Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Основные понятия теории числовых рядов***

Глава III. Числовые ряды

§14. Основные понятия теории числовых рядов

1. Основные определения

Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выражение вида*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\mathrm{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют ***числовым рядом***.

При этом, члены последовательности $\{u_\mathrm{n}\}$ называются ***члена-ми ряда*** (1-м, 2-м, …, *n*-м (общим членом))

Если начиная с некоторого номера N для членов ряда справедливо равенство

$$u_{\mathrm{N}} = u_{\mathrm{N}+1} = u_{\mathrm{N}+2} = \ldots = 0 ,$$

то ряд называют ***конечным***. В противном случае ряд называется ***бесконечным*** **.**

Ряд $\sum u_{\mathrm{n}}$ называют

- ***знакоположительным***, если $u_n \geq 0 , \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- ***знакоотрицательным***, если $u_n \leq 0 , \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- ***знакопостоянным***, если он знакоположительный или знакоотрицательный;
- ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Для ряда $\sum u_n$ запишем последовательность

$$S_1 = u_1\,,\quad S_2 = u_1 + u_2\,,\quad \ldots,\quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n\,,\ \ldots$$

Числа $S_1, S_2, \ldots, S_n$ называют ***частичными суммами ряда*** $\sum u_n$ (1-й, 2-й, …, n-й).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд* $\sum u_n$ *называется* ***сходящимся****, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм* $\{ S_n \}$.

При этом, число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *называют* ***суммой ряда*** $\sum u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n - \nexists\right)$ *то говорят, что ряд* $\sum u_n$ ***расходится*** *и не имеет суммы*.

Если S – сумма ряда $\sum u_n$, то записывают: $\sum u_n = S$.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РЯДОВ

1) Рассматривается в математическом анализе:
Определить, сходится или расходится заданный ряд (говорят: «исследовать ряд на сходимость»)

2) Рассматривается в вычислительной математике:
Найти сумму сходящегося ряда.

Найти точное значение суммы S сходящегося ряда удается редко. Обычно полагают $S \approx S_n$ где n выбирают так, чтобы

$$|R_n| = |S - S_n| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ заранее задано}).$$

Число R_n называют ***остатком ряда***.

2. Основные свойства числовых рядов

ТЕОРЕМА 1.

Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) ***Произведением ряда*** $\sum u_n$ ***на число*** $c \in \mathbb{R}$ *называется ряд*

$$\sum c \cdot u_n .$$

2) ***Суммой (разностью) рядов*** $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *называется ряд*

$$\sum (u_n + v_n) \quad [\, \sum (u_n - v_n) \,].$$

ОБОЗНАЧАЮТ: $c \cdot \sum u_n$ – произведение ряда на число c ;

$\sum u_n \pm \sum v_n$ – сумма (разность) рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$

ТЕОРЕМА 2 (об арифметических действиях над сходящимися рядами)

Если ряд $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* U,

ряд $\sum v_n$ *сходится и его сумма равна* V,

то а) *ряд* $\sum cu_{\mathrm{n}}$ – *сходится и его сумма равна* cU ($\forall c \in \mathbb{R}$);

б) *ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *сходится и его сумма равна* $U \pm V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЯ теоремы 2.

1) *Если* $\sum u_n$ *расходится, то* $\forall c \neq 0$ $(c \in \mathbb{R})$ *ряд* $\sum cu_{\mathrm{n}}$ – *тоже расходится*.

2) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится, а ряд* $\sum v_n$ *расходится, то ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *расходится*.

ТЕОРЕМА 3 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд $\sum u_{\mathrm{n}}$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ теоремы 3 (достаточное условие расходимости ряда)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то ряд* $\sum u_{\mathrm{n}}$ *расходится.*

ТЕОРЕМА 4 (закон ассоциативности для сходящихся рядов).

Пусть ряд $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* U

Если сгруппировать члены этого ряда, НЕ ИЗМЕНЯЯ ИХ ПОРЯДКА, то полученный в результате этого ряд будет сходиться и иметь ту же сумму U.