

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

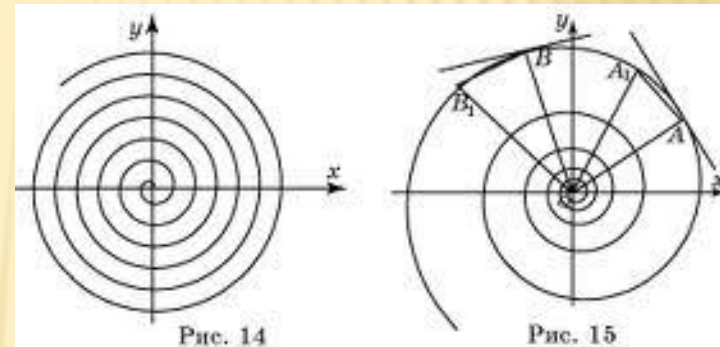
- История термина «производная»
- Определение производной
- Геометрический смысл производной
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- Производные основных элементарных функций
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции
- Исследование функций с помощью производной

Раздел математики, который изучает производные функций и их применение, называется

дифференциальным исчислением.

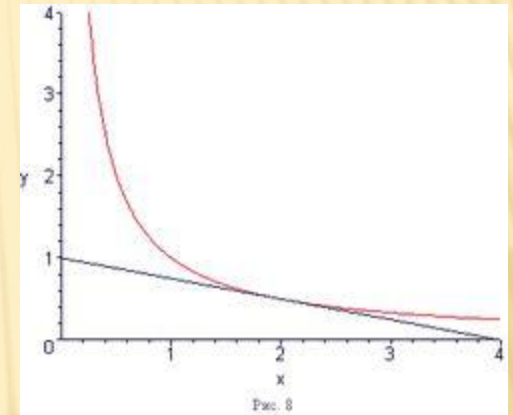
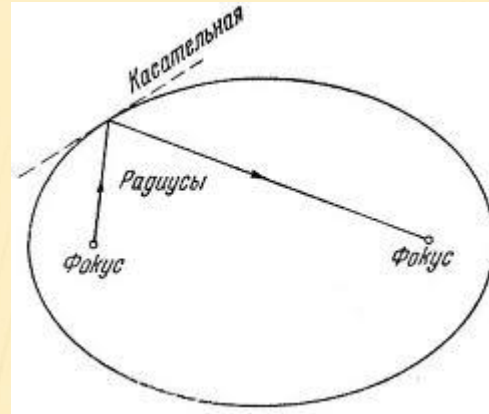
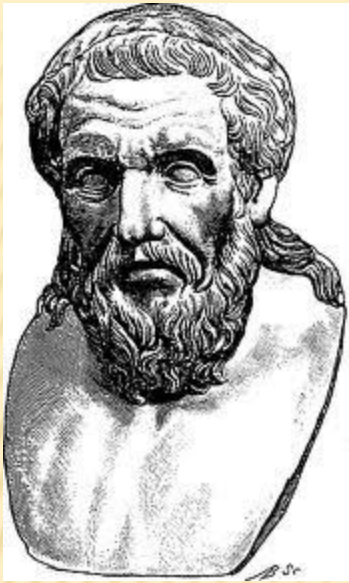
Это исчисление возникло из решений задач на проведение касательных к кривым, на вычисление скорости движения, на отыскание наибольших и наименьших значений функции.

РЯД ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ БЫЛ РЕШЕН ЕЩЕ В ДРЕВНОСТИ АРХИМЕДОМ, РАЗРАБОТАВШИМ СПОСОБ ПРОВЕДЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ.



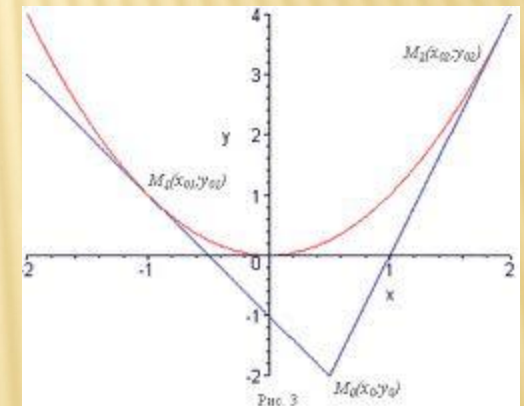
Архимед построил касательную к спирали, носящей его имя.

