Построение графиков функций содержащих знак модуля для учащихся гуманитарного класса.

Учитель математики
Восточной гимназии
Дудрова И. А.

График функции y = |x|

а) Если x≥0, то |x| = x функция y = x, т.е. график совпадает с биссектрисой первого координатного угла.

б) Если x<0, то |x| = - x и y = - x. При отрицательных значениях аргумента x график данной функции – прямая y = -x, т.е. биссектриса второго координатного угла.

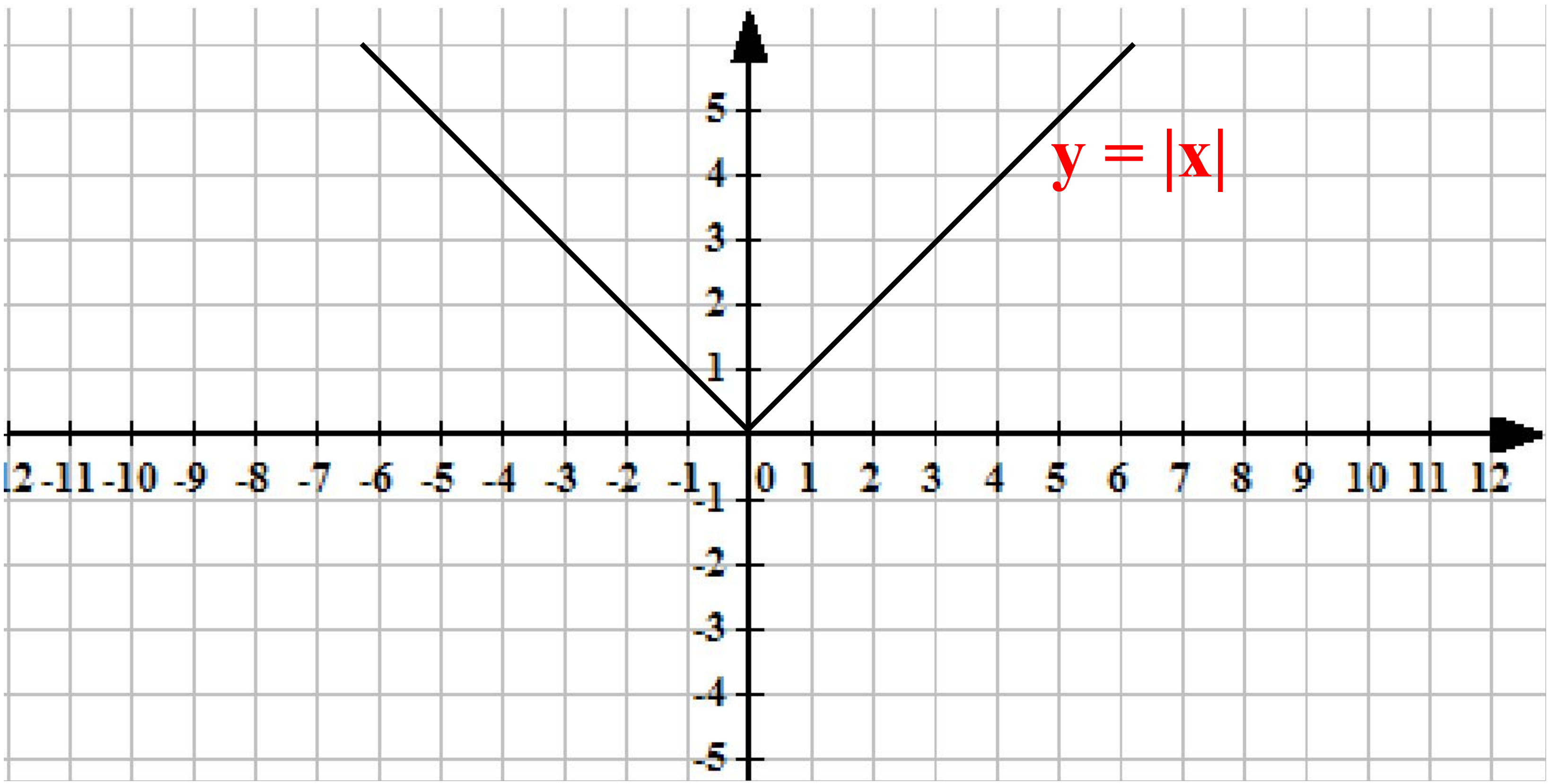


График функции y = - |x|

Получается симметричным отображением графика y = |x| относительно оси x.

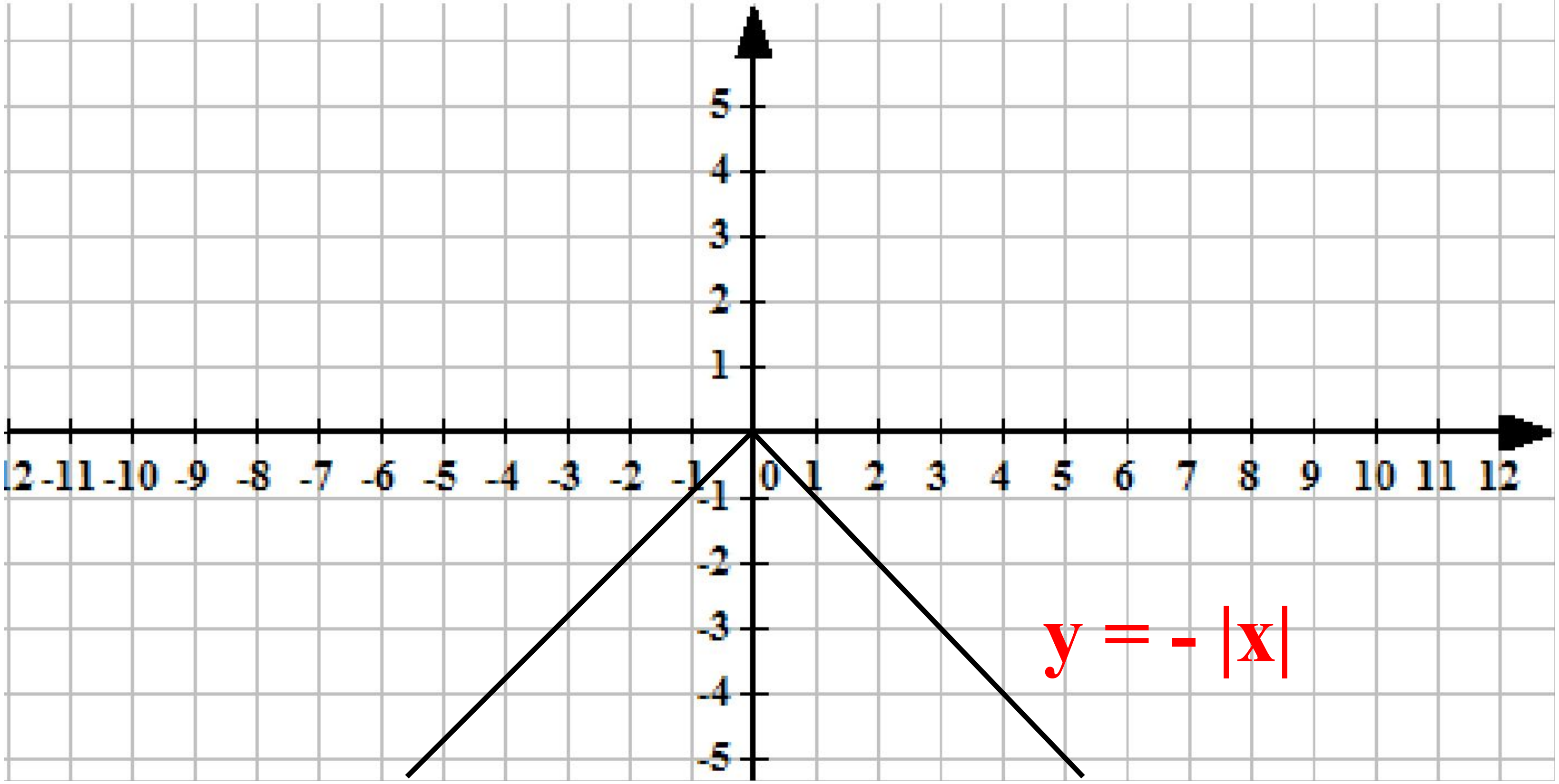


График функции y = |x| + a

График функции y=|x|+a получается параллельным переносом графика y=|x| в **положительном направлении** оси y на a единиц отрезка **при a>0** и в **отрицательном направлении** на a единиц **при a<0.**

