

**Учимся решать планиметрические задачи.
Подготовка к ЕГЭ. Задание №16.**

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Учитель: Шарова Светлана Геннадьевна,

МБОУ гимназия, г. Урюпинск, Волгоградская область



Блез Паскаль

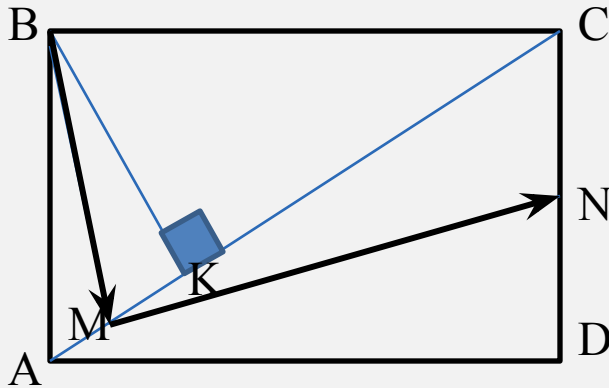
«Каждая решённая мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач»



Задача 1.

В прямоугольнике ABCD опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN – прямой.

Решение. I способ **Векторный метод**

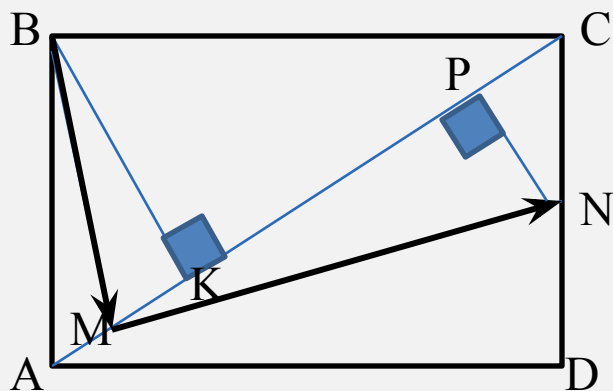


$$\begin{aligned}\overline{BM} \cdot \overline{MN} &= (\overline{BK} + \overline{KM}) \cdot (\overline{MC} + \overline{CN}) = \\ &= (\overline{BK} + \overline{KM}) \cdot \left(\overline{MC} + \frac{1}{2}\overline{CD}\right) = \\ &= (\overline{BK} + \overline{KM}) \cdot \left(\overline{MC} + \frac{1}{2}\overline{BA}\right) = \\ &= (\overline{BK} + \overline{KM}) \cdot \left(\overline{MC} + \frac{1}{2}\overline{BK} + \frac{1}{2}\overline{KA}\right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overline{BK} \cdot \overline{MC} + \frac{1}{2}\overline{BK}^2 + \frac{1}{2}\overline{BK} \cdot \overline{KA} + \overline{KM} \cdot \overline{MC} + \frac{1}{2}\overline{KM} \cdot \overline{BK} + \frac{1}{2}\overline{KM} \cdot \overline{KA} = \\ &= \frac{1}{2}\overline{BK}^2 + \overline{KM} \cdot \overline{MC} + \frac{1}{2}\overline{KM} \cdot \overline{KA} = \frac{1}{2}\overline{BK}^2 + \overline{KM} \cdot (\overline{MK} + \overline{KC}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overline{KA} \cdot \overline{KA} = \\ &= \frac{1}{2}\overline{BK}^2 + \frac{1}{2}\overline{KA} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overline{KA} + \overline{KC}\right) + \frac{1}{4}\overline{KA}^2 = \frac{1}{2}\overline{BK}^2 + \frac{1}{2}\overline{KA} \cdot \overline{KC} = \\ &= \frac{1}{2}|\overline{BK}|^2 + \frac{1}{2}|\overline{KA}| \cdot |\overline{KC}| \cos 180^\circ = \frac{1}{2}|\overline{BK}|^2 - \frac{1}{2}|\overline{BK}|^2 = 0\end{aligned}$$

$BK^2 = KC \cdot KA$ высота, проведенная из вершины прямого угла

II способ. Векторный метод и подобие



$$NP \perp AC$$

$$\triangle CPN \sim \triangle AKB \Rightarrow \frac{PN}{KB} = \frac{CP}{AK} = \frac{CN}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$PN = \frac{1}{2}BK, CP = \frac{1}{2}AK$$

M – середина АК, значит, AM=МК=РС.

