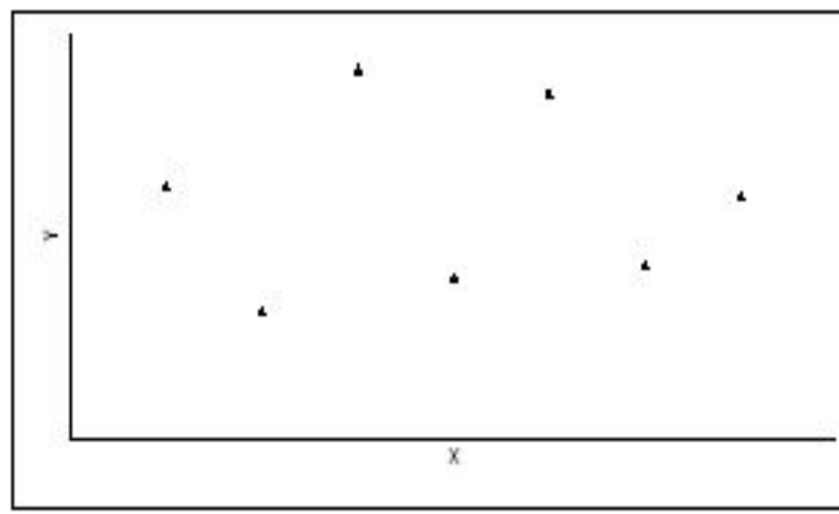
Формы связи



линейная регрессия



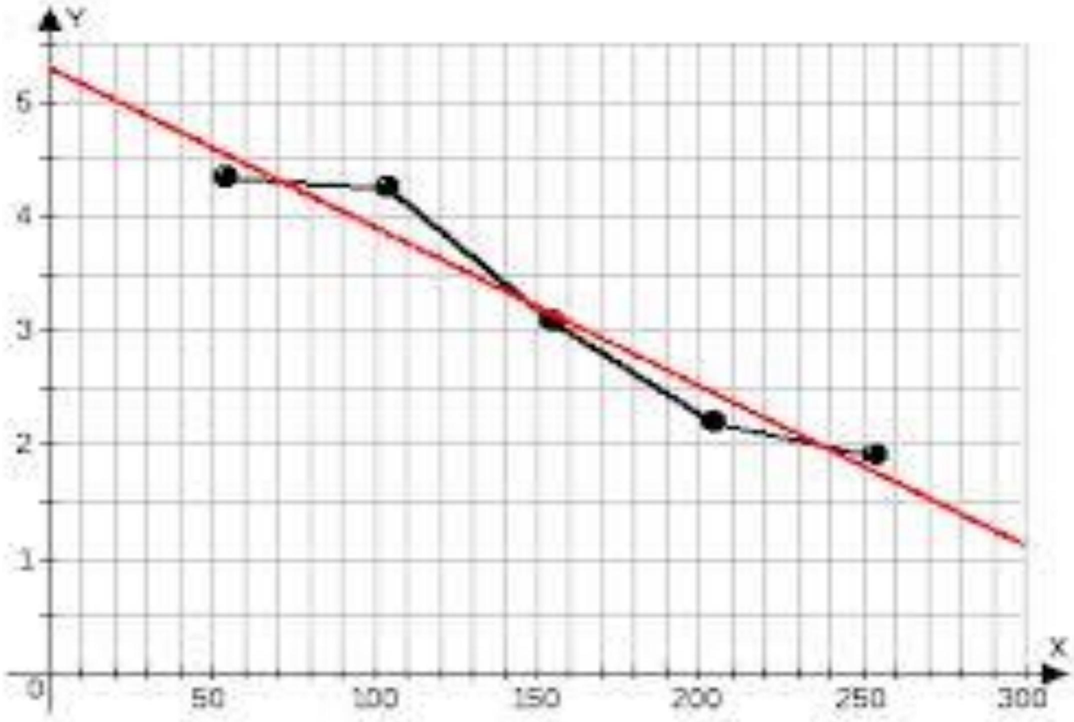
нелинейная регрессия



отсутствие взаимосвязи

Этапы регрессионного анализа

- Выявление наличия взаимосвязи между признаками;
- Определение формы связи;
- Определения силы (тесноты) и направления связи.