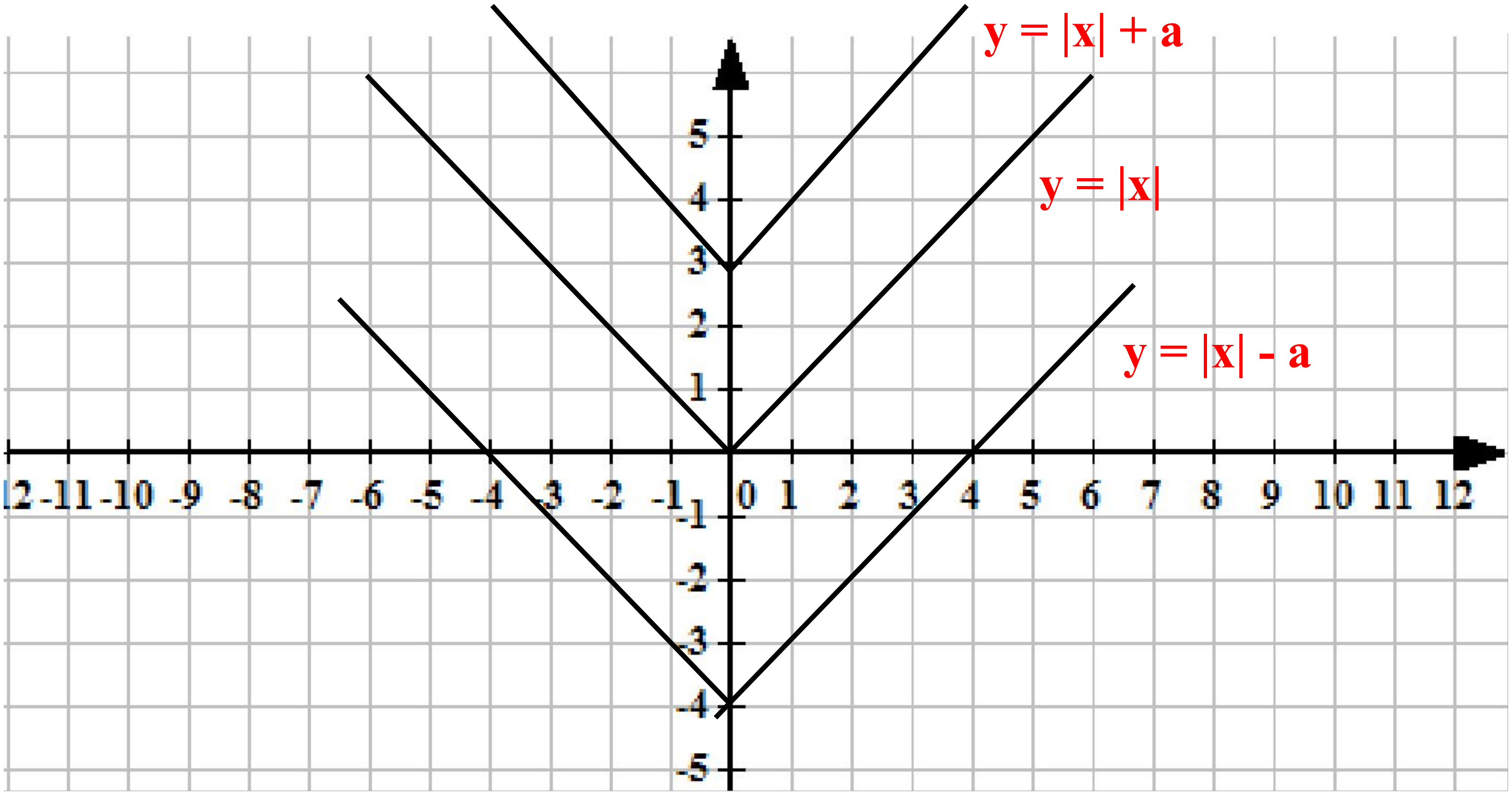


График функции y = a|x|

График функции y=a|x| получается **растяжением** графика y=|x| вдоль **оси y в a раз** при a>1 и **сжатием** вдоль этой **оси в 1\a раз** при 0<a<1.

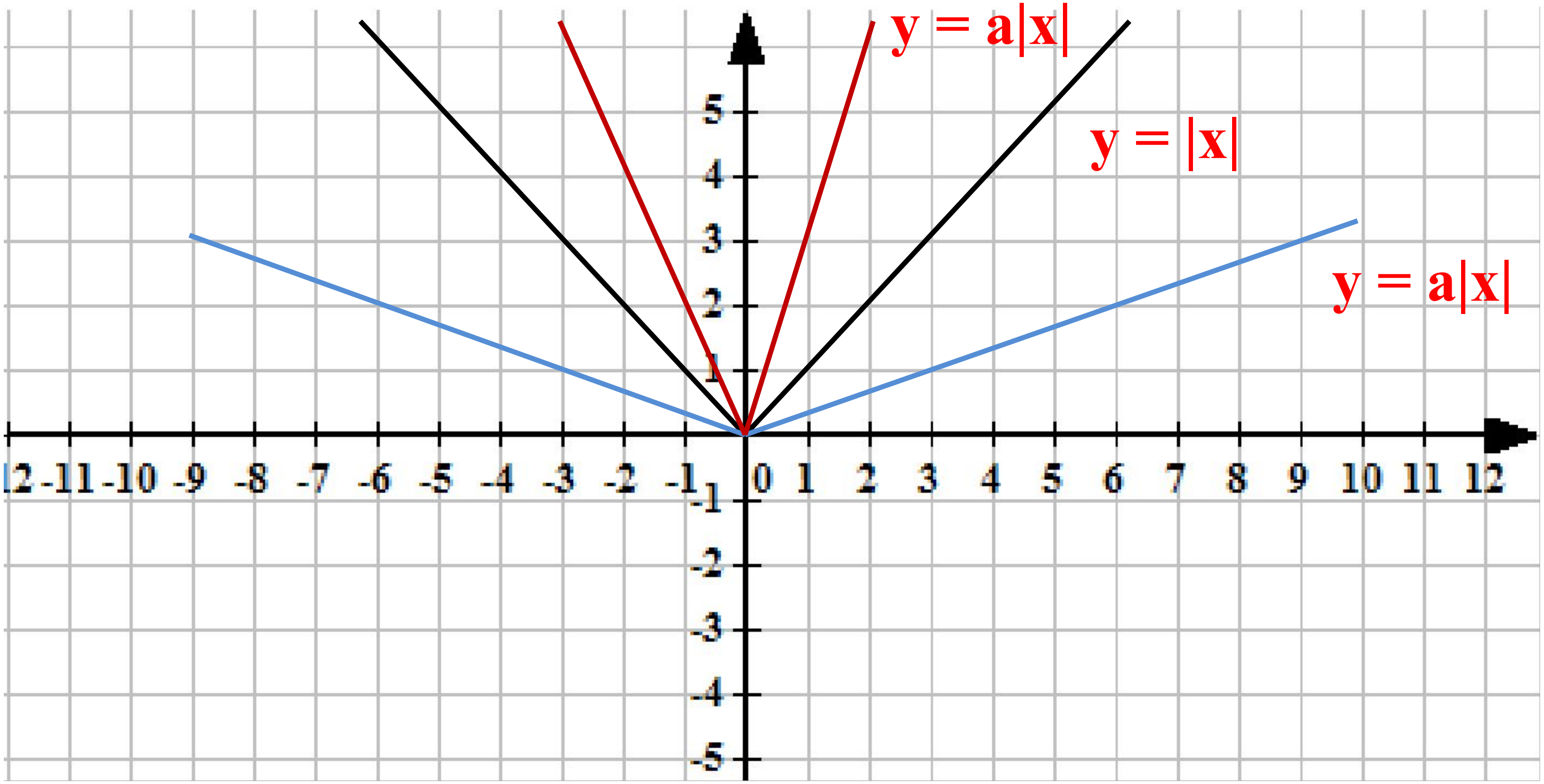
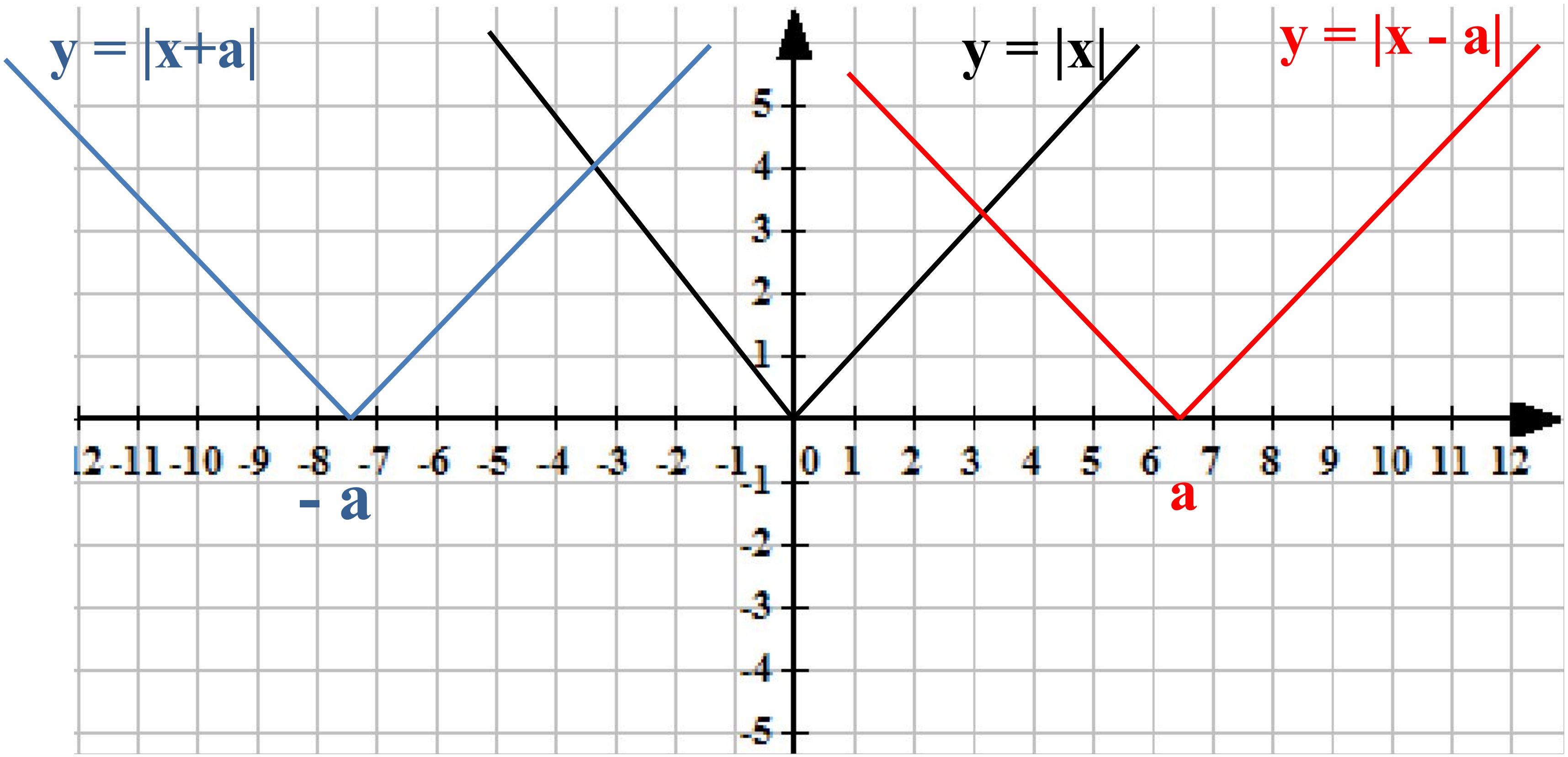


График функции y = |x+a|

График функции y = |x+a| получается параллельным переносом графика y=|x|

в отрицательном направлении от оси x **на |a|** при a>0 и

в положительном направлении на |a| при a<0.



Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

1 способ.

Раскрываем $|x| = x$ **при $x \geq 0$,** получаем график $\mathbf{y = x^2 - 4x + 3}$.

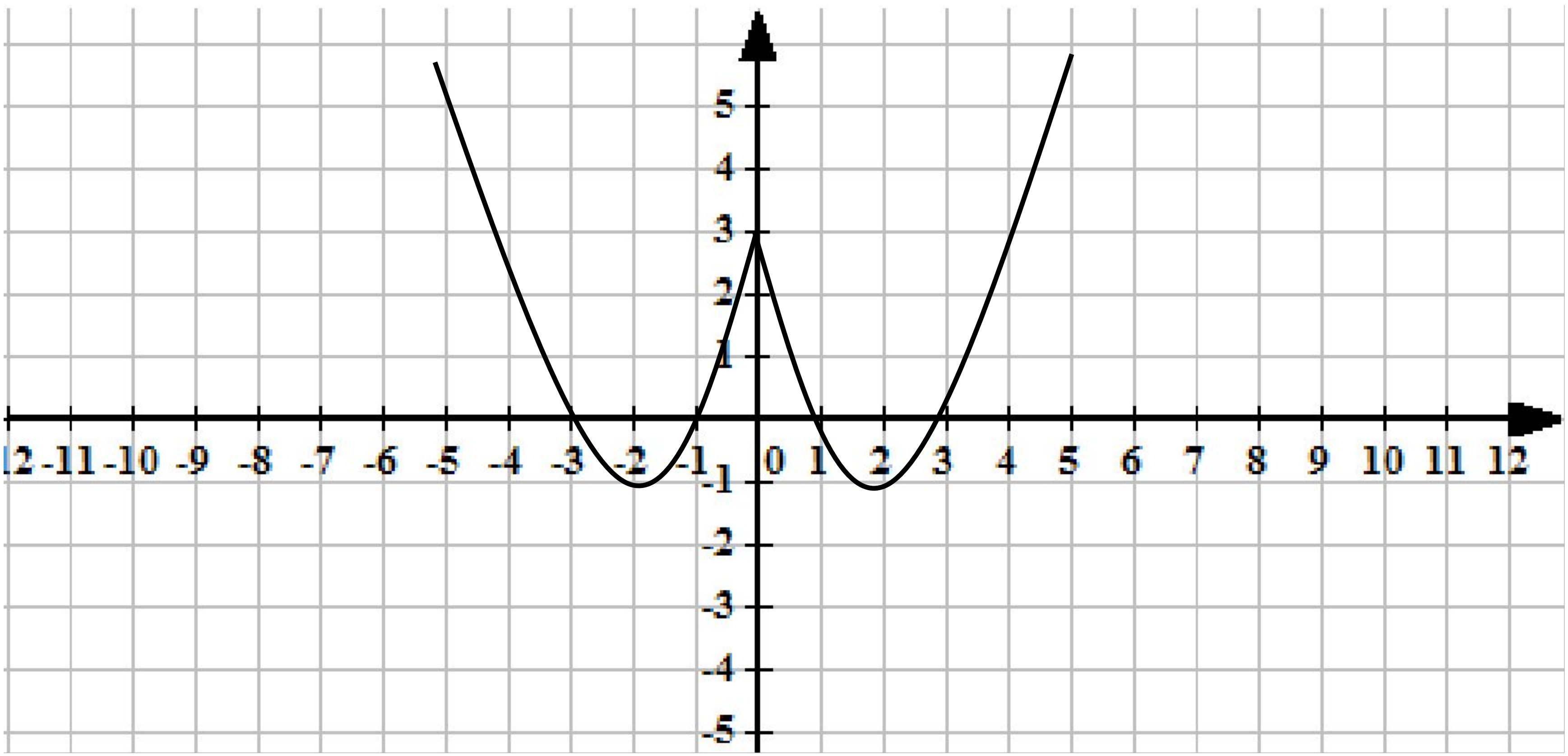
При $x<0$, $|x| = -x$, получаем график $\mathbf{y = x^2 + 4x + 3}$.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + 4x + 3, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Строим кусочно – заданную функцию по алгоритму:

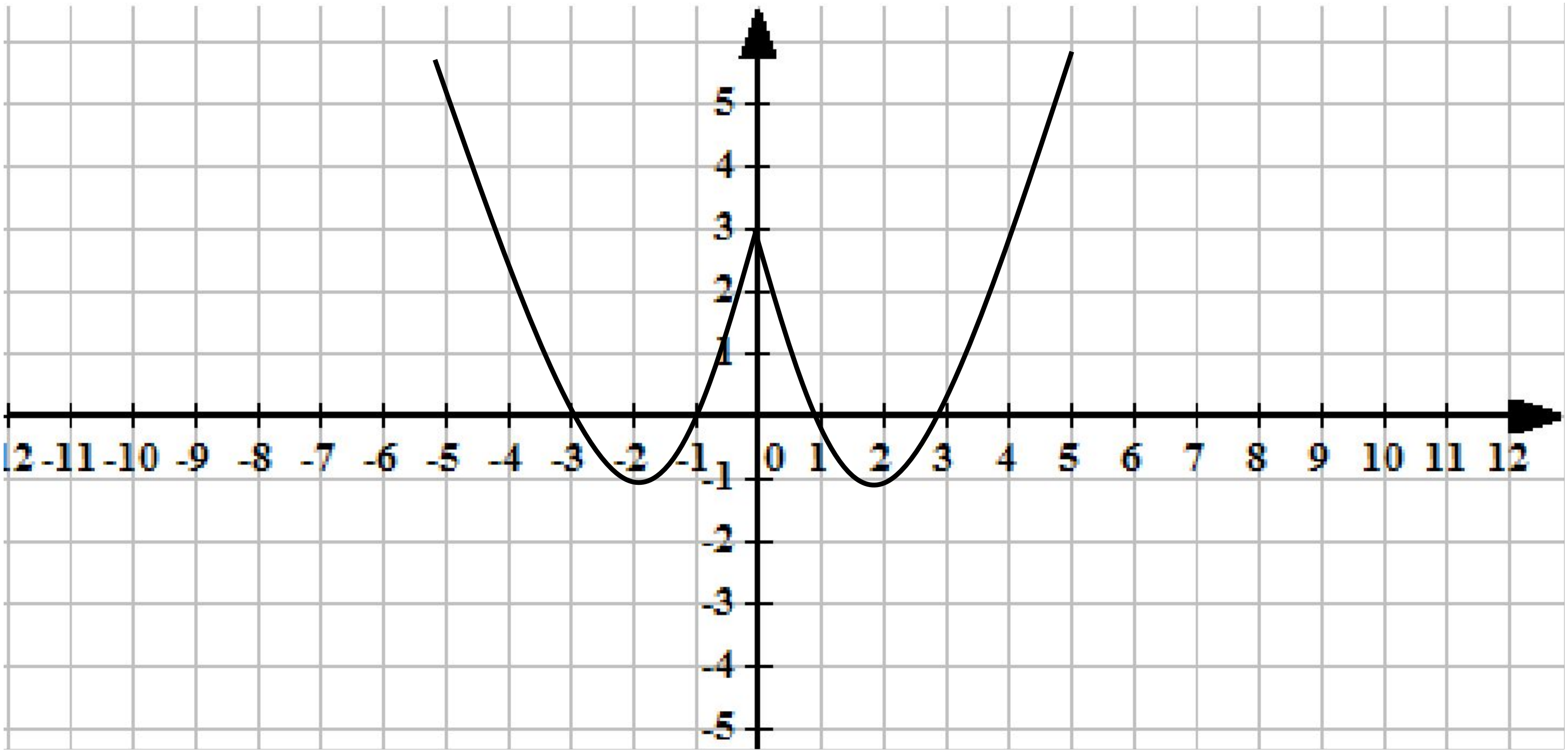
1. Находим вершину параболы для каждой функции.
2. Находим точки пересечения каждой параболы с осью х.
3. Строим параболы по заданным условиям.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, если \; x \geq 0, \\ x^2 + 4x + 3, если \; x < 0. \end{cases}$$



2 способ.