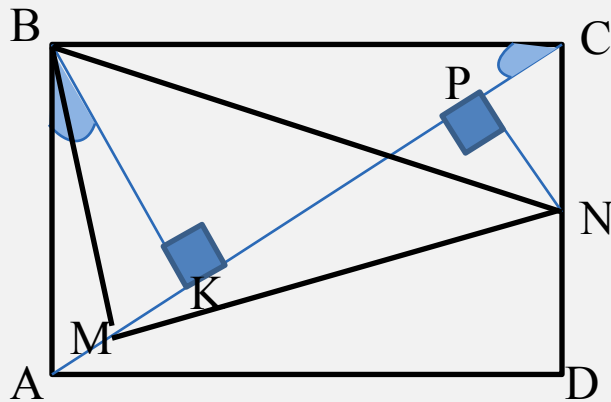
Следовательно, МР=КС.

$$\begin{aligned} \vec{BM} \cdot \vec{MN} &= (\vec{BK} + \vec{KM}) \cdot (\vec{MP} + \vec{PN}) = \vec{BK} \cdot \vec{MP} + \vec{BK} \cdot \vec{PN} + \vec{KM} \cdot \vec{MP} + \vec{KM} \cdot \vec{PN} = \\ &= \vec{BK} \cdot \vec{PN} + \vec{KM} \cdot \vec{MP} = \vec{BK} \cdot \frac{1}{2}\vec{BK} + \frac{1}{2}\vec{KA} \cdot \vec{KC} = \frac{1}{2}|\vec{BK}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{KA}||\vec{KC}|\cos 180^\circ = \\ &= \frac{1}{2}|\vec{BK}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{BK}|^2 = 0 \end{aligned}$$

$$BM \perp MN$$



III способ Применение тригонометрии



Убедимся, что $BN^2 = BM^2 + MN^2$

Пусть $\angle ACB = \angle ABK = \alpha$, $CN = a$, $AB = 2a$

$MP = KC$, $PN = 0,5BK$

$\triangle \triangle PK$

$$BK = 2a \cos \alpha, AK = 2a \sin \alpha, MK = \frac{1}{2} AK = a \sin \alpha$$

$$\triangle ABC: BC = 2a \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\triangle BCN: BN^2 = BC^2 + CN^2 = 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + a^2$$

$$\triangle BMK: BM^2 = MK^2 + BK^2 = a^2 \sin^2 \alpha + 4a^2 \cos^2 \alpha$$

$$\triangle BKC: KC^2 = BC^2 - BK^2 = 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 4a^2 \cos^2 \alpha$$

$$\triangle MPN: MN^2 = MP^2 + PN^2 = KC^2 + PN^2 = 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 4a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} BM^2 + MN^2 &= a^2 \sin^2 \alpha + 4a^2 \cos^2 \alpha + 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 4a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha = \\ &= a^2 + 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{aligned}$$

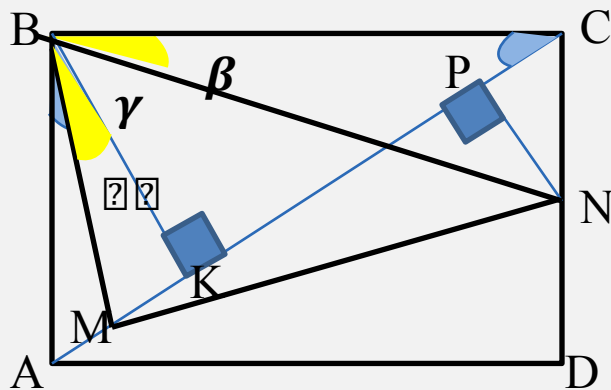
$$BN^2 = a^2 + 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$BN^2 = BM^2 + MN^2 \quad \Rightarrow \angle BMN - \text{прямой.}$$



IV способ

Тригонометрия и подобие



Пусть $\angle ACB = \angle ABK$

$$= \alpha$$

$$\triangle BKC: \sin \alpha = \frac{BK}{BC}$$

$$\triangle ABK: \sin \alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{2MK}{2CN} = \frac{MK}{CN}$$

$$\angle C = \angle K = 90^\circ, \quad \frac{BK}{BC} = \frac{MK}{CN} \Rightarrow \triangle BCN \sim \triangle BKM \Rightarrow$$

$$\angle MBK = \angle NBC = \beta$$

$$\triangle BCN \sim \triangle BKM \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{MK}{CN} = \frac{BM}{BN}$$