Линия регрессии – линия, характеризуемая тем, что сумма квадратов расстояний от точек на диаграмме до этой линии минимальна.

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

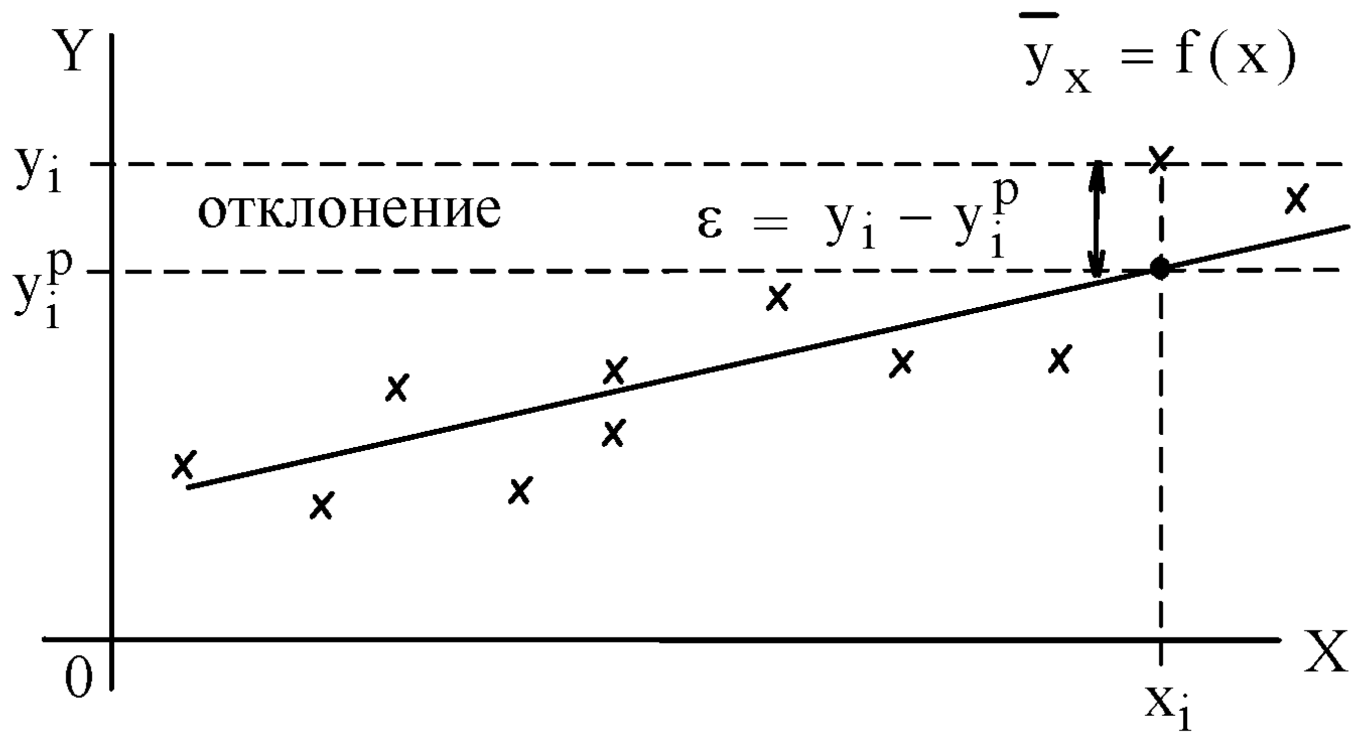
$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ



Парная линейная регрессионная модель

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

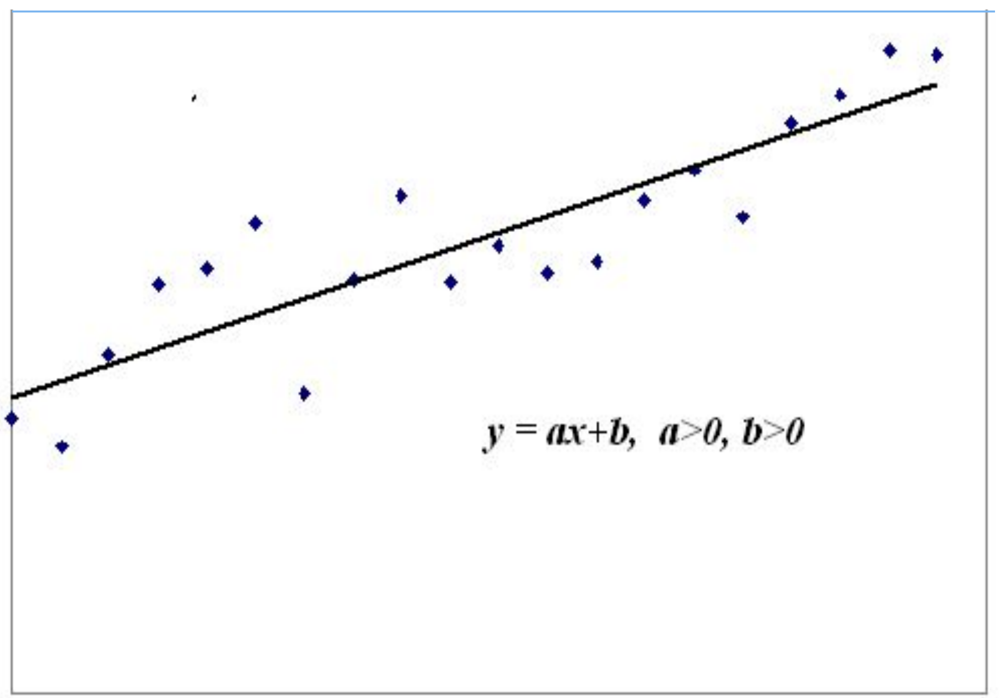
$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;



В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;

$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

Коэффициент регрессии

Смысл коэффициента регрессии:

- в общем случае коэффициент регрессии *а* показывает как в среднем изменится *результативный признак* (Y), если *факторный признак* (X) увеличится на единицу.

Свойства коэффициента регрессии

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

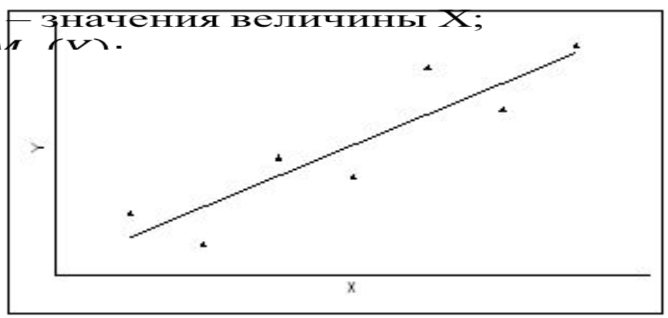
$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

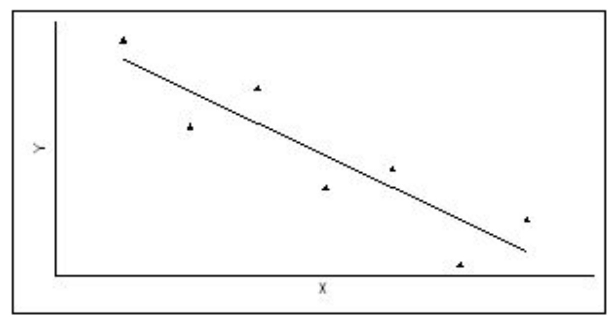
Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \ldots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;



