# Алгебра

Кабанов Александр Николаевич
к.ф.-м.н., доцент кафедры кибернетики

# 1. Матрицы

# Понятие матрицы

- Числовой матрицей размера *m* х *n* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк и *n* столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами. Через $a_{ij}$ обозначается элемент, находящийся в *i*-й строке и *j*-м столбце.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- В кратком виде такую матрицу записывают $A = (a_{ij})$.

# Виды матриц

- Матрица, все элементы которой равны 0, называется нулевой матрицей.
- Матрица, состоящая только из одной строки, называется матрицей-строкой или вектором-строкой.
- Матрица, состоящая только из одного столбца, называется матрицей-столбцом или вектором-столбцом.
- Матрица называется квадратной $n$-го порядка, если число строк и число столбцов равны $n$.

# Диагональ матрицы

- Элементы квадратной матрицы вида $a_{ii}$ называются диагональными. Совокупность всех диагональных элементов называется главной диагональю матрицы.
- Совокупность элементов квадратной матрицы порядка $n$ вида $a_{i\ n+1-i}$ называется побочной диагональю.
- Если все недиагональные элементы матрицы равны 0, то матрица называется диагональной.
- Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, называется единичной и обозначается $E$.

# Треугольные и симметричные матрицы

- Квадратная матрица, все элементы которой ниже (или выше) диагонали равны 0, называется треугольной.
- При этом матрица с нулями ниже диагонали называется верхней треугольной, а с нулями выше диагонали называется нижней треугольной.
- Квадратная матрица называется симметричной, если для всех ее элементов верно свойство: $a_{ij} = a_{ji}$.

# Умножение числа на матрицу

- Над матрицами можно проводить некоторые арифметические операции.
- **Умножение числа на матрицу.** Произведением числа $k$ на матрицу $A$ называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы $A$ на число $k$. Другими словами, $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$.
- Можно провести и обратную операцию, вынеся общий множитель всех элементов за матрицу.

# Сложение и вычитание матриц

- Матрицы одинакового размера можно складывать и вычитать.
- **Сложение матриц.** Суммой матриц $A$ и $B$ называется матрица, элементы которой являются суммой соответствующих элементов этих матриц. Другими словами, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
- **Вычитание матриц.** Разностью матриц $A$ и $B$ называется матрица, элементы которой являются разностью соответствующих элементов этих матриц. Другими словами, $A - B = (a_{ij} - b_{ij}) = A + (-1)\cdot B$.

# Умножение матриц

- Матрицы можно умножать, если количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы.
- **Умножение матриц.** Произведением матриц *A* и *B* называется матрица, в которой элемент, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы A на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.
- Другими словами, если $A \cdot B = C$, то

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

# Умножение матриц

- **Замечание 1:** Если матрица $A$ имеет размер $m$ x $n$, а матрица $B$ имеет размер $n$ x $k$, то матрица $A \cdot B$ имеет размер $m$ x $k$.
- **Замечание 2:** Произведение матриц не является коммутативной операцией.
- Т.е. если произведение $A \cdot B$ существует, то произведение $B \cdot A$ может не существовать.
- Если произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.
- Если матрицы $A$ и $B$ квадратные, то произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют и имеют одинаковый размер, но в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$.

# Умножение матриц

- **Замечание 3:** Умножение квадратной матрицы на единичную не меняет первой, т.е. $A \cdot E = E \cdot A = A$.
- **Замечание 4:** Произведение двух ненулевых матриц может дать нулевую матрицу.

# Возведение матрицы в степень

- Возведение матрицы $A$ в целую положительную степень $k$ сводится к произведению $k$ одинаковых матриц $A$.
- Дополнительно полагаем $A^0 = E$, $A^1 = A$.
- **Замечание 1:** Возведение в степень ненулевой матрицы может дать нулевую матрицу.
- **Замечание 2:** Возведение в степень определено только для квадратных матриц.

# Транспонирование

- Операция транспонирования матрицы является переходом к матрице, у которой строки и столбцы меняются местами.
- Транспонированная матрица $A$ обозначается $A^{\mathrm{T}}$.
- **Замечание:** Если матрица $A$ имеет размер $m$ x $n$, то матрица $A^{\mathrm{T}}$ имеет размер $n$ x $m$.

# Свойства транспонирования

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
2. $(k \cdot A)^{\mathrm{T}} = k \cdot A^{\mathrm{T}}$
3. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$
4. $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$

# Свойства сложения и умножения

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + B \cdot C$
5. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
6. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
7. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$

# Определитель

- С каждой квадратной матрицей можно связать некоторое число, вводимое по определенному правилу, которое отражает некоторые свойства матрицы и называется определителем.
- Определитель матрицы $A$ обозначается $|A|$.
- Квадратная матрица первого порядка состоит из одного единственного числа. Определителем квадратной матрицы порядка 1 назовем это самое число.
- Т.о. $|a_{11}| = a_{11}$.

# Определитель матрицы порядка 2

- Для определителя матрицы второго порядка примем следующую формулу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

- Для определителя матрицы третьего порядка примем следующую формулу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

# Миноры

- Для введения формулы определителя матрицы произвольного порядка сначала введем понятие минора.
- Минором элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$ называется определитель матрицы, полученной вычеркиванием из матрицы $A$ $i$-й строки и $j$-го столбца. Такой минор обозначается $M_{ij}$.
- Алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$ называется минор $M_{ij}$, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Такое алгебраическое дополнение обозначается $A_{ij}$.