Рассмотрим $\triangle BMN$ и $\triangle BKC$

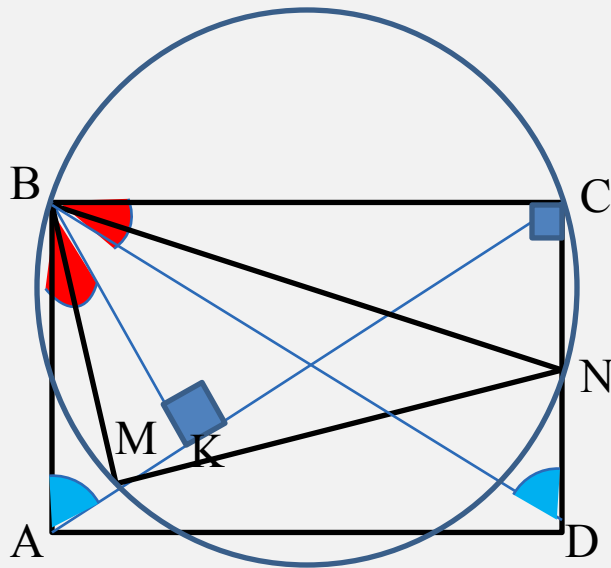
$$\angle MBN = \beta + \gamma, \quad \angle CBK = \beta + \gamma \Rightarrow \angle MBN = \angle CBK, \quad \frac{BK}{BC} = \frac{BM}{BN} \Rightarrow$$

$$\triangle BMN \sim \triangle BKC$$

Значит, $\angle BMN = \angle BKC = 90^\circ$.



V способ. **Подобие и вспомогательная окружность**



$$\triangle BDC \sim \triangle BAC$$

Из условия следует, что BN и BM - медианы

Эти отрезки служат соответственными элементами подобных треугольников.

Отсюда, $\triangle BMC \sim \triangle BNC$, $\angle BMC = \angle BNC$

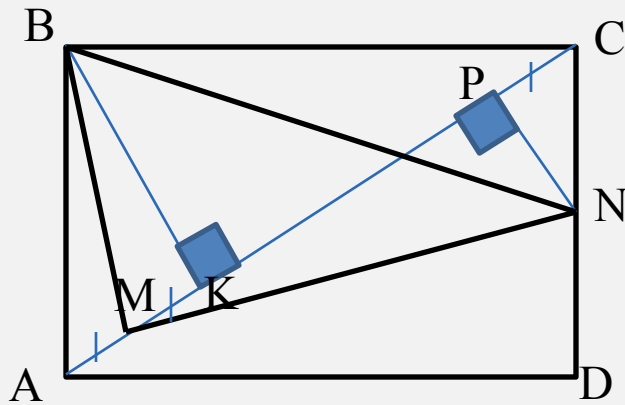
И точки M, N, C, B лежат на одной окружности.

Её диаметр – медиана BN , так как $\angle BCN = 90^\circ$

Таким образом, $\angle BMN = 90^\circ$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр).



VI способ. Обратный ход



Предположим, что $\angle BMN$ - прямой, тогда

$$BN^2 = BM^2 + MN^2$$

$$1) \quad BN^2 = BC^2 + CN^2$$

$$2) \quad BM^2 = BK^2 + MK^2$$

$$3) \quad MN^2 = MP^2 + PN^2$$

$$4) \quad MP = KC, \quad MK = PC$$

Таким образом,

$$BC^2 + CN^2 = BK^2 + MK^2 + MP^2 + PN^2$$

$$BC^2 + CN^2 = BK^2 + MK^2 + KC^2 + PN^2$$

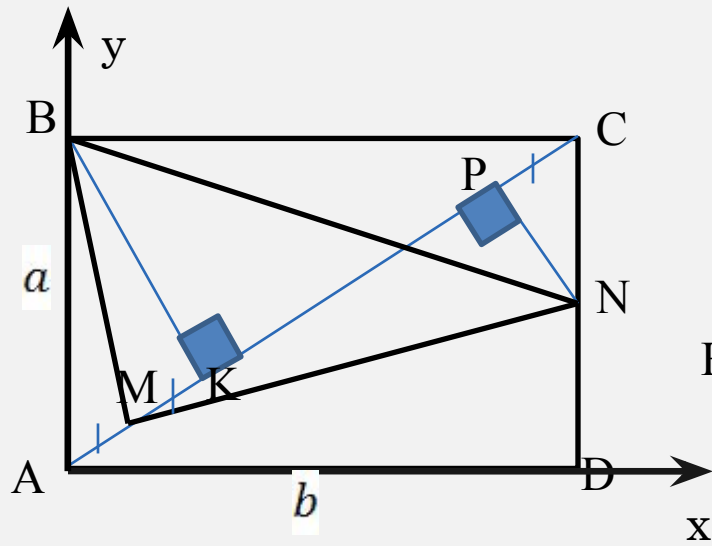
$$BC^2 + CN^2 = BC^2 + MK^2 + PN^2$$

$$CN^2 = PC^2 + PN^2 \quad \text{-верно, т. к. } \triangle PCN \text{ - прямоугольный}$$



VII способ.