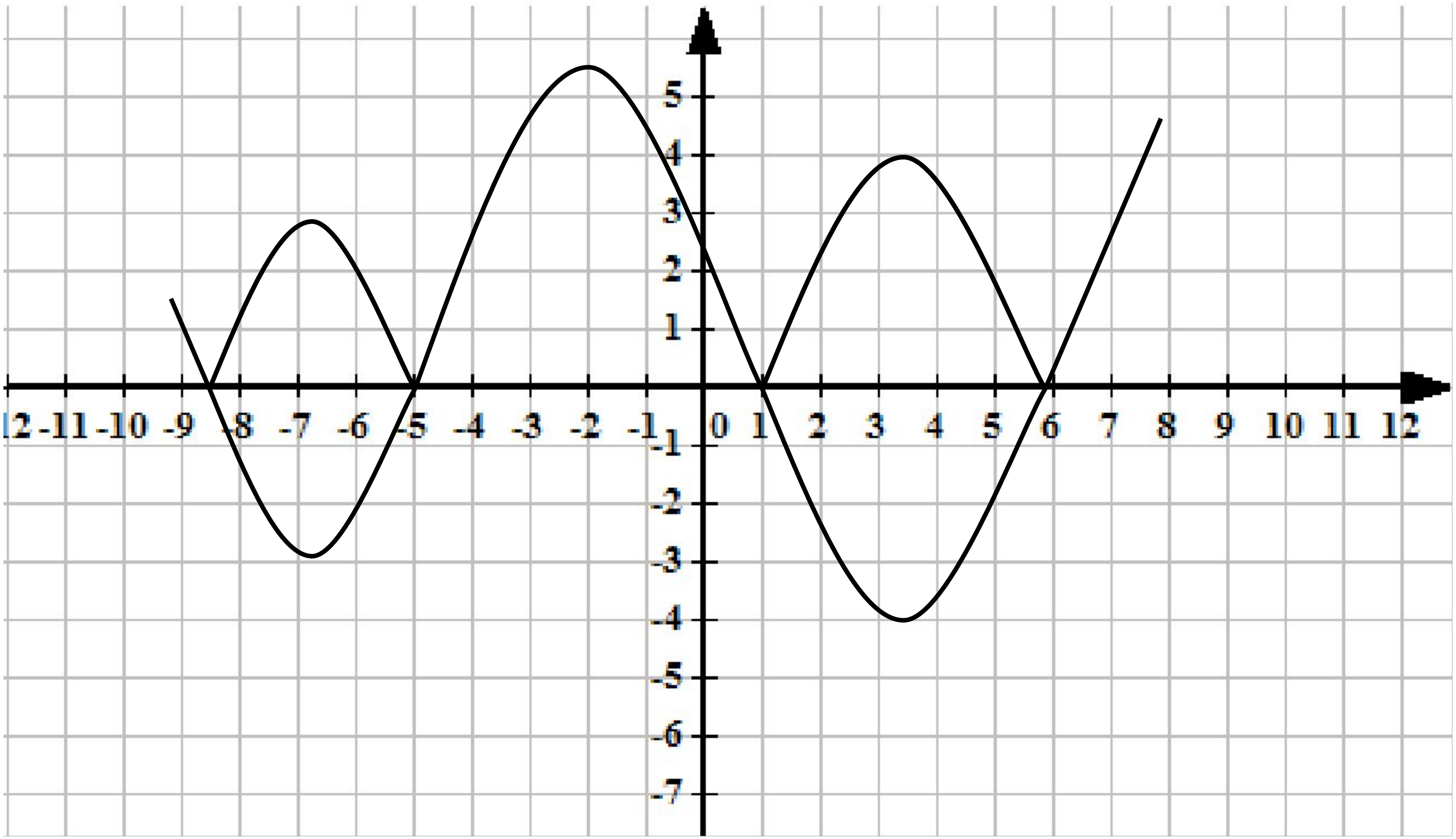
Если рассмотрим график **$y = x^2 - 4x + 3$ при $x \geq 0$ и отобразить его относительно оси ОУ мы получим тот же самый график.**



Для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно:

1.Построить график функции $y = f(x)$;

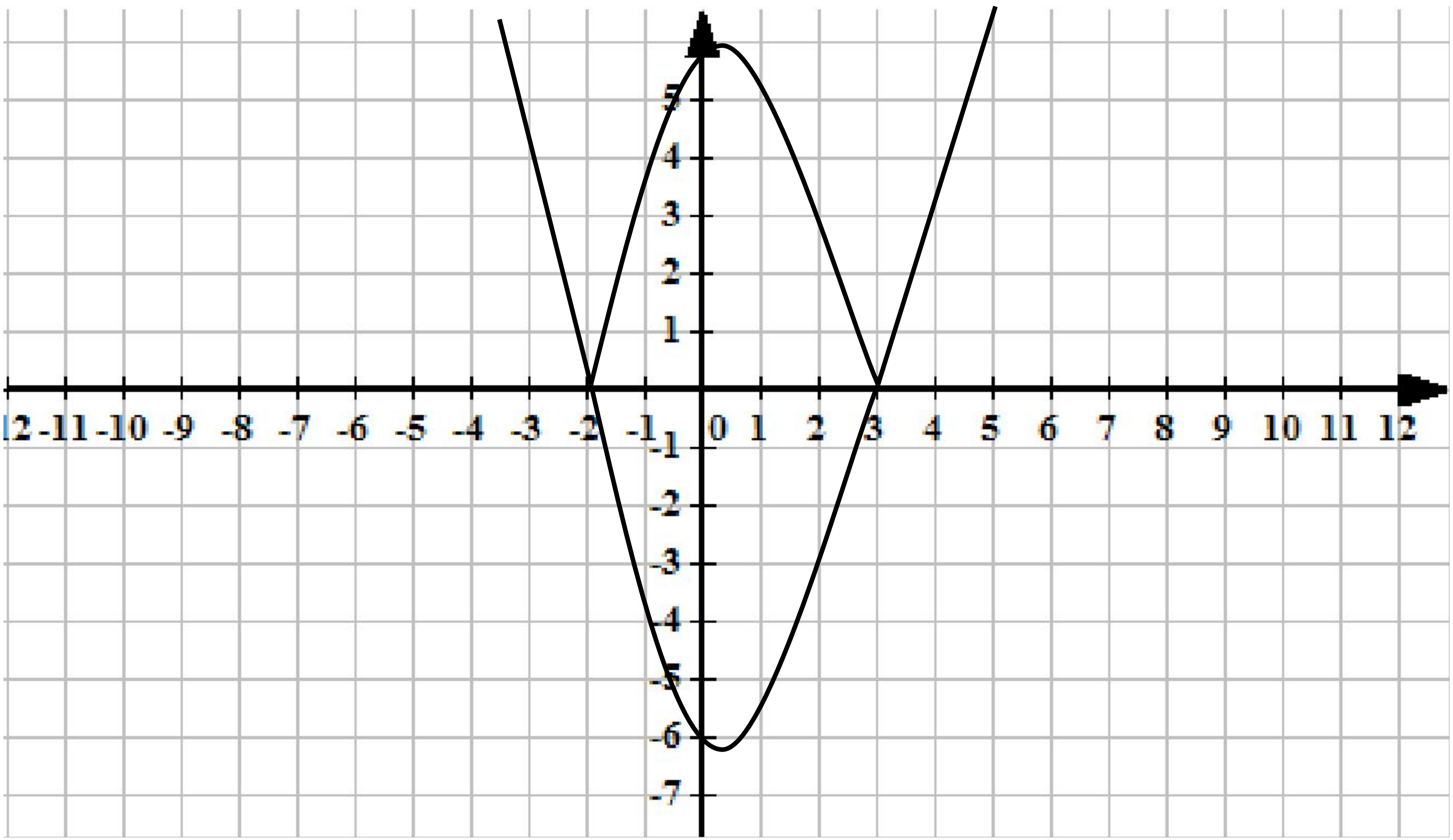
2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где $f(x) < 0$, симметрично отражаем относительно оси абсцисс.



Построить график функции $y = |x^2 - x - 6|$

1.Построим график функции
$y = x^2 - x - 6$

2. Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаем симметрично относительно оси ОХ.



Построить график функции $y = |x + 3| + |2x + 1| - x$

Строить график будем с помощью раскрытия модуля.

Алгоритм построения:

1. Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю и находим точки, в которых подмодульные выражения, входящие в уравнение функции меняют знак.
2. Наносим эти точки на ось x и выделяем промежутки, в которых подмодульные выражения сохраняют знак.
3. Раскрываем модуль на каждом промежутке и получаем соответствующие уравнения функции.
4. Строим график на каждом промежутке.

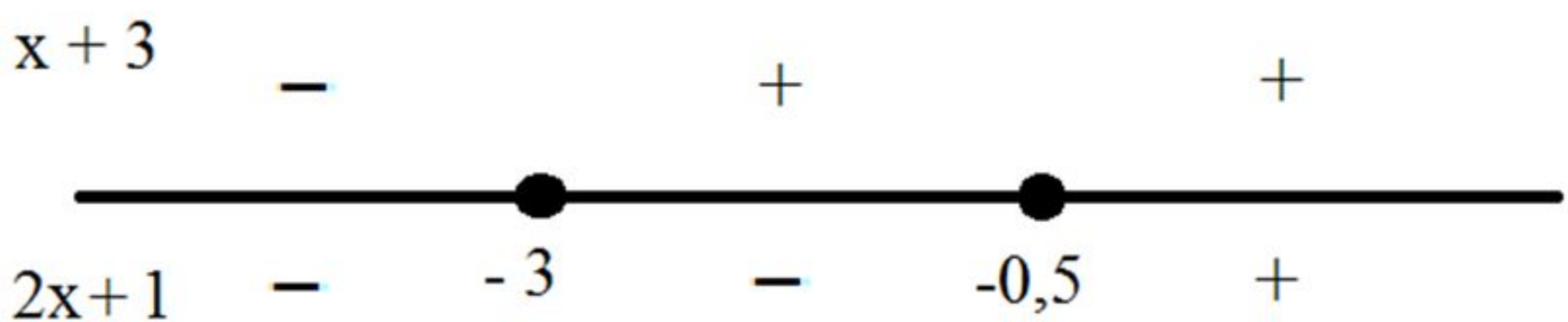
y = |x + 3| + |2x + 1| - x

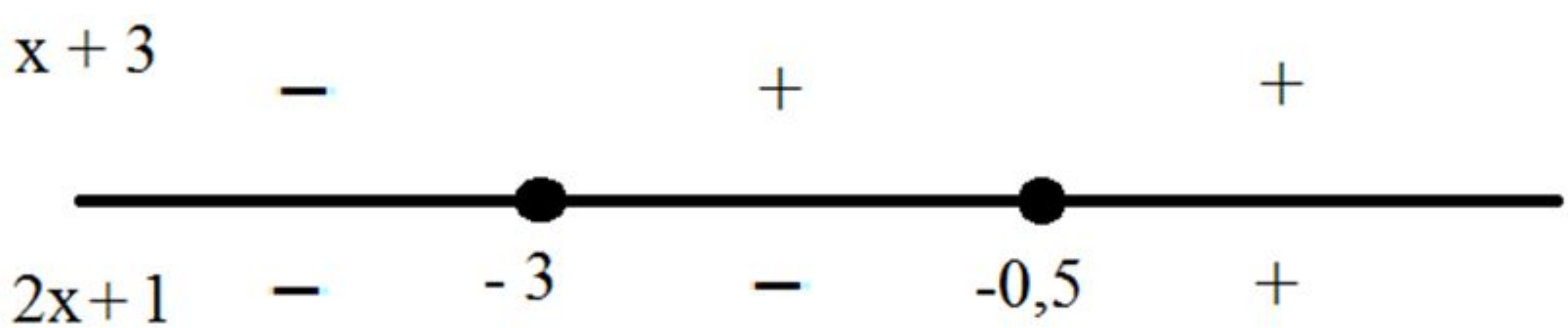
1. Приравниваем каждое подмодульное выражение к нулю и находим точки, в которых происходит смена знака:

