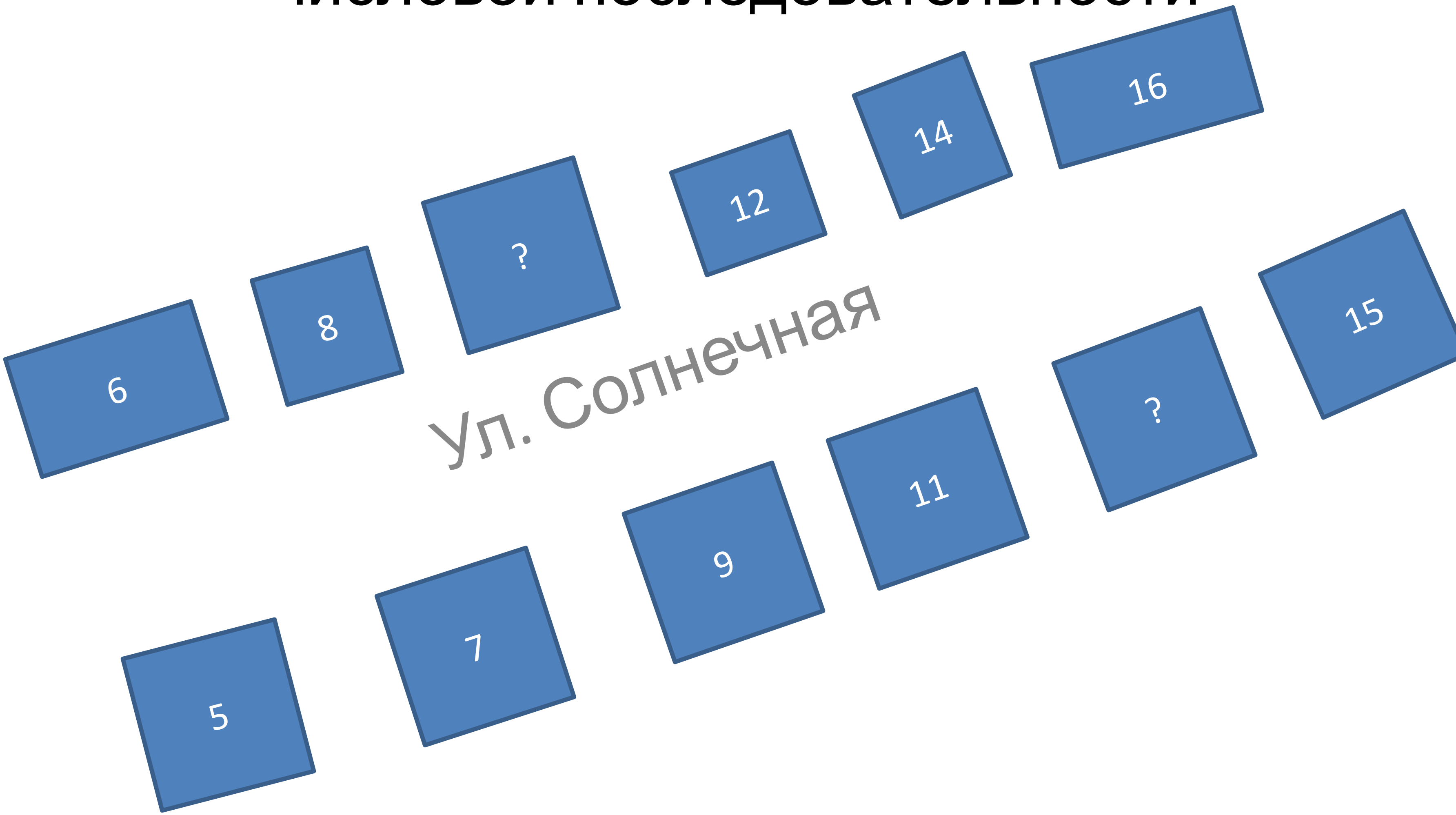
# Арифметическая и геометрическая прогрессии

Лекция 1.Последовательность

# Нумерация домов на улице как пример числовой последовательности



# Последовательности

Номера домов на улице образуют последовательность целых чисел. Улица города имеет две стороны.

На одной стороне улицы стоят дома с четными номерами, а на другой – с нечетными. Запишем последовательность номеров домов нечетной стороны улицы:

1, 3, 5, 7, 9, 11, …...в общем виде обозначим последовательность так: $\{a_n\}$,

Запишем последовательность номеров домов четной стороны улицы:

2, 4, 6, 8, 10, 12, ……в общем виде обозначим последовательность так: $\{b_n\}$

Мы записали по 6 членов каждой последовательности. Каждый член последовательности имеет свой номер.