Координатный метод



$$A(0; 0), B(0; a), D(b; 0), C(b; a), N(b; \frac{a}{2})$$

$$k_{AC} = \frac{a}{b}; y = \frac{a}{b}x \quad \text{- уравнение прямой AC}$$

$$BK \perp AC \text{ (условие)} \Rightarrow k_{BK} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Напишем уравнение прямой BK : } B(0; a), k_{BK} = -\frac{b}{a}$$

$$y = -\frac{b}{a}x + a$$

Найдем координаты точки пересечения BK и AC

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x + a, \\ y = \frac{a}{b}x, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{a^2b}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{a^3}{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{a^2b}{a^2 + b^2}; \frac{a^3}{a^2 + b^2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{a^2b}{2(a^2 + b^2)}; \frac{a^3}{2(a^2 + b^2)}\right)$$

M – середина АК

Найдем угловые коэффициенты прямых BM и MN по формуле: $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$k_{MN} = \frac{ab}{a^2 + 2b^2}$$

$$k_{BM} = \frac{-a^2 - 2b^2}{ab}$$

$$k_{MN} \cdot k_{BM} = -1$$

$$BM \perp MN$$

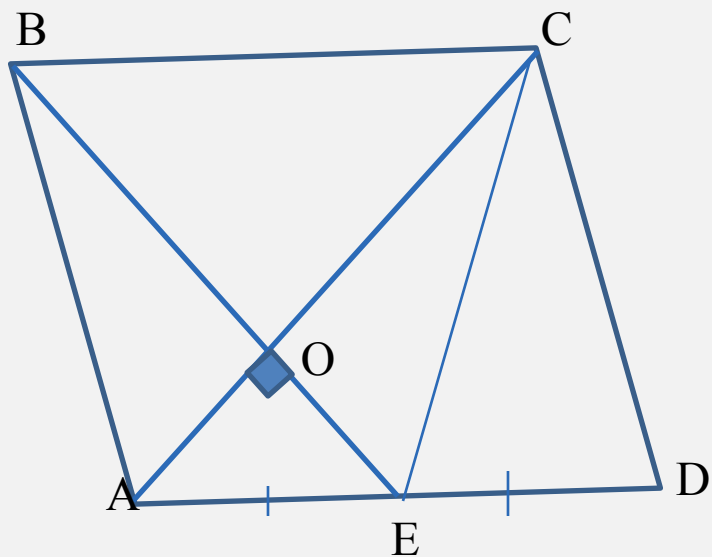


Задача №2

Точка E – середина стороны AD параллелограмма ABCD, прямые BE и AC взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O.

- Докажите, что площади треугольников AOB и COE равны.
- Найдите площадь параллелограмма ABCD, если $AB = 3$, $BC = 4$.

Решение.

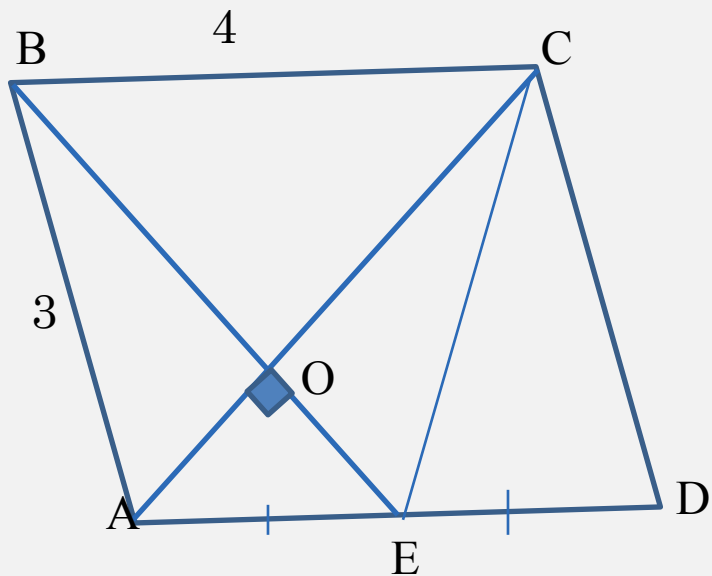


$$S_{ABE} = S_{ACE}$$

(у треугольников равны высоты, проведенные к общей стороне AE)