$$x + 3 = 0;\ x = -3$$

$$2x + 1 = 0;\ x = -0{,}5$$

2. Наносим точки на ось x:





3. При

$$x < -3$$

$$y = -(x+3) - (2x+1) - x = -x - 3 - 2x - 1 - x = -4x - 4$$

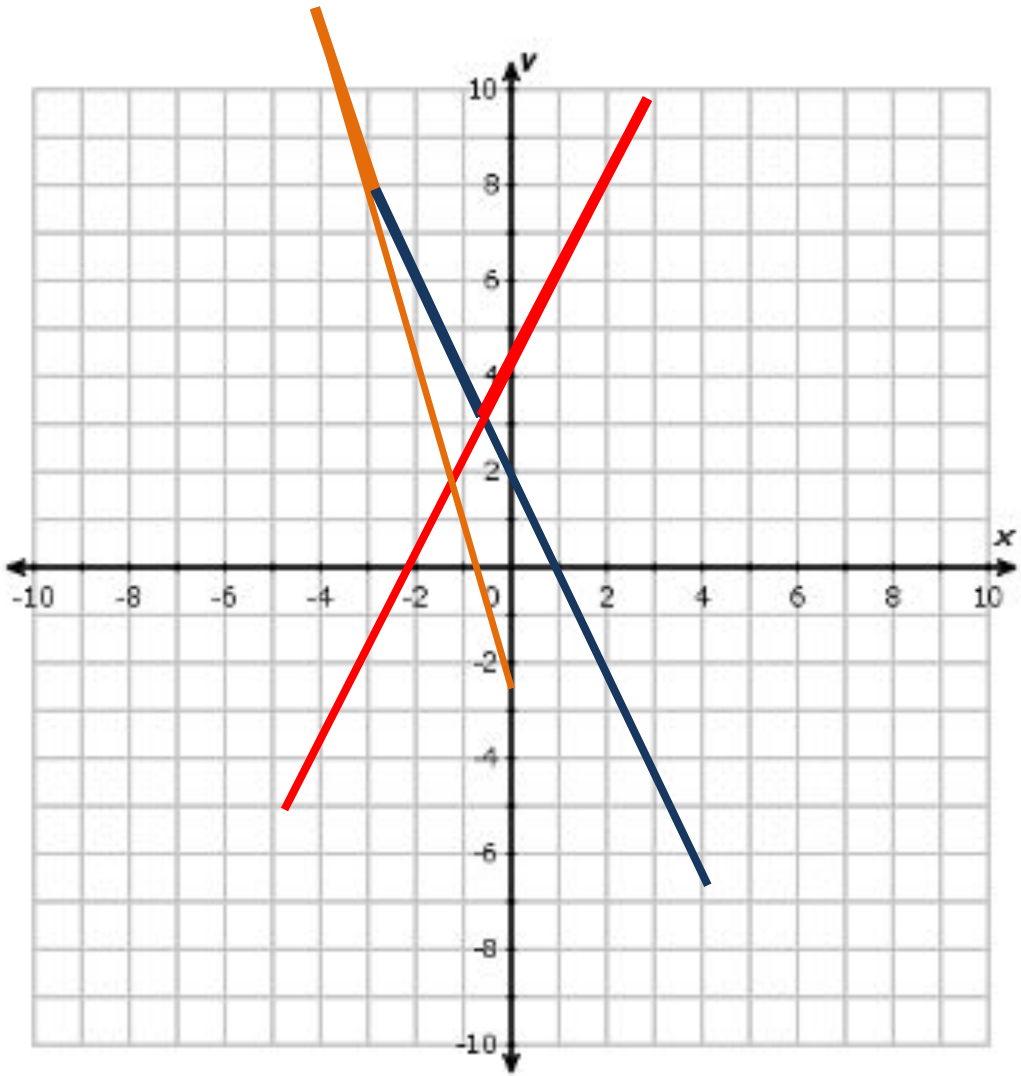
$$-3 \le x \le -0{,}5$$

$$y = (x+3) - (2x+1) - x = x + 3 - 2x - 1 - x = -2x + 2$$

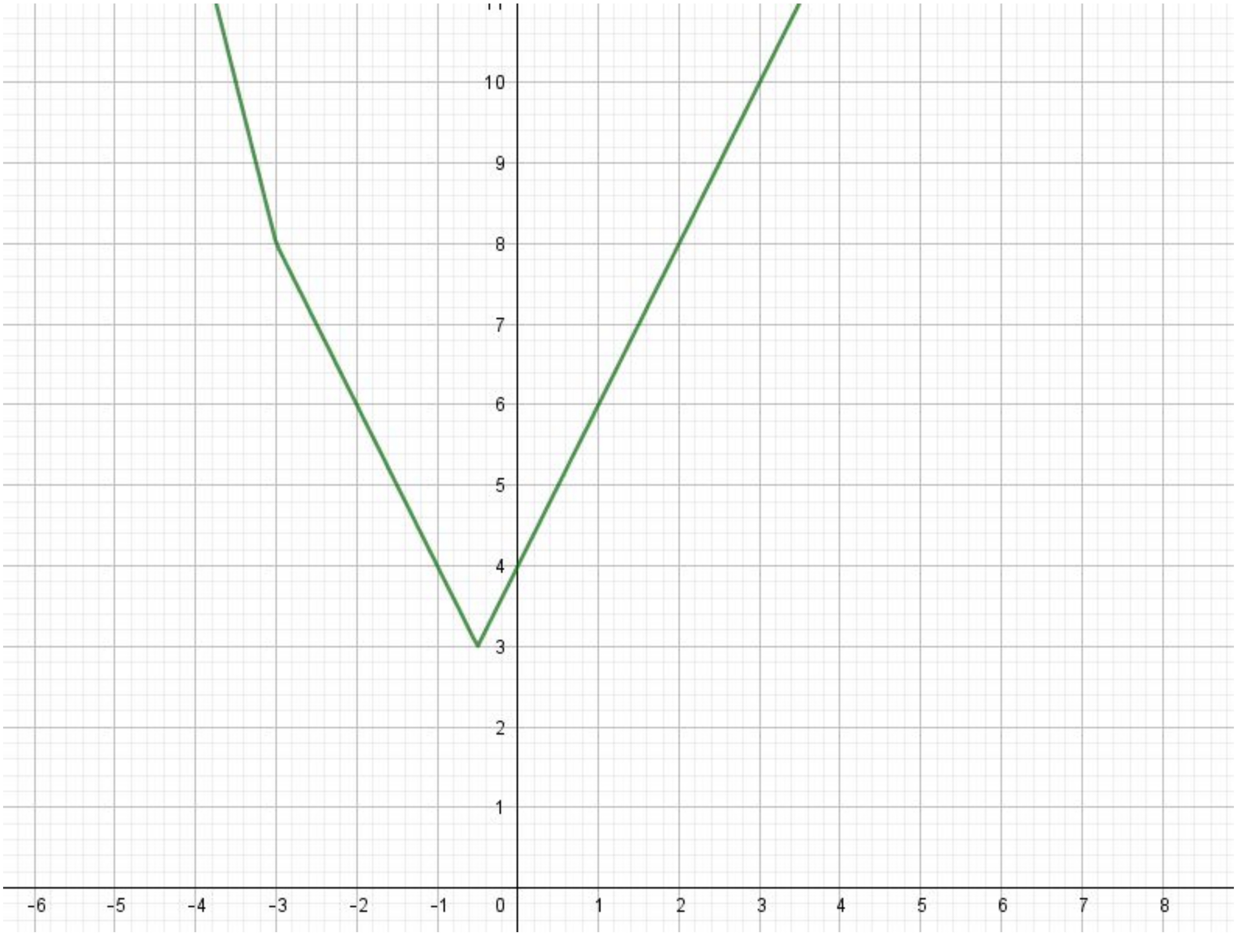
$$x \ge -0{,}5$$

$$y = (x+3) + (2x+1) - x = 2x + 4$$

$$y=\begin{cases}-4x-4, \text{ если } x\le -3\\ -2x+2, \text{ если } -3\le x\le -0{,}5\\ 2x+4, \text{ если } x\ge -0{,}5\end{cases}$$



$$y = |x + 3| + |2x + 1| - x$$



Построить график функции y = | 2|x | - 3|

1. Построить y = **2|x | - 3** , для **2 |x| - 3** > 0 , |x |>1,5 т.е. x< -1,5 и x>1,5

