Практический семинар по Математической экономике (17.М18-э + 17.М19-э)

Занятие 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.

2018/2019 уч. год

Примеры экономических задач, формализуемых в виде задач для ОДУ

- модель рынка с прогнозируемыми ценами;
- модель конкуренции;
- модель, описывающая изменение объёма производства в некоторой замкнутой экономической системе;
- и др.

Задача Коши для ОДУ первого порядка

Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется задача вида

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \; x_0 \in (a, b),$$

где x_0, y_0 - заданные вещественные числа.

При этом условие $y(x_0) = y_0$ называется начальным условием или условием Коши.

Пример

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y + x^2 e^{x^3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

методом Эйлера на отрезке [0, 1] с шагом h = 0,1 .

Точное решение задачи $y = \dfrac{x^3 e^{x^3}}{3}$.

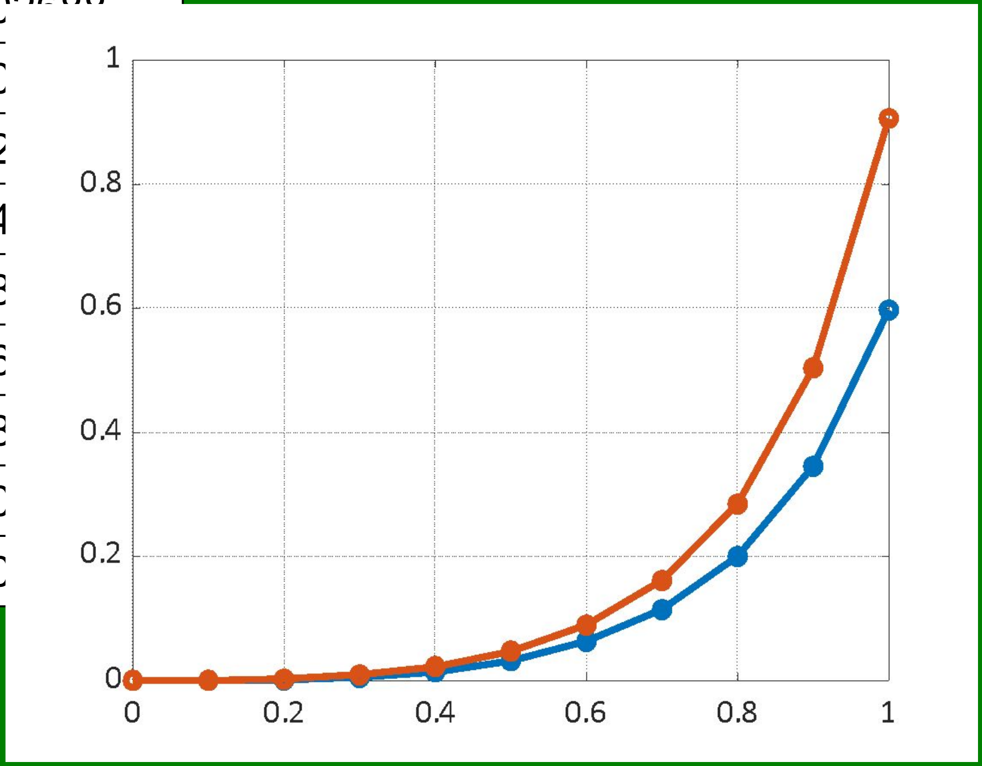
Расчетная формула метода Эйлера

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(y_n, y_n), \qquad y_n = y_0}$$

$$x_{n+1} = x_0 + h(n+1)$$

Пример (продолжение)

n	x_n	$y_{n+1}=y_n+f(x_n,y_n)$	Точное значение
0	0	0	0
1	0,1	0	0,000334
2	0,2	0,001001	0,00[illegible]
3	0,3	0,005045	0,00[illegible]
4	0,4	0,014428	0,02[illegible]
5	0,5	0,032178	0,04[illegible]
6	0,6	0,062920	0,08[illegible]
7	0,7	0,114395	0,16[illegible]
8	0,8	0,200260	0,28[illegible]
9	0,9	0,345502	0,50[illegible]
10	1	0,597372	0,90[illegible]



Пример

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

методом Эйлера на отрезке [0, 1] с шагом h = 0,1 .

