Математический анализ

Кабанов Александр Николаевич

к.ф.-м.н., доцент кафедры кибернетики

Дифференциальное исчисление

Дифференцируемая функция

- Выражение $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$ называется приращением функции $f(x)$. Выражение $\Delta x = x - a$ называется приращением аргумента.
- Приращение функции можно выразить через приращение аргумента: $\Delta f(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a)$.
- Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $x \in X$, если $\exists$ такая линейная относительно Δx функция $df(\Delta x) = A(x) \cdot \Delta x$, что приращение функции можно представить в виде:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

- Функция $df(\Delta x)$ называется дифференциалом функции $f(x)$.

Дифференцируемая функция

- Таким образом, функция дифференцируема в точке, если ее приращение в этой точке как функция приращения аргумента является линейной с точностью до бесконечно малой в сравнении с приращением аргумента.
- Так как $o(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ получаем, что при $\Delta x \to 0$:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A(x)\Delta x.$$

- Отсюда

$$A(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции

- Эта функция называется производной функции f в точке x и обозначается f’(x).
- Другими словами, функция дифференцируема в точке x, если у нее есть производная в этой точке.
- Так как $df(\Delta x) = A(x) \cdot \Delta x$, значит $df(\Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x$.
- Очевидно, что если в качестве функции f(x) мы возьмем функцию f(x) = x, то ее производная будет равна:

$$(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Дифференциал функции

- Отсюда следует, что дифференциал функции $f(x) = x$ можно записать в виде $dx(\Delta x) = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.
- То есть дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением: $\Delta x = dx$.
- Следовательно, $df(x) = f'(x)dx$.
- Отсюда еще одно обозначение производной:

$$f' = \frac{df(x)}{dx}.$$

Правила дифференцирования

- **Теорема:** Пусть функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$. Тогда их сумма, их разность, их произведение и их отношение (при $g(x) \neq 0$) дифференцируемы в точке x, причем:

1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
3) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Правила дифференцирования

- **Утверждение 1:** Если $f(x) = C = const$, то $f'(x) = 0$.
- **Утверждение 2:** Если $C = const$, то $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

Дифференцирование композиции

- **Теорема о производной сложной функции:** Если функция $f\colon X \to Y$ дифференцируема в точке $x \in X$, а функция $g\colon Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y = f(x) \in Y$, то их композиция $h(x) = g \circ f = g(f(x))$ дифференцируема в точке x, причем $h'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Дифференцирование обратной функции

- **Теорема о производной обратной функции:** Пусть функции $f\colon X \to Y$ и $f^{-1}\colon Y \to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$ соответственно. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x и $f'(x) \neq 0$, то функция f^{-1} также дифференцируема в точке y, причем $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Таблица производных

- Используя определение производной и правила дифференцирования, можно получить формулы для производных основных элементарных функций:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$. В частности: $(x)' = 1$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$. В частности: $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. В частности: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.

Таблица производных

6. $(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

7. $(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10. $(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

11. $(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Касательная

- Пусть М и $М_1$ – точки на графике функции f(x). Проведём прямую $ММ_1$ через эти точки. Далее будем двигать точку $М_1$ по графику функции по направлению к точке М. Прямая, которая получается в пределе при $М_1 \to М$, называется касательной к графику функции f(x) в точке М.
- Уравнение касательной к графику функции f(x) в точке $М(x_0, y_0)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Смысл производной

- Таким образом, $f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.
- Это утверждение представляет **геометрический смысл производной**.
- Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона этой прямой относительно положительного направления оси Ox.
- **Физический смысл производной**: производная функции $f(x)$ в точке x_0 представляет собой скорость изменения величины $f(x)$ в момент времени x_0.