Архимед (ок. 287 – 212 до н.э.) – великий ученый. Первооткрыватель многих фактов и методов математики и механики, блестящий инженер.



Аполлоний – к эллипсу, гиперболе и параболе.

Но общего метода, пригодного для построения касательной к любой кривой плоскости в произвольной ее точке найдено не было.



БОЛЕЕ ОБЩИМ И
ВАЖНЫМ ДЛЯ
РАЗВИТИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО
ГО ИСЧИСЛЕНИЯ БЫЛ
МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ
КАСАТЕЛЬНЫХ
ФЕРМА.



Пьер Ферма (1601 – 1665 гг.) – французский математик и юрист

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ БЫЛА ВПЕРВЫЕ РЕШЕНА НЬЮТОНОМ.



Функцию он назвал флюэнтой, т.е. текущей величиной. Производную – ф л ю к с и е й. Ньютон пришел к понятию производной исходя из вопросов механики.

Исаак Ньютон (1643 – 1722 гг) – английский физик и математик.

Термин «производная» впервые встречается у француза Луи Арбогаста. Этим термином стал пользоваться Лагранж, который и ввел обозначения U' и $F'(X)$.



Лагранж, Жозеф (1736–1813), французский математик и механик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

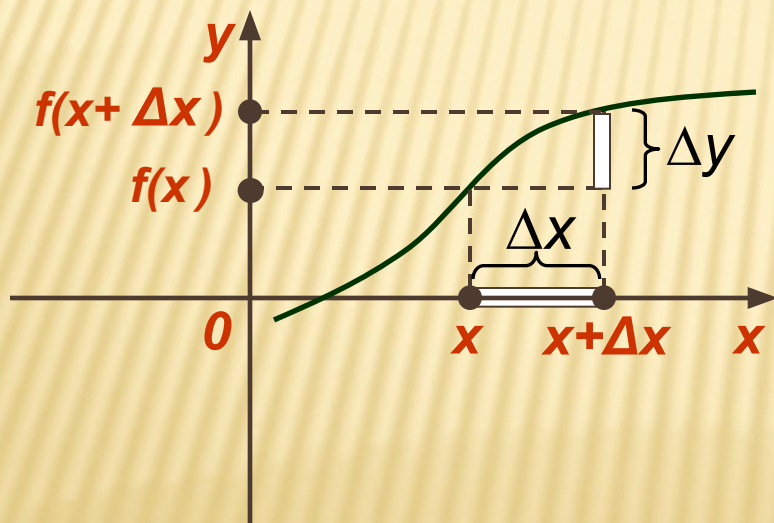
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Аргументу x придадим некоторое приращение Δx :

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Итак, **определение**: Производной функции в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю

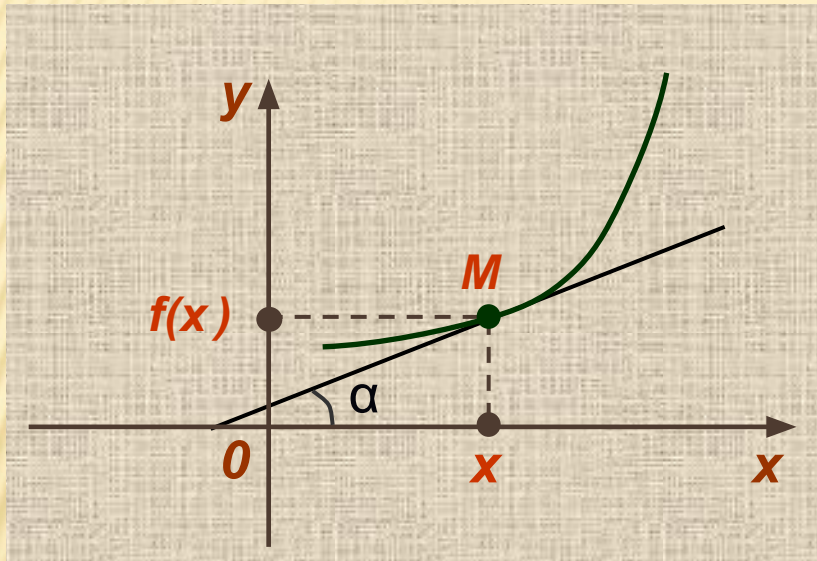
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется **дифференцируемой** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