Точное решение задачи $y = 2e^x - x - 1$

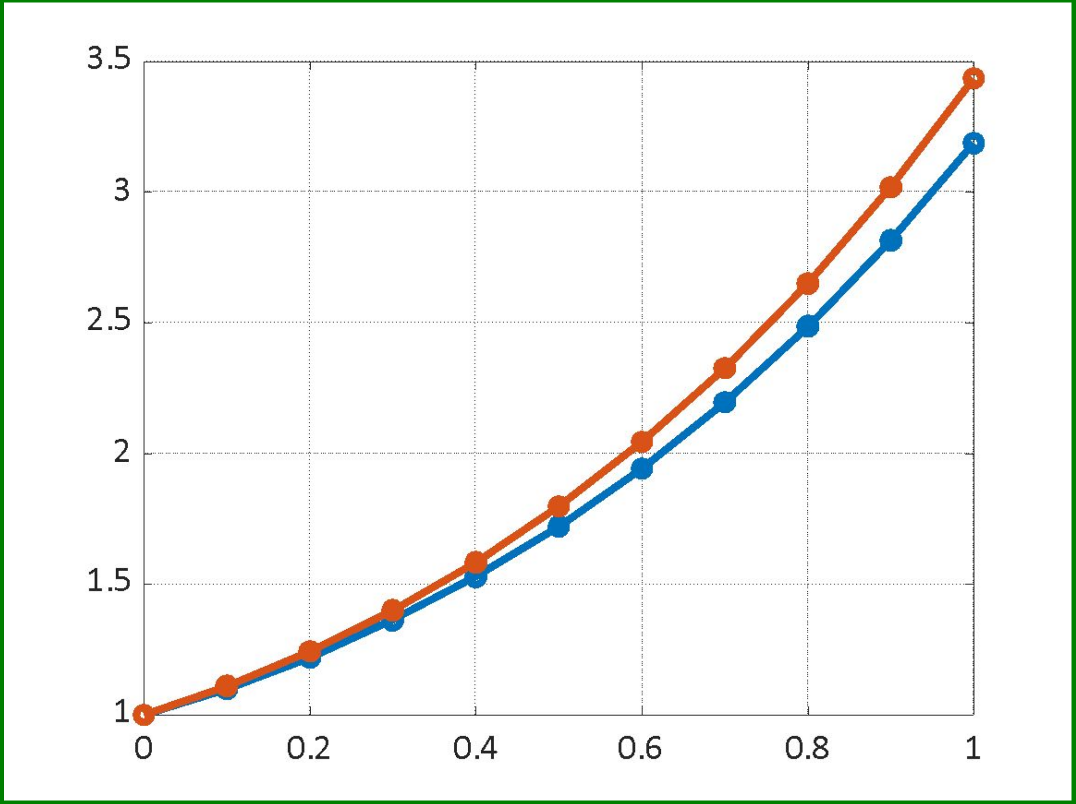
Расчетная формула метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, y_n), \qquad y_n = 1$$

$$x_{n+1} = x_0 + h(n+1)$$

Решение

x	y	Y
0	1.0000	1.0000
0.1000	1.1000	1.1103
0.2000	1.2200	1.2428
0.3000	1.3620	1.3997
0.4000	1.5282	1.5836
0.5000	1.7210	1.7974
0.6000	1.9431	2.0442
0.7000	2.1974	2.3275
0.8000	2.4872	2.6511
0.9000	2.8159	3.0192
1.0000	3.1875	3.4366



Пример

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

методом Эйлера на отрезке [0, 1] с шагом h = 0,1 .

Точное решение задачи $y = 2e^x - x - 1$

Расчетная формула метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, y_n), \qquad y_n = 0$$

$$x_{n+1} = x_0 + h(n+1)$$

Замечание о погрешности

Относительные погрешности вычисленных значений функции при различных h

x	h	0,1	0,05	0,025	0,00625	0,0015625	0,0007813	0,0001953
	N	1	2	4	16	64	128	512
0,1		100,00%	48,32%	23,76%	5,87%	1,46%	0,73%	0,18%
0,2		46,61%	22,55%	11,10%	2,74%	0,68%	0,34%	0,09%
0,3		28,95%	14,03%	6,91%	1,71%	0,43%	0,21%	0,05%
0,4		20,22%	9,81%	4,83%	1,20%	0,30%	0,15%	0,04%
0,5		15,06%	7,32%	3,61%	0,89%	0,22%	0,11%	0,03%
0,6		11,67%	5,68%	2,80%	0,69%	0,17%	0,09%	0,02%
0,7		9,30%	4,53%	2,24%	0,55%	0,14%	0,07%	0,02%
0,8		7,57%	3,69%	1,82%	0,45%	0,11%	0,06%	0,01%
0,9		6,25%	3,05%	1,51%	0,37%	0,09%	0,05%	0,01%
1		5,22%	2,55%	1,26%	0,31%	0,08%	0,04%	0,01%

Задача Коши для ОДУ второго порядка

Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$ называется задача вида

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}, \quad x_0 \in (a, b),$$

где x_0, y_0, y'_0 - заданные вещественные числа.