положительная линейная регрессия



отрицательная линейная регрессия

Коэффициент детерминации

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

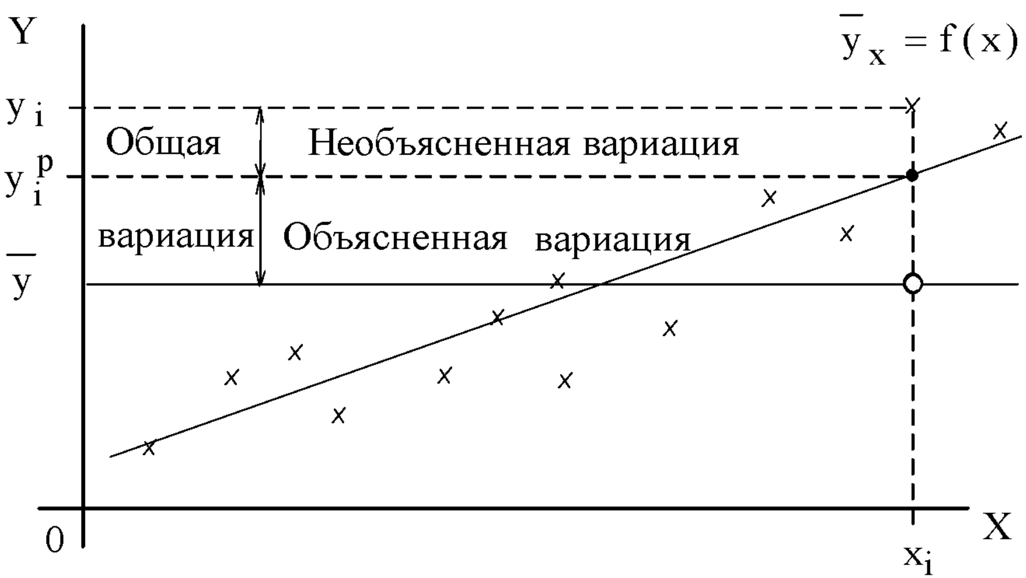
$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;



Графическая интерпретация коэффициента детерминации

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

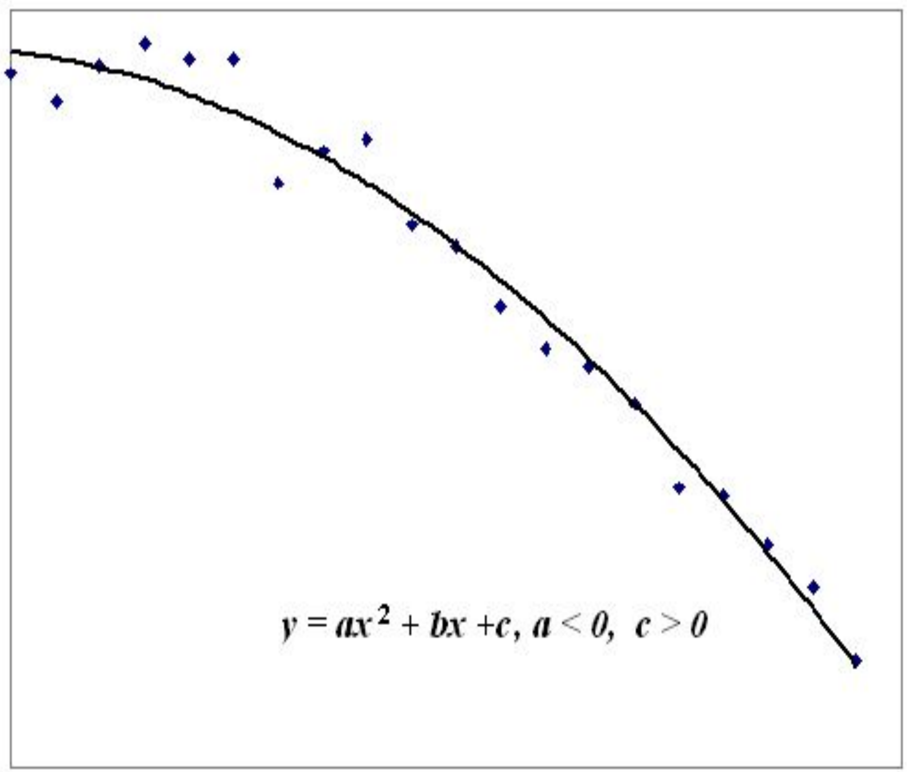
Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