Если функция $y = f(x)$ описывает какой – либо физический процесс, то $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$

Производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

Уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение
касательной

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ

Теорема

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение **не верно**: непрерывная функция может не иметь производной.

Пример: $y = |x|$

$y'(0)$ не существует

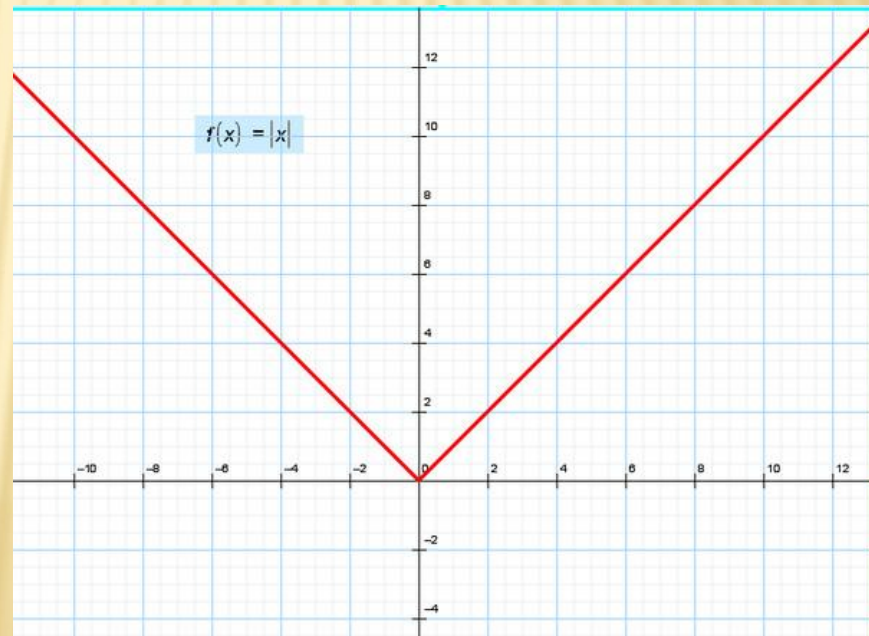


ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$$1. c' = 0,$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$6. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$5. (\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

Выведем формулы некоторых производных, применяя определение производной:

1 $y = x^2$ имеет производную

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x; \end{aligned}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

2 Логарифмическая функция: $y = \ln x$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$$

Аналогично выводятся правила дифференцирования других основных элементарных функций.

при $\Delta x \rightarrow 0$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$