Вычитая из равных площадей S_{ABE}, S_{ACE} площадь треугольника AOE, приходим к тому, что $S_{AOB} = S_{COE}$





1) Пусть $OE = x$

$\triangle AOE: \angle O = 90^\circ, AE = 2.$

$$AO = \sqrt{AE^2 - OE^2} = \sqrt{2^2 - x^2}$$

$$\triangle ABO: AB = 3, AO = \sqrt{4 - x^2}$$

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{x^2 + 5}$$

$$\triangle BOC \sim \triangle EOA, k = 2 \quad \frac{OB}{OE} = 2$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = 2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad BE = BO + OE = 3\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\triangle ABE: BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos A$$

$$15 = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{6}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 2\sqrt{35}$$

ОТВЕТ: $2\sqrt{35}$



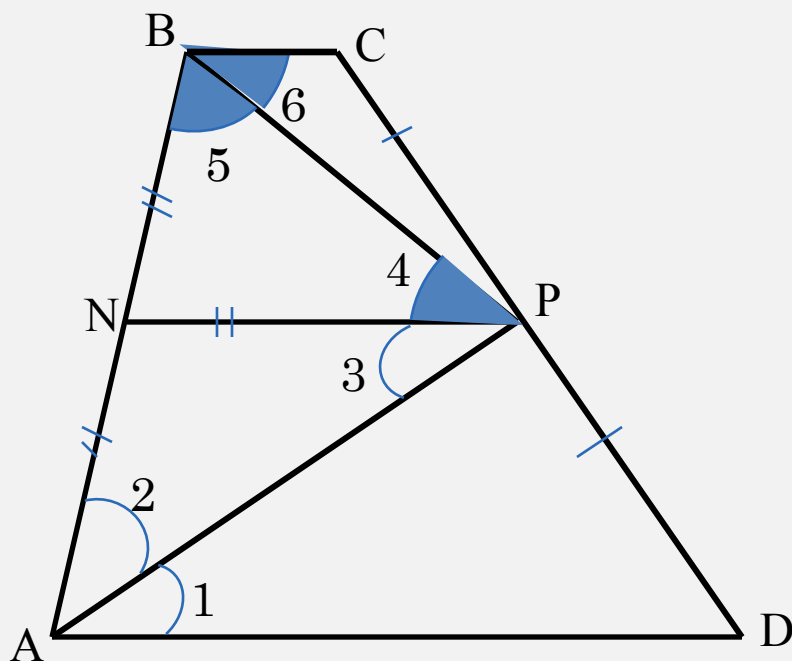
Задача 3

В трапеции $ABCD$ BC и AD – основания. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в ее середине – точке P .

а) Докажите, что BP – биссектриса угла ABC .

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $AP = 8$, $BP = 6$.

Решение.



Пусть N – середина AB , $NP \parallel AD \parallel BC$

$\angle 1 = \angle 3$ (накрест лежащие)

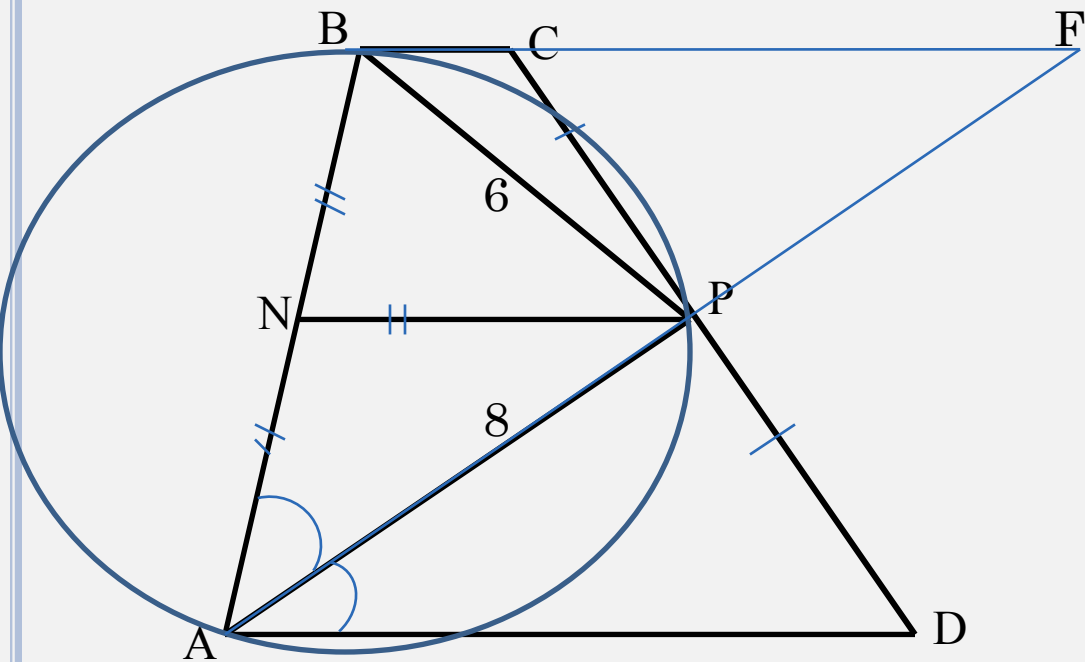
С учетом условия $\angle 1 = \angle 2$, получаем:
 $\angle 2 = \angle 3$, то есть $\triangle ANP$ – равнобедренный.