При этом условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ называются начальными условиями или условиями Коши.

Задача Коши для ОДУ второго порядка

ОДУ, порядок которых выше первого, введением вспомогательных переменных легко могут быть сведены к эквивалентной системе уравнений первого порядка.
Для ОДУ $y'' = f(x, y, y')$ процедура такова: полагая

$$v_1(x) = y, v_2(x) = y',$$

трансформируем исходную задачу Коши в задачу

$$\begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = f(x, v_1, v_2) \\ v_1(x_0) = y_0 \\ v_2(x_0) = y_0' \end{cases}, \quad x_0 \in (a, b),$$

численное решение которой аналогично решению Задачи Коши для ОДУ 1-го порядка.

Пример (задача Коши для уравнения Бесселя)

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} + y = 0, \\ y(0.1) = 0.9975, \\ y'(0.1) = -0.5, \end{cases}$$

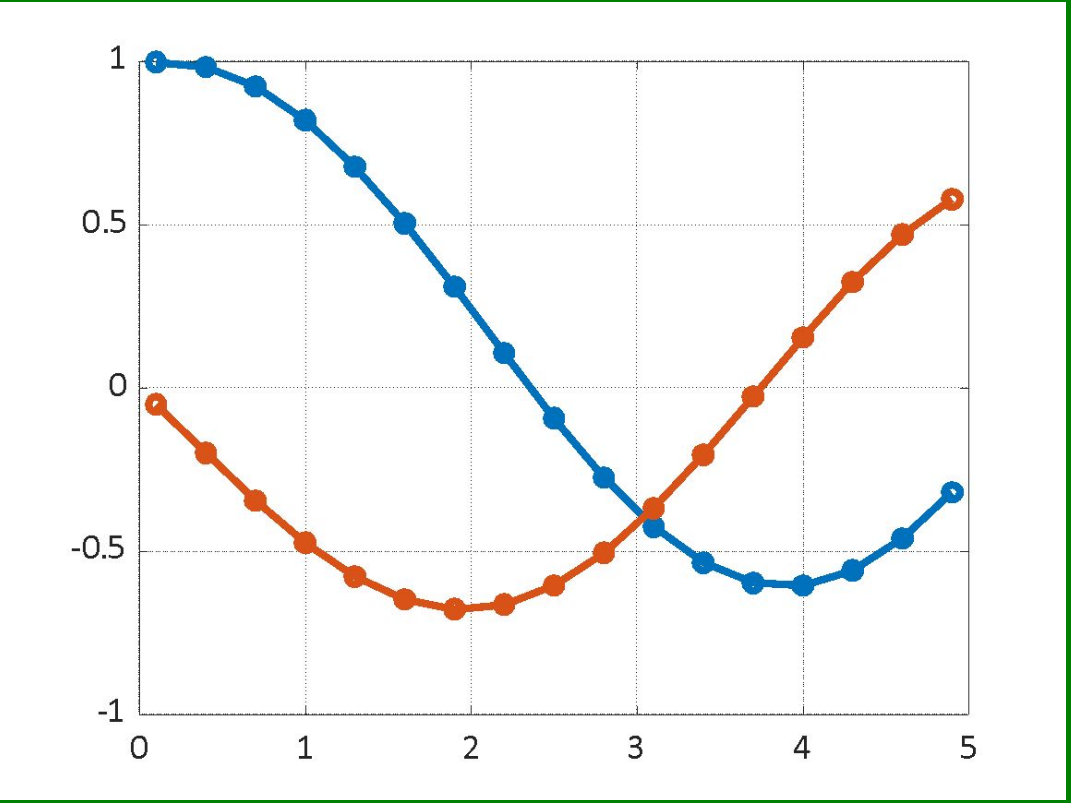
методом Эйлера на отрезке [0.1, 5] с шагом h = 0,3 .

Введем переменные $y_1 = y, y_2 = y'$ Уравнение сведем к системе

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2/x \end{cases}$$

Решение

x	y	y′
0.1000	0.9975	-0.0500
0.4000	0.9825	-0.1993
0.7000	0.9227	-0.3446
1.0000	0.8194	-0.4737
1.3000	0.6772	-0.5774
1.6000	0.5040	-0.6473
1.9000	0.3098	-0.6772
2.2000	0.1067	-0.6632
2.5000	-0.0923	-0.6048
2.8000	-0.2737	-0.5045
3.1000	-0.4251	-0.3683
3.4000	-0.5356	-0.2052
3.7000	-0.5971	-0.0264
4.0000	-0.6050	0.1549
4.3000	-0.5586	0.3248
4.6000	-0.4611	0.4697
4.9000	-0.3202	0.5774



Программные средства