ТЕОРЕМА О ПРОИЗВОДНОЙ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

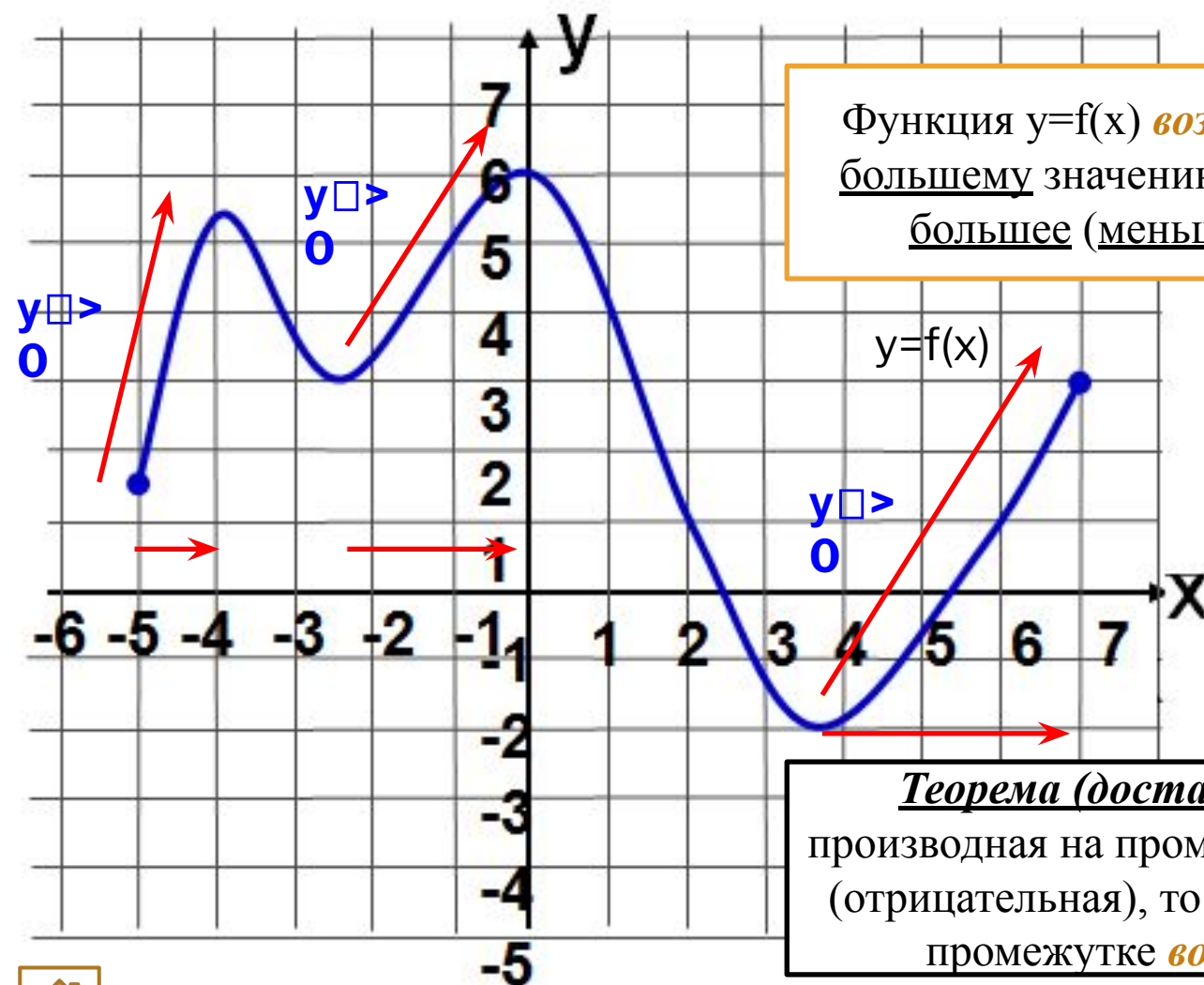
Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную в точке x_0 , причем $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

□ Схема

- 1. Найти о.о.ф.
- 2. Найти (если возможно) точки пересечения графика с осями координат
- 3. Найти промежутки знакопостоянства функции
- 4. Исследовать на четность
- 5. Найти асимптоты графика функции
- 6. Найти промежутки монотонности, точки экстремума функции
- 7. Найти промежутки выпуклости, точки перегиба графика функции
- 8. Построить график функции

1. Монотонность функции



Функция $y=f(x)$ **возрастает (убывает)**, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции

Теорема (достаточное условие): Если производная на промежутке (a,b) положительная (отрицательная), то функция $y=f(x)$ на данном промежутке **возрастает (убывает)**.