$\triangle NPB$ – равнобедренный, $\angle 4 = \angle 5$

$\angle 4 = \angle 6$ (накрест лежащие)

Значит, $\angle 5 = \angle 6 \Rightarrow BP$ – биссектриса





$$BN = NA = NP$$

N – центр окружности,
описанной около $\triangle ABP$.

AB – диаметр окружности
 $\Rightarrow \angle APB$ – прямой

$$AP \cap BC = F$$

$\triangle CFP = \triangle DAP$ (по II признаку)

$$S_{ABCD} = S_{APB} + S_{BFP}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABF}$$

$\triangle ABP = \triangle FBP$ (по двум катетам)

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 48$$

Ответ: 48

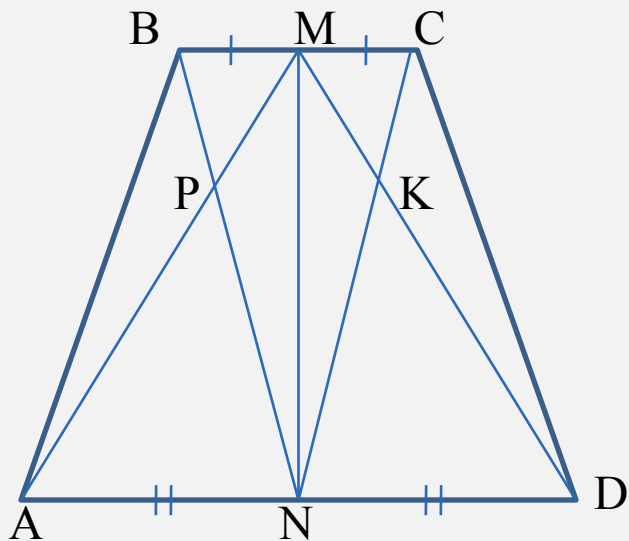


Задача №4

В равнобедренной трапеции ABCD точки M и N- середины оснований BC и AD соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN пересекаются в точке K.

- Докажите, что площадь четырехугольника PMKN равна сумме площадей треугольников ABP и DCK.
- Найдите площадь четырехугольника PMKN, если известно, что $BC = 8$, $AD = 18$, $AB = CD = 13$.

Решение.



$$S_{ABM} = S_{BMN}$$

(у треугольников равны высоты, проведенные к общей стороне BM)