Нелинейная регрессия

В регрессионном анализе изучаются модели вида:
$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$
где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).
Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:
$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$
Где x – значения величины X;



В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi\left(x, b_0, b_1, \dots, b_p\right),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

Множественная регрессия

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

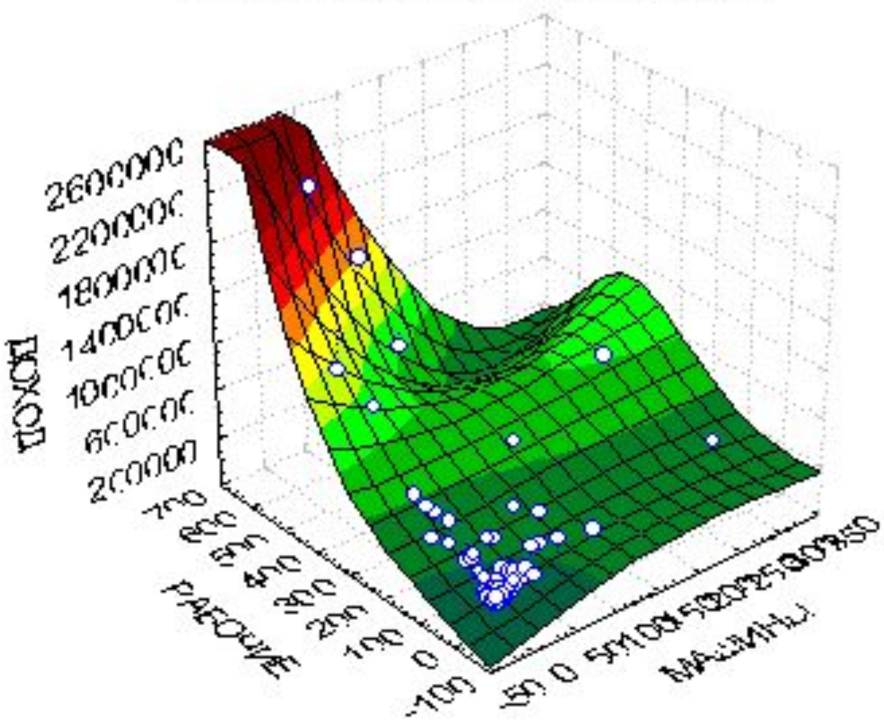
$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