Точки экстремума

Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 $f(x) > f(x_0)$ / $f(x) < f(x_0)$

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если дифференцируемая функция имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

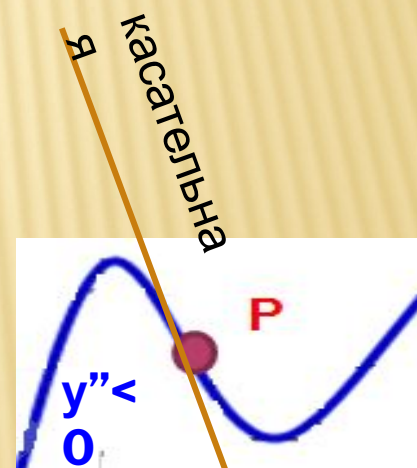
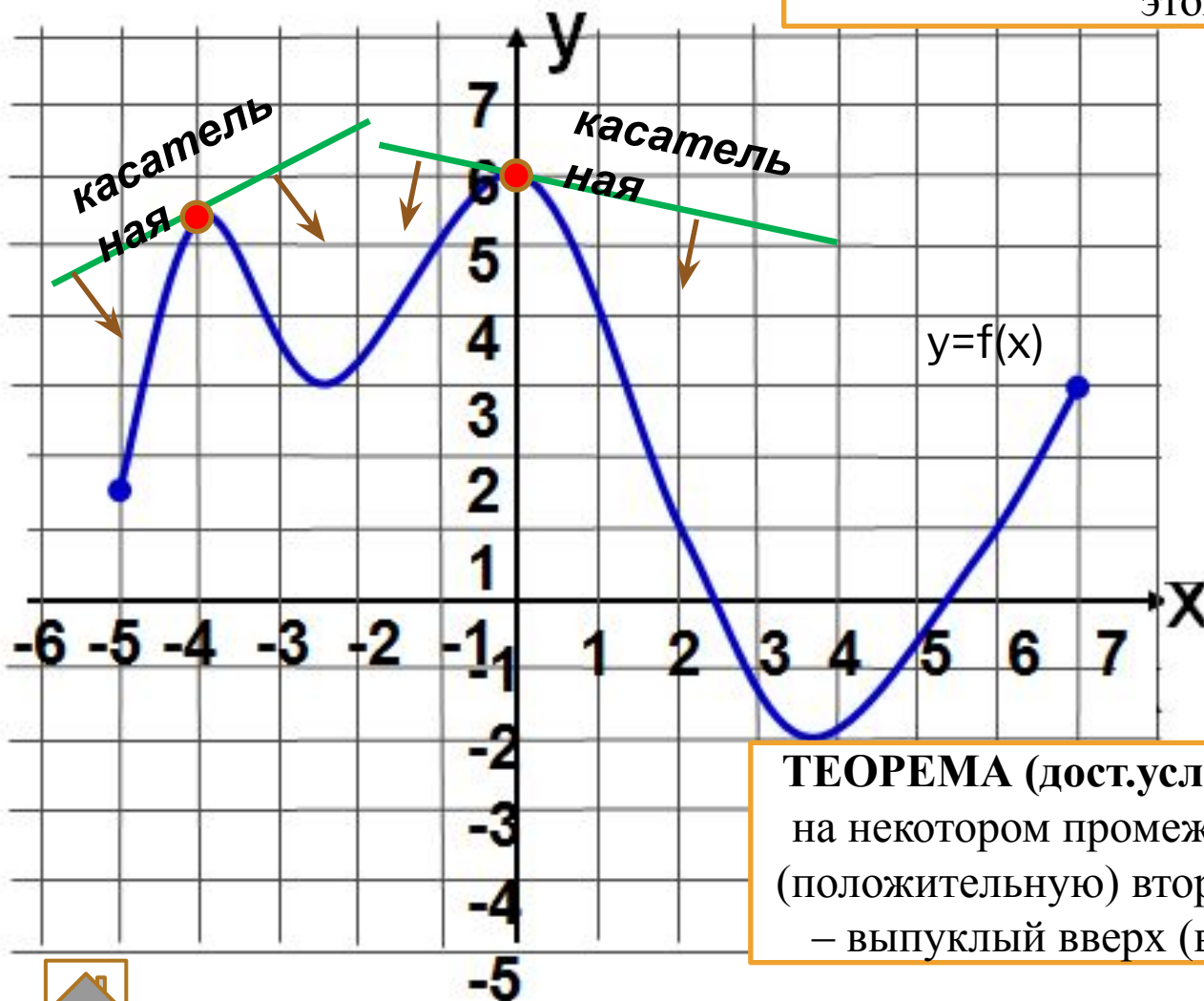
Опр. Точка x_0 , в которой производная равна нулю или не существует, называется критической.