# Определитель произвольного порядка

- Определителем квадратной матрицы *A* порядка *n* называется сумма произведений элементов первой строки матрицы *A* на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}.$$

# Определитель произвольного порядка

- **Теорема (разложение определителя по строке/столбцу):** Определитель квадратной матрицы *A* порядка *n* равен сумме произведений элементов любой строки или любого столбца матрицы *A* на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

# Свойства определителей

1. Определитель с нулевой строкой или нулевым столбцом равен 0.
2. Умножение определителя на число равносильно умножению какой-либо одной строки или какого-либо одного столбца матрицы на это число.
3. При транспонировании матрицы величина определителя не меняется.
4. При перестановке двух любых строк или двух любых столбцов местами определитель меняет знак.

# Свойства определителей

5. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен 0.
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца, равен 0.
7. Определитель можно разложить на сумму определителей.

# Свойства определителей

- Представим матрицу *A* как набор строк $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{pmatrix}$.
- Представим *i*-ю строку матрицы как сумму двух строк $A_{i1} + A_{i2}$.
- Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_{i1} \\ \ldots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_{i2} \\ \ldots \\ A_n \end{vmatrix}.$$

# Свойства определителей

8. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.
9. Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц.

# Обратная матрица

- Матрица, определитель которой равен 0, называется вырожденной.
- Квадратная матрица $A^{-1}$ называется обратной к квадратной матрице $A$, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.
- **Теорема (о существовании обратной матрицы):** Обратная матрица существует и единственная тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденна.

# Свойства обратных матриц

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.
3. $(A^{-1})^{k} = (A^{k})^{-1}$.
4. $|A^{-1}| = 1/|A|$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

# Обратная матрица

- Транспонированная матрица, построенная из алгебраических дополнений элементов матрицы $A$, называется присоединенной матрицей $A^P$.
- **Теорема (о построении обратной матрицы):** Обратная матрица $A^{-1}$ равна присоединенной $A^P$, умноженной на число, обратное к определителю $|A|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^P = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

# Элементарные преобразования

- Назовем элементарными преобразованиями матрицы *A* следующие преобразования:

1. Перестановка местами двух строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на число.
3. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), предварительно умноженной на число.
4. Отбрасывание нулевой строки или столбца.
5. Транспонирование.

# Построение обратной

- **Замечание:** Ни одно из элементарных преобразований не может превратить невырожденную матрицу в вырожденную.
- **Теорема:** Любая невырожденная матрица путем элементарных преобразований может быть сведена к единичной.
- Идея данного способа построения обратной матрицы состоит в следующем: если какие-то элементарные преобразования превращают матрицу $A$ в единичную, то те же самые преобразования превратят единичную матрицу в обратную $A^{-1}$.

# Алгоритм построения обратной

- Составим из матрицы $A$ новую расширенную матрицу, дописав справа единичную: $(A|E)$.
- Применим к полученной расширенной матрице элементарные преобразования, превращающие матрицу $A$ в единичную.
- В результате мы получим расширенную матрицу $(E|A^{-1})$.
- **Замечания:** Применяя элементарные преобразования строк к расширенной матрице $(A|B)$, мы можем получить матрицу $(E|A^{-1}B)$.

# Ранг матрицы

- Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.
- Ранг матрицы $A$ обозначается $\mathrm{r}(A)$ или $\mathrm{rang}(A)$.
- Понятие ранга существует для матриц любого размера (не обязательно квадратных).

# Свойства ранга

- Ранг нулевой матрицы равен нулю.
- Ранг матрицы $A$ размера $m$ x $n$ не превосходит $m$ и $n$. Другими словами: $r(A) \leq \min(m,n)$.
- Ранг квадратной матрицы n-го порядка равен n тогда и только тогда, когда эта матрица невырождена. Другими словами: $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

# Ступенчатая матрица

- Главным элементом строки матрицы называется ее первый ненулевой элемент.
- Матрица называется ступенчатой, если главный элемент каждой строки этой матрицы расположен правее, чем главные элементы предыдущих строк.
- **Утверждение:** Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

# Вычисление ранга

- **Теорема (о ранге матрицы):** Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы.
- Таким образом, для вычисления ранга матрицы, ее можно привести к ступенчатому виду. Число оставшихся ненулевыми строк и будет рангом.

# Линейная зависимость

- Пусть $e_1 = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1\mathrm{n}}),\ \ldots,\ e_m = (a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ a_{m\mathrm{n}})$ – матрицы-строки.
- Строка $e = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m$, где коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – произвольные действительные числа, называется линейной комбинацией строк $e_1, \ldots, e_m$.
- Линейная комбинация, в которой все коэффициенты одновременно равны нулю, называется тривиальной.
- Строки называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

# Линейная зависимость

- **Теорема (о линейной комбинации строк матрицы):** Строки матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда одна из них является линейной комбинацией других.
- **Теорема (связь ранга с линейной независимостью):** Ранг матрицы равен числу ее линейно независимых строк (столбцов).
- **Теорема (о представлении строк в виде линейной комбинации):** Каждая строка матрицы может быть представлена в виде линейной комбинации линейно независимых строк матрицы.
- Замечание: Все вышесказанное верно и для столбцов.

# Базисный минор

- Минор матрицы называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры большего порядка равны нулю или не существуют.
- **Теорема (связь ранга с базисным минором):** Ранг матрицы равен порядку ее базисного минора.
- **Теорема (о базисном миноре):** Строки (столбцы) матрицы, входящие в базисный минор, образуют линейно независимую систему. Любая строка (столбец) матрицы линейно выражается через строки (столбцы) из базисного минора.

# Метод окаймляющих миноров

- Пусть минор k-го порядка не равен нулю. Составляем окаймляющие его миноры порядка k+1.
- Если все полученные миноры равны нулю, то ранг матрицы равен k.
- Если найден хотя бы один минор, не равный нулю, то повторяем для него 1-й шаг.