Нормаль

- Нормалью к графику функции f(x) в точке x_0 называется прямая, проходящая через точку x_0 перпендикулярно касательной.
- Уравнение нормали:

$$x = f'(x_0)(y - y_0) + x_0.$$

- Таким образом, если производная в точке x_0 не равна нулю, то уравнение нормали примет вид:

$$y = (1/f'(x_0))(x - x_0) + f(x_0).$$

Производные высших порядков

- Если производная функции $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то производная производной называется второй производной функции $f(x)$ в точке x_0.
- Аналогично вводится понятие третьей, четвертой, пятой производной и т.д.
- Обозначения: $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x) = f^{(4)}(x)$, $f^{V}(x) = f^{(5)}(x)$, …
- Таким образом, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$. Из определения следует, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.
- Другое обозначение: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Классы непрерывных функций

- Множество всех функций, имеющих на множестве E непрерывные производные до порядка n включительно, образуют класс функций, обозначаемый $C^n(E)$.
- **Утверждение:** Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Локальные экстремумы

- Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки $f(x) < f(x_0)$.
- Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки $f(x) > f(x_0)$.
- Точки локального минимума и локального максимума называются точками локального экстремума. А значение функции в этих точках – локальными экстремумами (соответственно, локальными минимумами и локальными максимумами).

Необходимое условие экстремума

- **Теорема Ферма:** Если функция f(x) дифференцируема в точке x_0 и x_0 является точкой локального экстремума для функции f(x), то $f'(x_0) = 0$.
- Эта теорема представляет собой необходимое условие существования локального экстремума функции. То есть локальный экстремум функции может находиться только в тех точках, где производная равна 0. Такие точки называются стационарными точками функции.

Монотонность и производная

- **Утверждение (признак монотонности функции):** Если $\forall\, x \in (a, b)\ f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на интервале (a, b). Если $\forall\, x \in (a, b)\ f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, b).
- **Утверждение (критерий постоянства функции):** Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ постоянна на этом отрезке тогда и только тогда, когда $\forall\, x \in [a, b]\ f'(x) = 0$.

Достаточное условие экстремума

- **Теорема:** Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0. Тогда, если в некоторой окрестности точки x_0 $f'(x) < 0$ $\forall$ $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ $\forall$ $x > x_0$, то функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0. Если в некоторой окрестности точки x_0 $f'(x) > 0$ $\forall$ $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ $\forall$ $x > x_0$, то функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0. Если же в некоторой окрестности точки x_0 $f'(x)$ имеет один и тот же знак $\forall$ x, то в точке x_0 локального экстремума нет.

Второе достаточное условие экстремума

- **Теорема:** Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке x_0. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

Выпуклость функции

- Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на интервале (a, b), если график функции лежит ниже любой своей касательной на этом интервале.
- Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на интервале (a, b), если график функции лежит выше любой своей касательной на этом интервале.
- **Теорема:** Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, если $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, то $f(x)$ выпукла вверх на (a, b). Если $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, то $f(x)$ выпукла вниз на (a, b).

Теоремы о конечном приращении

- **Теорема Ролля:** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists\ \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$.
- **Теорема Лагранжа:** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то $\exists\ \xi \in (a, b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

- **Теорема Коши:** Если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируема на интервале (α, β), то $\exists$ т $\in (\alpha, \beta)$:

$$x'(т)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(т)(x(\beta) - x(\alpha)).$$

Формула Тейлора

- Любую функцию f(x), имеющую производные до n порядка, можно представить в виде:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

- Многочленом Тейлора порядка n функции f(x) в точке x_0. называется многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- $R_n(x) = f(x) – P_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора.

Остаточный член формулы Тейлора

- Форма Коши остаточного члена: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x - x_0)$
- Форма Лагранжа остаточного члена: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$
- Форма Пеано остаточного члена: $R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$

Первое правило Лопиталя

- **Теорема (первое правило Лопиталя):** Пусть функции f(x) и g(x) дифференцируемы на интервале (a, b), $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, и существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Второе правило Лопиталя

- **Теорема (второе правило Лопиталя):** Пусть функции f(x) и g(x) дифференцируемы на интервале (a, b), $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, и существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$