Теорема (достаточное условие экстремума)

Если при переходе через критическую точку x_0 , производная меняет свой знак с "+" на "-", то x_0 — точка *max*, если с "-" на "+", x_0 — точка *min*

2. Выпуклость функции

График функции $y=f(x)$ называется **выпуклым вверх (вниз)** на промежутке (a,b) , если он расположен ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале.



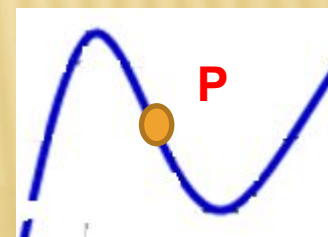
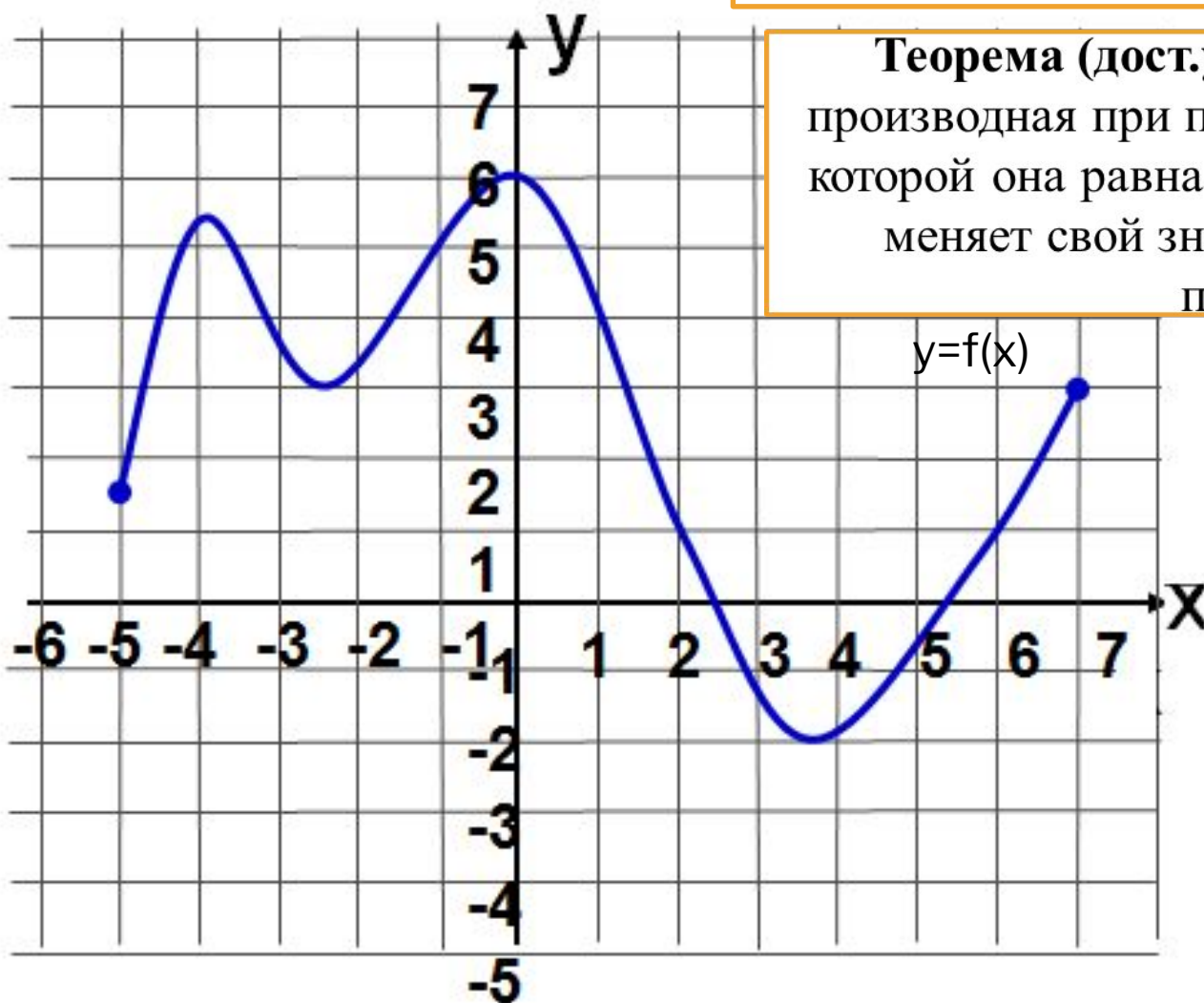
ТЕОРЕМА (дост.условие): Если функция $y=f(x)$ на некотором промежутке имеет отрицательную (положительную) вторую производную, то график — выпуклый вверх (вниз) на этом промежутке.



