Понятие логарифма. Свойства логарифма. Десятичные и натуральные логарифмы.

Основные вопросы:

1. Понятие логарифма. Свойства логарифма.
2. Формула перехода к другому основанию.
3. Десятичные и натуральные логарифмы.

Немного истории

Потому-то, словно пена
Опадают наши рифмы
И величие степенно
Отступает в логарифмы.

Борис Слуцкий

Первый изобретатель логарифмов — шотландский барон **Джон Непер (1550—1617)**

Решите уравнение.

Решить уравнение $a^x = в$, где $a > 0$ и $a \neq 1, b > 0$

значит, найти показатель степени,

в который надо возвести основание a,

чтобы получить число b

1) $0{,}5^x = 32$,

$x = -5$.

Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание **0,5**, чтобы получить **32**.

2)

Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание , чтобы получить **27**.

3)

$4^{x+1} + 4^x = 320$,

$4^x(4+1) = 320$,

$4^x = 64$,

$x = 3$.

Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание 4, чтобы получить 64.

Показатель степени – это и есть *логарифм*

(при определенных условиях).

Слово ЛОГАРИФМ происходит от греческих слов λσγοф - число и αριυμοф - отношение

- Первые таблицы логарифмов назывались
- ***«Описание удивительной таблицы логарифмов»*** **(1614 г.)** и
- ***«Устройство удивительной таблицы логарифмов»*** **(1619 г.)**

Определение логарифма

Логарифмом числа **$b>0$** по основанию **$a>0$**, **$a \neq 1$** , называется ***показатель степени***, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Логарифм числа **b** по основанию a обозначается

$$\log_a b$$

ПРИМЕРЫ

1) $\log_2 32$, здесь *b* = 32, *a* = 2, *c* = 5.

$\log_2 32 = 5$, т. к. $2^5 = 32$.

2) $\log_5 0{,}04$,

здесь *b* = 0,04, *a* = 5, *c* = - 2.

$\log_5 0{,}04 = -2$, т. к. $5^{-2} = 1/25 = 0{,}04$.

3) Найти x, такое, что $\log_8 x = 1/3$.

По определению логарифма

$x = 8^{1/3} = 2$.

Основное логарифмическое тождество.

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

Откуда получаем основное логарифмическое тождество

$(b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$

$$a^{\log_a b} = b$$

ПРИМЕРЫ

1) $0{,}5^{\log_{0,5} 6} = 6$.

2) $\sqrt{5}^{\,2\log_5 3} = ((\sqrt{5})^2)^{\log_5 3} =$

$= 5^{\log_5 3} = 3.$

Свойства логарифма

1. Логарифм единицы

$$\log_a 1 = 0$$

2. Логарифм основания

$$\log_a a = 1$$

Свойства логарифма

3. Логарифм произведения равен суммы логарифмов множителей:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Свойства логарифма

4. Логарифм частного равен логарифмов делимого без логарифма делителя:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Свойства логарифма

5.1. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$5.1)\ \log_a x^p = p \cdot \log_a x.$$

Свойства логарифма

5.2. При возведении основания в некоторую (не нулевую) степень логарифм делится на этот показатель степени:

$$5.2)\ \log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b.$$

Свойства логарифма

6. Логарифм корня равен отношению логарифма подкоренного выражения и показателя корня:

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{\log_a b}{m}$$

Свойства логарифма

7. Переход от одного основания к другому

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Следствия

1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b.$

3) $\log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma$

Свойства логарифмов: ПРИМЕРЫ

- 1. Вычислить: $\log_6 12 + \log_6 3$

Решение:

$\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6(12*3) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

Ответ: 2.

- 2. Вычислить: $\log_5 250 – \log_5 2$.

Решение:

$\log_5 250 – \log_5 2 = \log_5(250/2) = \log_5 125 = 3$

Ответ: 3.

- 3. Вычислить: $27^{\log_3 2}$

Решение:

$$27^{\log_3 2} = 3^{3\log_3 2} = 3^{\log_3 8} = 8$$

Ответ: 8.

Натуральный и десятичный логарифмы.

<u>**Десятичным**</u> **называется логарифм, основание которого равно 10. Обозначается lg b, т.е. lg b=log10 b.**

<u>**Натуральным**</u> **называется логарифм, основание которого равно е. Обозначается ln b, т.е. ln b=loge b.**

Свойства натуральных логарифмов

Чтобы по известному десятичному логарифму числа **x** найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа x на десятичный логарифм числа е:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0.43429} \approx 2.30259 \lg x$$

Чтобы по известному натуральному логарифму числа x найти его десятичный логарифм, нужно умножить натуральный логарифм числа x на десятичный логарифм числа е:

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x \approx 0.43429 \ln x$$

Число lg e=0.43429 называется модулем десятичных логарифмов и обозначается через М.

Решение упражнений

$$1)\ \log_5 16 \cdot \log_2 25 =$$

Воспользуемся сначала свойством $\log_a b^n = n \log_a b$

$$= \log_5 2^4 \cdot \log_2 5^2 = 4\log_5 2 \cdot 2\log_2 5 =$$

Теперь перейдем к основанию 2 $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_c a}}$

$$= 8 \cdot \frac{1}{\log_2 5} \cdot \log_2 5 = 8$$

2) Найдите значение выражения

$$3^{2+\frac{\log_5 7}{\log_5 3}} - 9\cdot 4^{\frac{1}{\log_3 4}} = \qquad 3^{2+\log_3 7} - 9\cdot 4^{\log_4 3} =$$

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \qquad \boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_c a}}$$

$$= 3^2\cdot 3^{\log_3 7} - 9\cdot 4^{\log_4 3} =$$

$$= 9\cdot 7 - 9\cdot 3 = 9\cdot(7-3) = 9\cdot 4 = 36$$

3)Найдите значение выражения $\log_a(a^5b^2)$, если $\log_b a = \frac{2}{7}$

Решение:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_c a}$$

$$\log_a(a^5b^2) = \log_a a^5 + \log_a b^2 =$$

$$= 5 + 2\cdot\frac{1}{\log_b a} = \; 5 + 2\cdot\frac{7}{2} = 12$$

Ответ: 12