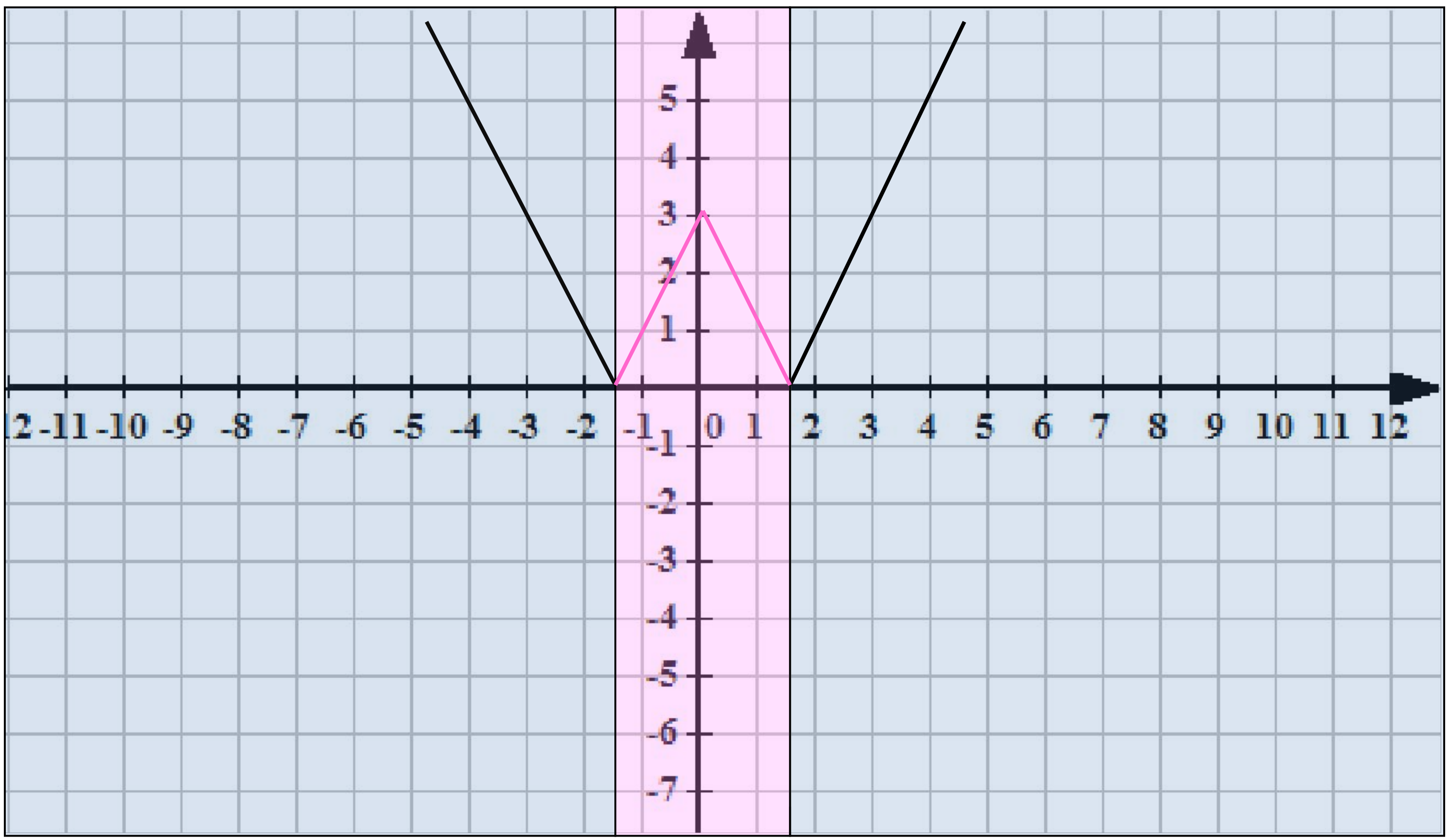
   а) y = **2x - 3** , для x>0

   б) для x<0, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.

2. Построить y = **-2 |x| + 3** , для **2|x | - 3** < 0. т.е. -1,5<x<1,5

   а)y = **-2x + 3** , для x>0

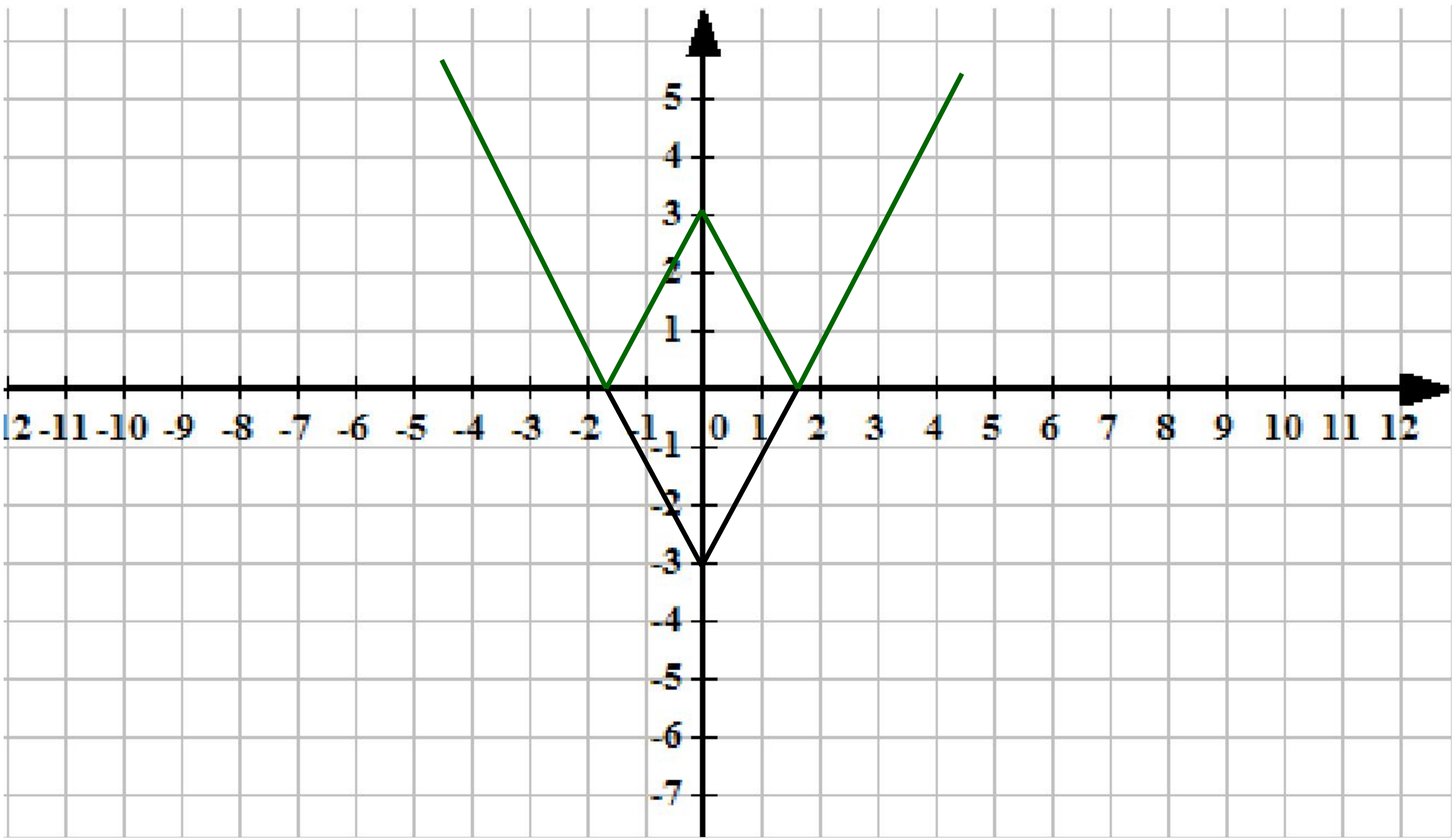
   б) для x<0, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.