Точки перегиба

Опр. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба .

Теорема (дост.условие). Если вторая производная при переходе через точку x_0 , в которой она равна нулю или не существует, меняет свой знак, то точка x_0 - точка перегиба



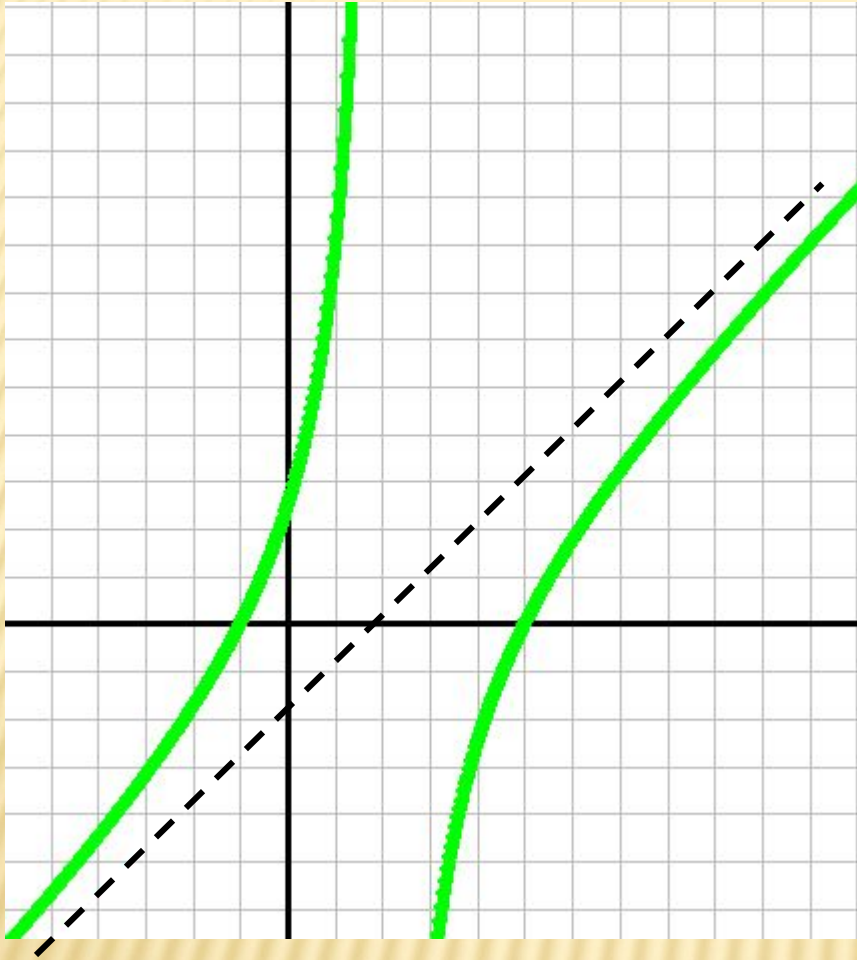
АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

- Опр. Прямая называется **асимптотой** графика функции, если расстояние от точек графика до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Опр. Прямая $x=a$ называется **вертикальной асимптотой** для $y=f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm\infty$

Опр. Прямая $y=b$ называется **горизонтальной асимптотой**, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$



Опр. **Наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ является прямая $y = kx + b$, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

**Спасибо за
внимание!**

