

Тема. Вычисление собственных чисел и собственных векторов

Постановка задачи:

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

Квадратная матрица $n \times n$ имеет m различных собственных чисел λ_i и соответствующих им собственных векторов x_i кратности k_i ,

$$\sum_{i=1}^m k_i = n, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad 1 \leq m \leq n$$

Вычисление собственных чисел и векторов

Идея:

$$Ax_i - \lambda_i x_i = 0$$

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda_i E) = 0$$

$$\det(A - \lambda_i E) = D(\lambda_i) = a_0 + a_1 \lambda_i + a_2 \lambda_i^2 + \dots + \lambda_i^n = 0,$$

или $D(\lambda_i) = (-1)^n \left[\lambda_i^n - \sigma_1 \lambda_i^{n-1} + \sigma_2 \lambda_i^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n \right],$

где σ_i – сумма всех диагональных миноров порядка i .

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

Матрица Фробениуса:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $D(\lambda_i) = \det(P - \lambda_i E) = (-1)^n [\lambda_i^n - p_1 \lambda_i^{n-1} - p_2 \lambda_i^{n-2} - \dots - p_n]$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

Преобразование подобия:

$$P = S^{-1}AS$$

$$\det(P - \lambda_i E) = \det(A - \lambda_i E)$$

$$S = M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1, \quad S^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}\dots M_{n-1}^{-1}$$

$$A^{(k)} = M_{n-k}^{-1}A^{(k-1)}M_{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$A^{(0)} = A, \quad P = A^{(n-1)}$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$M_k : \begin{cases} m_{ij} = e_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq k; \\ m_{kj} = -\frac{a_{k+1,j}^{(n-k-1)}}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}, & j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq k; \\ m_{kk} = \frac{1}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}. \end{cases}$$
$$M_k^{-1} : \begin{cases} m_{ij} = e_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq k; \\ m_{kj} = a_{k+1,j}^{(n-k-1)}, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$\tilde{A}^{(k)} = A^{(k-1)} M_{n-k}, \quad A^{(k)} = M_{n-k}^{-1} \tilde{A}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$A^1, \tilde{A}^1 : \begin{pmatrix} a & a & \dots & a & a & a \\ a & a & \dots & a & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a & a & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2, \tilde{A}^2 : \begin{pmatrix} a & a & \dots & a & a & a \\ a & a & \dots & a & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$\dots, A^{n-1}, \tilde{A}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & a & \dots & a & a & a \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P = A^{n-1}$$

Вычисление собственных векторов

Имеем СЛАУ:

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0,$$
$$\det(A - \lambda_i E) = 0$$

Вариант Данилевского:

$$(P - \lambda_i E)y_i = 0,$$
$$x_i = Sy_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Здесь y_i – собственный вектор матрицы P ,
 x_i – собственный вектор матрицы A .

Вычисление собственных векторов

Собственный вектор матрицы P :

$$y_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ \lambda_i^{n-2} \\ \dots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$n = 3$$

$$|A - \lambda E| = |P - \lambda E| = (-1)^3 [\lambda^3 - p_{11}\lambda^2 - p_{12}\lambda - p_{13}] = 0$$

$$P = S^{-1}AS = M_1^{-1}M_2^{-1}AM_2M_1$$

$$A^0 = A; \quad A^i = M_{3-i}^{-1}A^{i-1}M_{3-i}, \quad i = 1, 2$$

$$y = (\lambda^2, \lambda, 1)^T$$

$$x = Sy = M_2M_1y$$

Пример

$$M_2 : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_{22} = \frac{1}{a_{32}^{(0)}}, m_{2j} = -\frac{a_{3j}^{(0)}}{a_{32}^{(0)}} \end{cases} \quad M_2^{-1} : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_2 = a_3^{(0)} \end{cases}$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^1 = A^0 M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1 = M_2^{-1} \tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$M_1 : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_{11} = \frac{1}{a_{21}^{(1)}}, m_{1j} = -\frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}} \end{cases} \quad M_1^{-1} : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_1 = a_2^{(1)} \end{cases}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 = A^1 M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{32} & \frac{42}{32} & \frac{21}{32} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = M_1^{-1} \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Пример

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = |P - \lambda E| = (-1)^3 [\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3] = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

$$p(x - a)(x - b)(x - c) = p(x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1$$

$$D(\lambda) = p(\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$$

Пример

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 \quad +\lambda^2 \quad +5\lambda \quad +3 \quad \underline{|\lambda+1} \\ -\lambda^3 \quad -\lambda^2 \quad \quad \quad -\lambda^2 + 2\lambda + 3 \\ \hline 2\lambda^2 \quad +5\lambda \quad \quad \quad \\ 2\lambda^2 \quad +2\lambda \quad \quad \quad \\ \hline \quad +3\lambda \quad +3 \quad \quad \\ \quad +3\lambda \quad +3 \quad \quad \\ \hline \quad \quad \quad +0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$$

$$D(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$$

Пример

$$y = (\lambda^2, \lambda, 1)^T$$

$$x = Sy = M_2 M_1 y$$

$$y_1 = y_2 = (\lambda_1^2, \lambda_1, 1) = (\lambda_2^2, \lambda_2, 1) = (1, -1, 1)$$

$$y_3 = (\lambda_3^2, \lambda_3, 1) = (9, 3, 1)$$

$$S = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & \frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & \frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ \frac{6}{32} & \frac{20}{32} & \frac{38}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$x_1 = x_2 = Sy_1 = Sy_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & \frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 6 & 20 & 38 \\ \frac{32}{32} & \frac{32}{32} & \frac{32}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Sy_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & \frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 6 & 20 & 38 \\ \frac{32}{32} & \frac{32}{32} & \frac{32}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$