$y = | 2|x| - 3|$

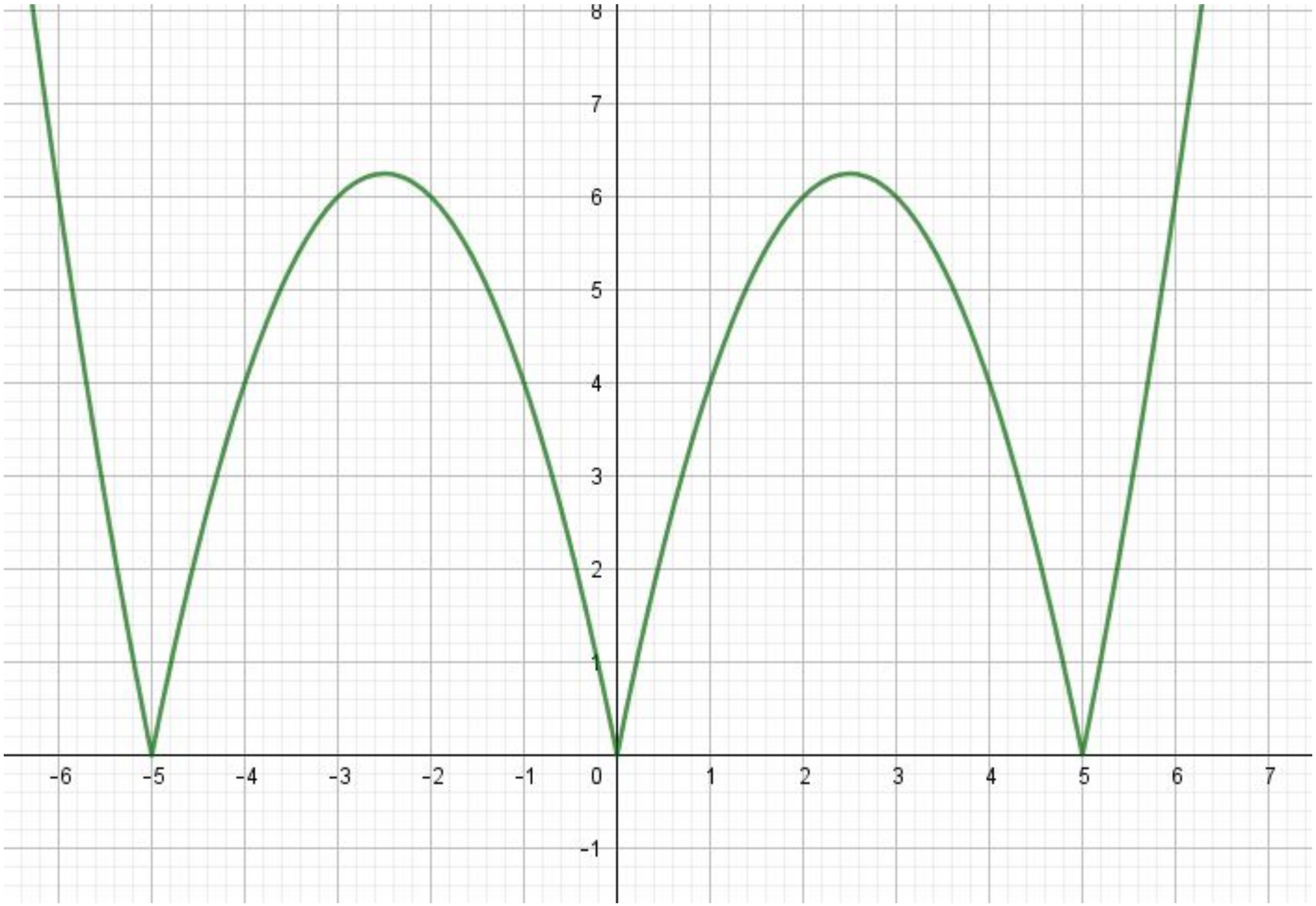
1) Построить y = 2x-3, для x>0.
2) Построить прямую, симметричную построенной относительно оси ОУ.
3) Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаем симметрично относительно оси ОХ.

Сравнивая оба графика, видим что они одинаковые.



$y = | x^2 – 5|x| |$

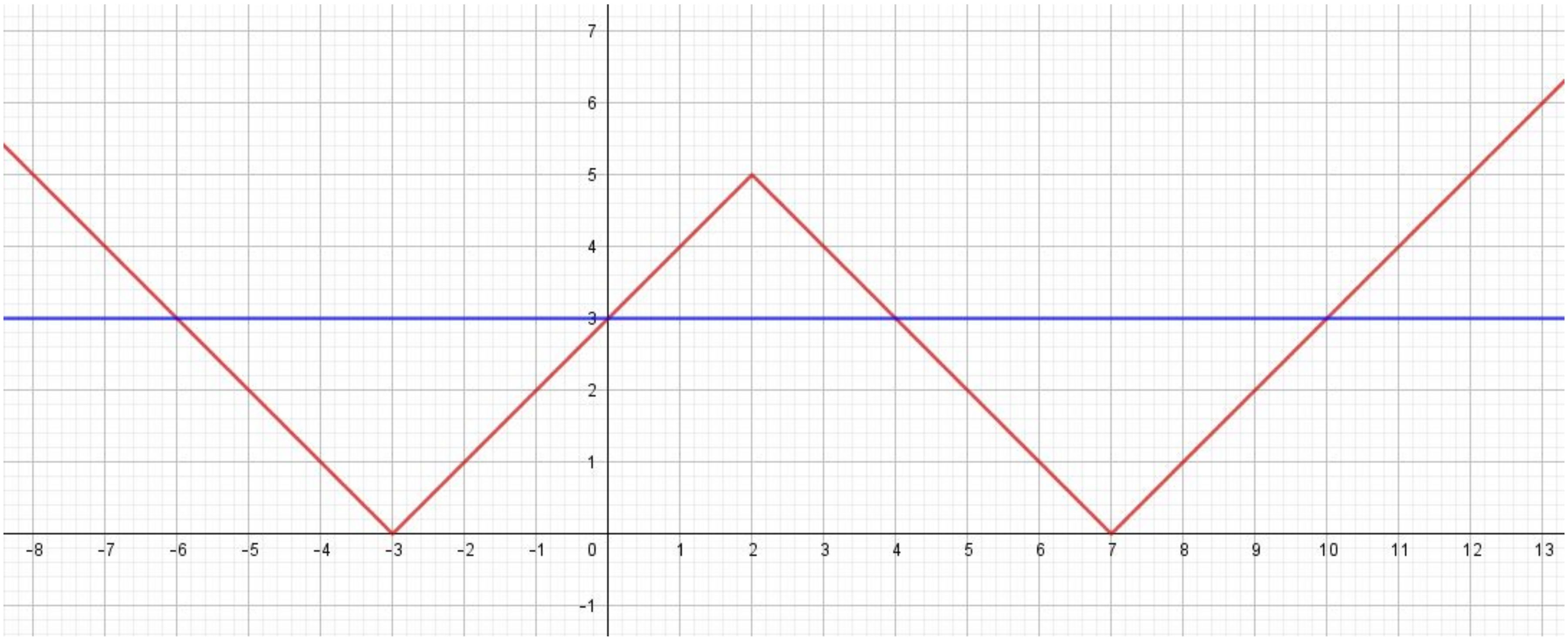
1. Построим $y = x^2 – 5x$, для $x>0$. Вершина параболы в (2,5; -6,25)
2. Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаем симметрично относительно оси ОХ.
3. Для $x<0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.



Найти корни уравнения $||x-2|-5| = 3$.

- Выполняем построение первого (внутреннего) модуля $y = |x-2|$
- Параллельно переносим линии вниз на *5*, чтобы получить график функции $y = |x-2|- 5$
- Отражаем все что находится ниже оси абсцисс. Это и будет искомая функция $y=||x-2|-5|$. Также выполняем построение прямой $y=3$

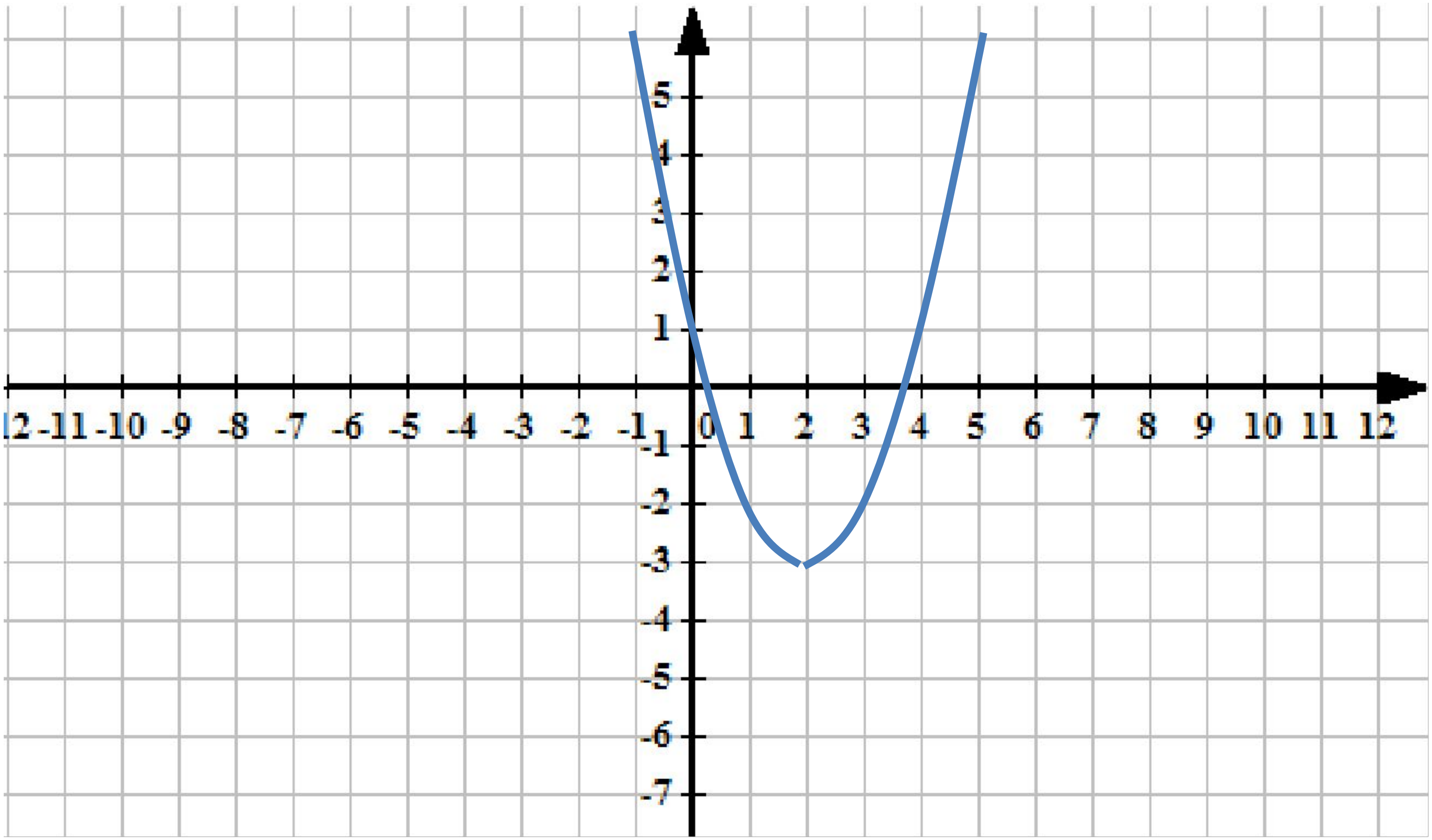
Найти корни уравнения ||x-2|-5|=3.