Чему равен третий член последовательности $\{a_n\}$ ? Ответ: $a_3$ = ….

# Примеры последовательностей

Последовательность положительных четных чисел:

2,  4,  6,  8,  10,  12,  14,  16, ………

Последовательность положительных нечетных чисел:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, …………

Последовательность  квадратов целых чисел:

1, 4, 9, 16, 25, 36, ………..

Добавьте к  каждой последовательности еще по 5 чисел

# Примеры последовательностей

Пример 1. Последовательность дробей с $\frac{1}{n+1}$ выглядит так:

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ .........

Чему равен 13-й член данной последовательности? Ответ: $c_{13} =$ …….

Найдите 17-й, 21-ый, 99-ый члены данной последовательности.

Последовательности часто задают с помощью формулы n – ного члена последовательности. Индекс n обозначает номер члена последовательности.

Пример 2. Последовательность задана формулой: $y_n = n^2 - 3n$

Подставляя в формулу вместо n натуральные числа 1, 2, 3 и т.д., получим значения для членов последовательности:

$y_1 = 1 – 3 = -2$; $y_2 = 4-6 = -2$; $y_3 = 9 – 9 = 0$;

Вычислите самостоятельно члены $y_4$, $y_5$, $y_6$

# Вопросы для закрепления

Какой член последовательности $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ ……. ,

1) следует за членом $a_{99}$ , $a_{200}$ , $a_n$ , $a_{n-1}$ , $a_{n+1}$ , $a_{2n}$

Ответ: …… , ……. , …… , ……, ………, ……..

2) предшествует члену $a_{71}$ , $a_{100}$ , $a_{n-2}$ , $a_{n+3}$ , $a_{3n}$

Ответ: ………, …...., ……, ………, ………,

Последовательности бывают возрастающие и убывающие.

Если $a_{n+1} > a_n$ для любого номера n, то такая последовательность называется возрастающей

Если $a_{n+1} < a_n$ для любого номера n, то такая последовательность называется убывающей.

Последовательности бывают бесконечные и ограниченные.

# РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА

Мы рассмотрели примеры последовательностей, заданных формулами $n$-ного члена.

Иногда последовательности задают по-другому:

каждый следующий член последовательности выражают через предыдущий, например: $a_1 = 5$ $a_{n+1} = a_n^{\ 2} + 5$

Найдем первые 4 члена последовательности:

$a_1=5$ ;

$a_2 = 5^2+5=30$;

$a_3= 30^2+5=905$;

$a_4= 905^2+5=819030$

# Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия – это последовательность $\{a_n\}$, заданная таким образом:

$$a_1 = a; \quad a_{n+1} = a_n + d, n \in N$$

Арифметическая прогрессия – это последовательность, каждый элемент которой, кроме первого, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом $d$.

Это число $d$ называют РАЗНОСТЬ арифметической прогрессии.

ПРИМЕРЫ:

$2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots \quad a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n + 3;\ \ d = 3;$

$17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4 \ldots \quad a_1 = 17; a_{n+1} = a_n + (-3); d = -3;$

$8, 8, 8, 8, \ldots, 8, \ldots \quad a_1 = 8;\ a_{n+1} = a_n + 0;\ \ d = 0;$

Если арифметическую прогрессию оборвать на каком-то $k$ - м элементе, получим конечную арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.

Назовите способ задания арифметической прогрессии.

# Свойства арифметической прогрессии

1. Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия; тогда ее $n$ - й элемент можно задать формулой

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1).$$

Доказательство:
Вспомним определение арифметической прогрессии:

$a_1 = a$ , $\qquad a_{n+1} = a_n + d$ (1)

Найдем разность двух соседних членов прогрессии – перенесем $a_n$ из правой части
выражения в левую со знаком минус, и получим равенство:

$a_{n+1} - a_n = d$ (2)

Это равенство должно выполняться для любого значения n.
Выразим $a_n$ и $a_{n+1}$ через формулу n-ного члена и проверим, будет ли выполняться
равенство (2)

$a_{n+1} = a_1 + d(n+1-1) = a_1 + dn$ ; $\quad a_n = a_1 + d(n-1)$

Найдем разность членов $a_{n+1}$ и $a_n$

$a_{n+1} – a_n = a_1 + d_n - a_1 - d(n-1) = a_1 + dn – a_1 – dn + d = d$ (3)