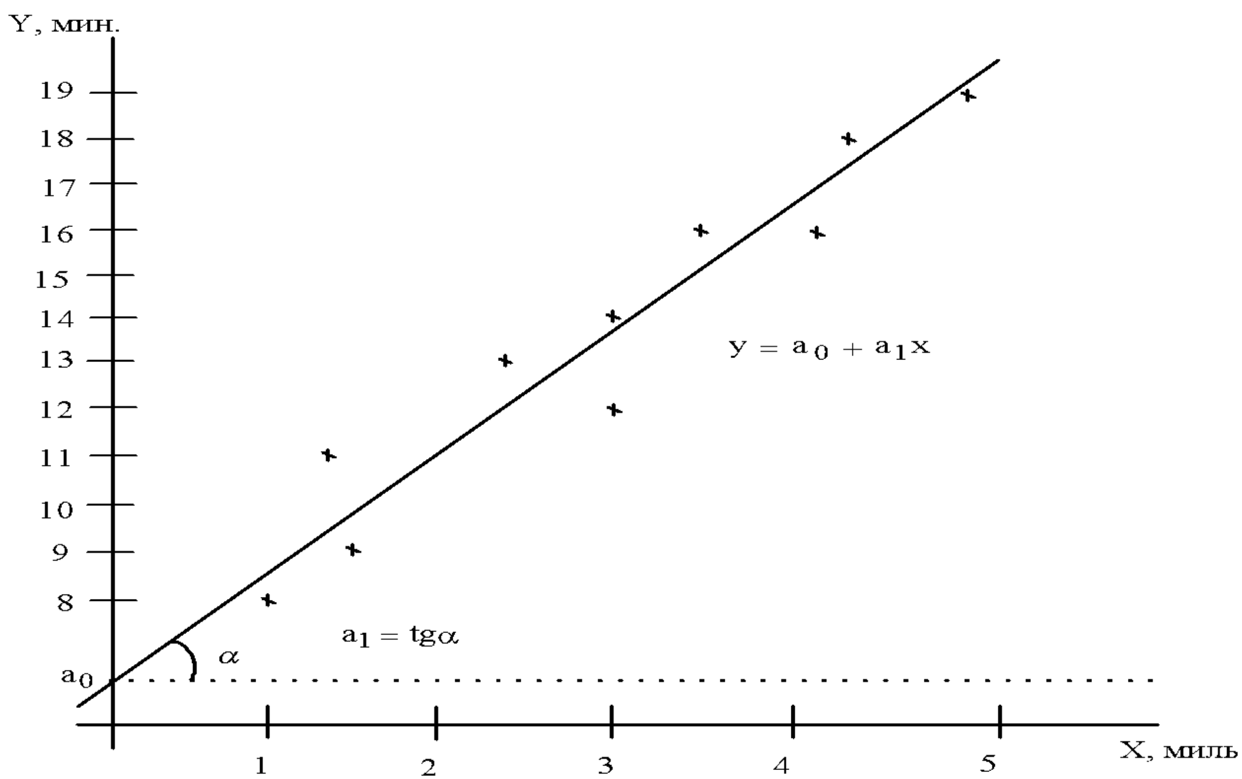
Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ



Смысл коэффициента регрессии в уравнении множественной регрессии состоит в том, то он показывает как в среднем изменится значение *результативного фактора*, если соответствующий *факторный признак* увеличить на единицу *при фиксированных значениях всех остальных факторов*

<u>Пример.</u> В механическом цехе анализируется структура себестоимости продукции и доля покупных комплектующих. Было отмечено, что стоимость комплектующих зависит от времени их поставки. В качестве наиболее важного фактора, влияющего на время поставки, выбрано пройденное расстояние. Провести регрессионный анализ данных о поставках:

Расстояние, миль	3,5	2,4	4,9	4,2	3,0	1,3	1,0	3,0	1,5	4,1
Время, мин	16	13	19	18	12	11	8	14	9	16



№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y_i^{\text{р}}$	$\left(y_i^{\text{р}} - \overline{y}\right)^2$	$\left(y_i - \overline{y}\right)^2$
1	3,5	16	12,25	56,00	15,22	2,63	5,76
2	2,4	13	5,76	31,20	12,30	1,70	0,36
3	4,9	19	24,01	93,10	18,95	28,59	29,16
4	4,2	18	17,64	75,60	17,09	12,15	19,36
5	3,0	12	9,00	36,00	13,89	0,08	2,56
6	1,3	11	1,69	14,30	9,37	17,88	6,76
7	1,0	8	1,00	8,00	8,57	25,27	31,36
8	3,0	14	9,00	42,00	13,89	0,09	0,16
9	1,5	9	2,25	13,50	9,90	13,67	21,16
10	4,1	16	16,81	65,60	16,82	10,36	5,76
Σ	28,9	136	99,41	435,30	–	112,42	122,40

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_p),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon,$$

где Y – результирующий признак (отклик, случайная зависимая переменная);
X – фактор (неслучайная независимая переменная);
ε – случайная переменная, характеризующая отклонение фактора X от линии регрессии (остаточная переменная).

Уравнение регрессии в общем виде выглядит так:

$$y_x = \varphi\left(x, b_0, b_1, \dots, b_p\right),$$

Где x – значения величины X;
$y_x = M_x(Y)$;
$b_0, b_1, \dots, b_p$ - параметры функции регрессии φ