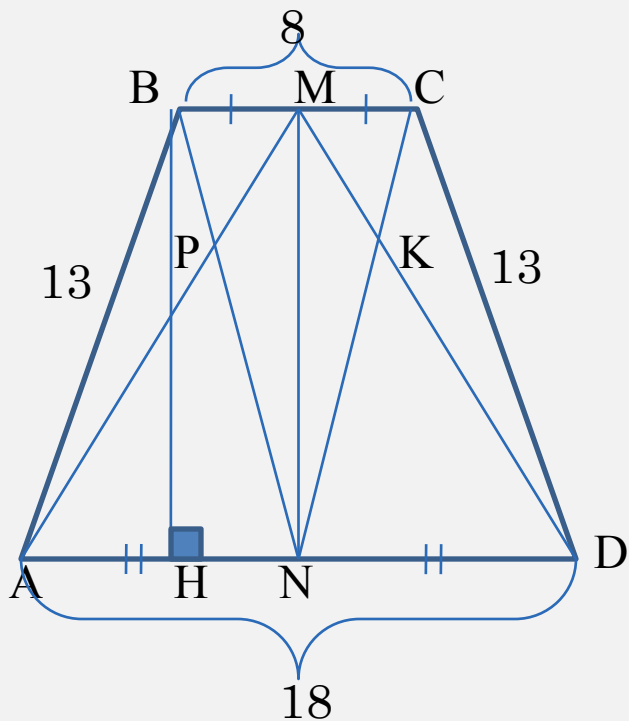
Вычитая из равных площадей S_{BPM}

приходим к тому, что $S_{ABP} = S_{MNP}$

Аналогично доказываем, что $S_{DCK} = S_{MNK}$

$$S_{PMKN} = S_{MNK} + S_{MNP} = S_{ABP} + S_{DCK}$$





$$\triangle BPM \sim \triangle NPA$$

$$\frac{PM}{PA} = \frac{BM}{NA} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{PM}{AM} = \frac{4}{13}$$

$$\triangle PMK \sim \triangle AMD$$

$$\frac{PK}{AD} = \frac{PM}{AM} = \frac{4}{13}$$

$$PK = \frac{4}{13} AD = \frac{4}{13} \cdot 18 = \frac{72}{13}$$

$$AH = \frac{18 - 8}{2} = 5 \quad BH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$BH = MN = 12$$

$$S_{PMKN} = \frac{1}{2} MN \cdot PK = \frac{432}{13}$$

Ответ: $\frac{432}{13}$

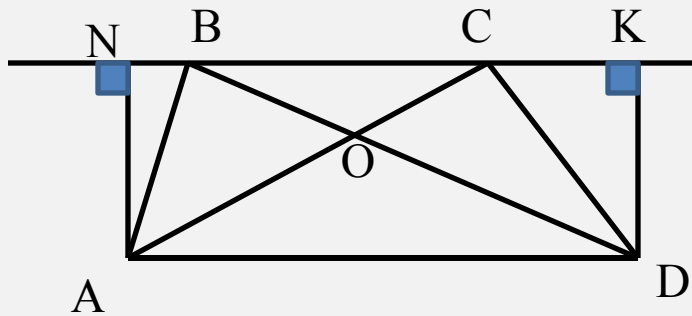


Задача №5.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Площади треугольников AOB и COD равны.

- Докажите, что точки A и D одинаково удалены от прямой BC .
- Найдите площадь треугольника AOB , если известно, что $AB=13$, $BC=10$, $CD=15$, $DA=24$.

Решение.



Опустим перпендикуляры из точек A и D на прямую BC : $AN \perp BC$, $DK \perp BC$

Надо доказать, что $AN=DK$.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$

$\triangle ABC$ можно разбить на два треугольника:

$\triangle AOB$ и $\triangle BOC$

$\triangle BCD$ можно разбить на два треугольника:

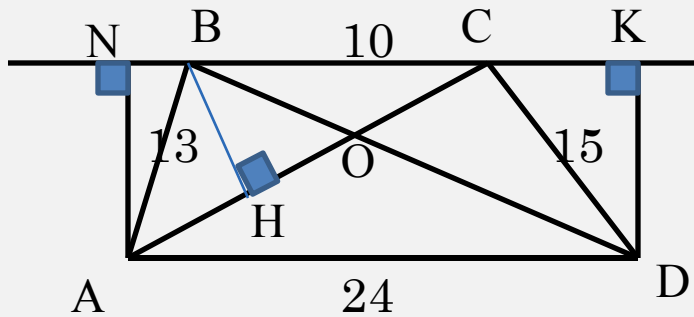
$\triangle COD$ и $\triangle BOC$

По свойству площадей: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} = S_{COD} + S_{BOC} = S_{BCD}$

$S_{AOB} = S_{COD}$ (по условию)

$$S_{ABC} = S_{BCD} = \frac{BC \cdot AN}{2} = \frac{BC \cdot DK}{2} \Rightarrow AN = DK$$





ANKD - прямоугольник

ABCD - трапеция

Пусть $NB = x$, $NK = AD = 24$, тогда

$CK = NK - NB - BC = 14 - x$

$$\triangle ANB: AN^2 = AB^2 - NB^2 = 169 - x^2$$

$$\triangle DKC: DK^2 = CD^2 - CK^2 = 225 - (14 - x)^2$$

Так как $AN = DK$, то приравняем правые части: $169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2$, $x = 5$

$$AN = 12. \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$$

$$\triangle BOC \sim \triangle AOD \Rightarrow \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{5}{12}$$