Нетрудно определить по графику, что решениями уравнения с модулями будут значения *x = - 6; x = 0; x = 4; x = 10*.

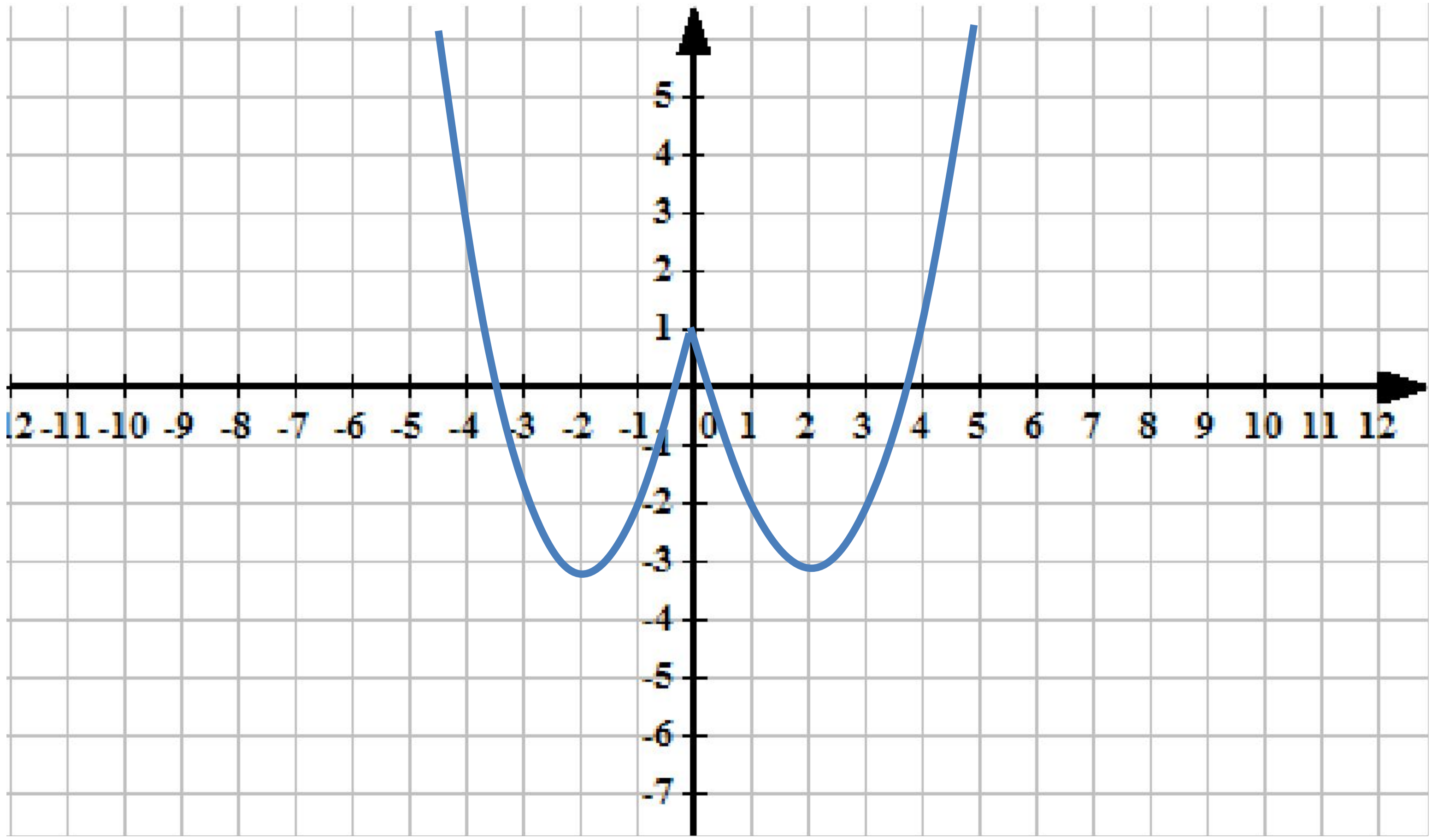
Построить график функции $y = | (|x| - 2)^2 – 3 |$

- Строим график функции $y = (x - 2)^2 – 3$
- Совершаем преобразование: для этого часть графика, расположенную левее оси оу стираем.



Построить график функции $y = |(|x| - 2)^2 - 3|$

- Часть графика, расположенную правее оси оу достраиваем симметрично относительно этой оси. Получаем график функции $y = (|x| - 2)^2 - 3$



Построить график функции $y = |\,(|x| - 2)^2 - 3\,|$

- Часть графика, расположенную ниже оси ох отображаем симметрично относительно этой оси.

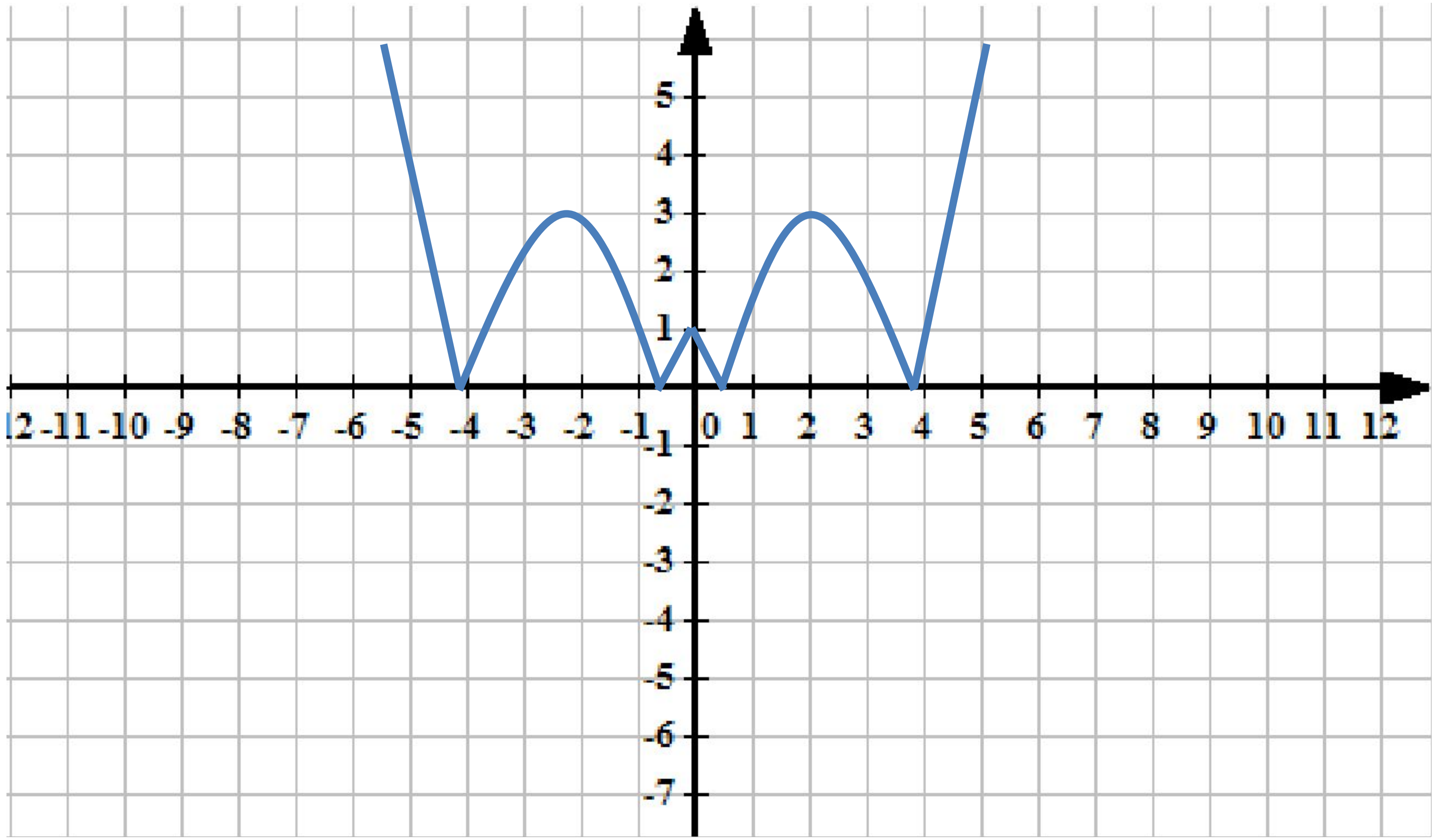


График неравенства $| y - 2x - 1| + 2|x| \leq 3$

- **Задача.** Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства.
- Раскроем модули. Для этого каждое подмодульное выражение приравняем к нулю: $y - 2x - 1 = 0$; $y = 2x + 1$

  $x = 0$

Подмодульные выражения меняют знак при переходе через прямые $y = 2x + 1$ и $x = 0$.

Выводы:

- **Для построения графика функции $y = f\,|(x)|$:**

1.Построить график функции $y = f(x)$ для $x>0$;

2.Построить для $x<0$ часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ.

- **Для построения графика функции $y = |\ f(x)\ |$**

1.Построить график функции $y = f(x)$;

2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где $f(x) <0$, строить кривые, симметричные построенным графикам относительно оси абсцисс.

- **Для построения графика функции $y = |\ f\ |(x)|\ |$**

1. Построить график функции $y = f(x)$ для $x>0$.

2. Строим вторую часть графика, т. е. построенный график симметрично отражаем относительно ОУ

3. Участки получившегося графика, расположенные в нижней полуплоскости, преобразовываем на верхнюю полуплоскость симметрично оси ОХ.

$y = f|(x)|$

$y = f(x)$, $x>0$

Построить часть для x<0, симметричную относительно оси ОУ

$y = |f(x)|$

$y = f(x)$

$y = |f|(x)||$

$y = f(x)$, $x>0$

Построить для x<0 часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ

Часть графика, расположенного в нижней полуплоскости симметрично отобразить относительно оси ОХ