Проведем $BH \perp AC$. $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ имеют одинаковую высоту $\Rightarrow \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{OC}{AO} = \frac{5}{12}$

Пусть $S_{BOC} = 5y$, $y > 0$, $S_{AOB} = 12y$

$$S_{BOC} + S_{AOB} = S_{ABC} \quad 5y + 12y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{17} \quad S_{AOB} = 12 \cdot \frac{60}{17} = \frac{720}{17}$$

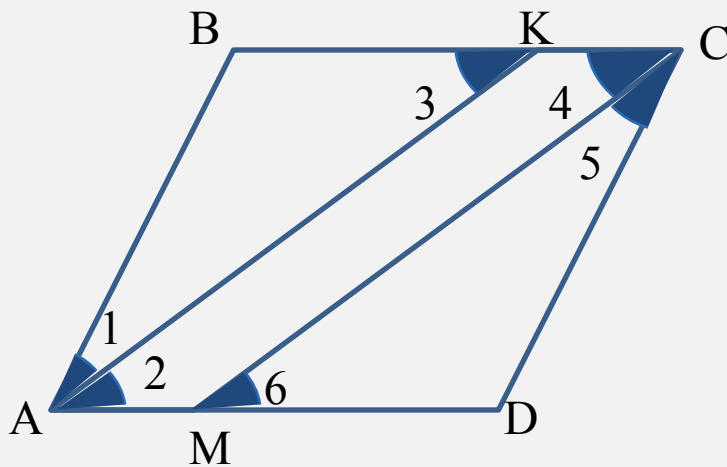
Ответ: $\frac{720}{17}$.

Задача №6

В четырехугольнике ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M, а биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Известно, что AKCM – параллелограмм.

- Докажите, что ABCD – параллелограмм.
- Найдите площадь четырехугольника ABCD, если $BK = 3$, $AM = 2$, а угол между диагоналями AC и BD равен 60° .

Решение.



По условию $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 5$

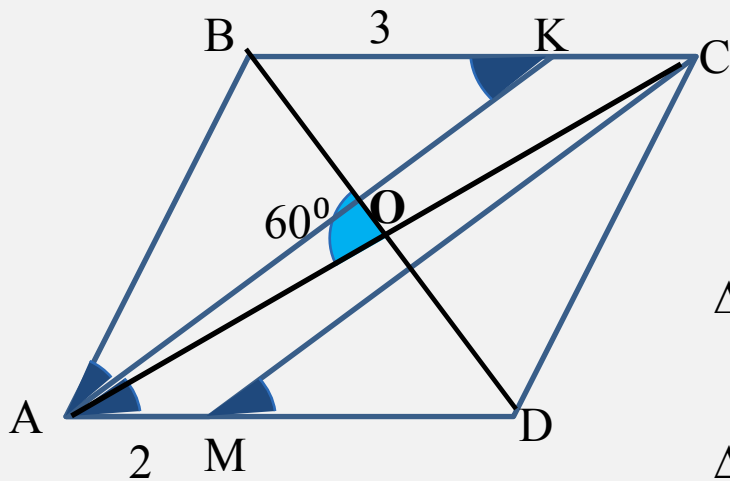
AKCM – параллелограмм, $BC \parallel AD$,
 $\angle 2 = \angle 4$ (противоположные углы),
 $\angle 3 = \angle 4$ (соответственные углы при параллельных прямых AK, CM).

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6.$$

$$KC = AM, AK = CM$$

$$\triangle ABK = \triangle CDM \text{ (по второму признаку)} \Rightarrow BK = MD.$$

Итак, $AD = BC$, $AD \parallel BC$ ($\angle 2 = \angle 3$), а значит, ABCD – параллелограмм (по признаку параллелограмма)



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin O$$

$$BK = AB = 3, AM = KC = 2, AD = 5$$

$$\Delta ABO: AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 60^\circ$$

$$9 = AO^2 + BO^2 - AO \cdot BO \quad (1)$$

$$\Delta ADO: AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cos 120^\circ$$

$$25 = AO^2 + OD^2 + AO \cdot OD \quad (2)$$

$$(2) - (1): 16 = 2(AO \cdot OB) \Rightarrow 32 = AC \cdot BD$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin O = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

ОТВЕТ: $8\sqrt{3}$.





Спасибо за сотрудничество!