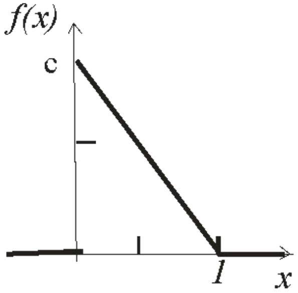
Примеры

Задан график функции плотности распределения



Найти: 1) c, 2) функцию распределения, 3) $P(0{,}5 \le \xi < 4)$

Числовые характеристики СВ

Числовые параметры, характеризующие **существенные** свойства закона распределения СВ, называют **числовыми характеристиками.**

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Начальные моменты

Центральные моменты

Начальный момент

Начальным моментом m**-го порядка** случайной величины ξ называют число:

$$\alpha_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^m \cdot p_i$$ – для дискретных случайных величин,

$$\alpha_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)dx$$ – для непрерывных случайных величин.

Математическое ожидание

Первый начальный момент α_1 называют **математическим ожиданием** случайной величины ξ и обозначают m_ξ или $M(\xi)$

ДСВ: $\alpha_1 = M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ НСВ: $\alpha_1 = M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Несобственный интеграл предполагается **абсолютно сходящимся** (в противном случае говорят, что математическое ожидание $M(\xi)$ не существует).

Математическое ожидание является **средним вероятностным значением** случайной величины

Математическое ожидание

Пример.

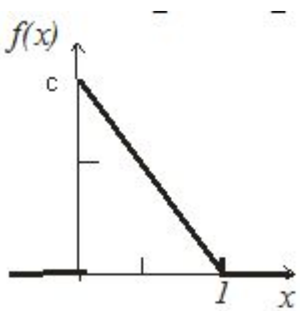
Найти математическое ожидание:

1) Для ДСВ, заданной рядом распределения

x	-2	2	5
$P(X=x)$	0,6	0,1	0,3

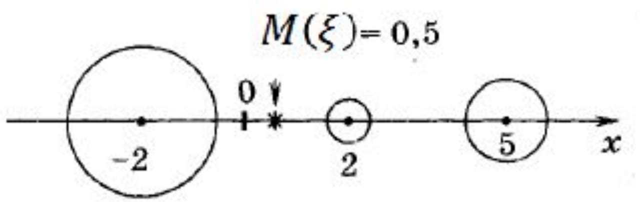
2) Для НСВ, заданной плотностью

пения



Математическое ожидание

Математическое ожидание характеризует *среднее вероятностное значение* случайной величины *X*.



Его размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Основные свойства математического ожидания

1^0. *Математическое ожидание постоянной с равно этой постоянной*

$$Mc = c.$$

2^0. *Константу с выносят за знак математического ожидания*

$$M(c\xi) = cM(\xi)$$

3^0. *Математическое ожидание суммы случайных величин ξ и η равно сумме их математических ожиданий*

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$$

Основные свойства математического ожидания

4^0. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин* ξ *и* η *равно произведению их математических ожиданий.*

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$$

Определение. *Случайные величины* ξ *и* η *независимы, если события* $\xi < x$ *и* $\eta < y$ — *независимы, т. е.*

$$P((\xi < x) \quad (\eta < y)) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

Центральный момент

Центральным моментом m-го порядка случайной величины ξ называют число:

$$\mu_m = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_1)^m \cdot p_i$$ – для дискретных случайных величин,

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^m f(x) dx$$ – для непрерывных случайных величин.

Центральный момент

Первый центральный момент

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_1)^1 p_i =$$

$$= M\big(\xi - M(\xi)\big) = ???.....$$

Дисперсия

Второй центральный момент μ_2 называют **дисперсией** случайной величины ξ и обозначают D_ξ или $D(\xi)$.

ДСВ: $$\mu_2 = D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_1)^2 p_i$$

НСВ: $$\mu_2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^2 f(x) dx$$

Удобнее пользоваться формулой $D_\xi = M(\xi^2) - m_\xi^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

Дисперсия

Определение. *Дисперсией случайной величины* ξ *называется математическое ожидание квадрата отклонения величины от ее математического ожидания,*

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2$$

Удобнее пользоваться формулой $D_\xi = M(\xi^2) - m_\xi^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

Дисперсия характеризует степень разброса возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания

Её размерность равна квадрату размерности случайной величины.

Дисперсия

Пример.

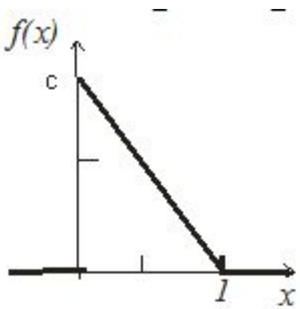
Найти дисперсию:

1) Для ДСВ, заданной рядом распределения

x	-2	2	5
$P(X=x)$	0,6	0,1	0,3

2) Для НСВ, заданной плотностью

ления



Основные свойства дисперсии

1^0. *Дисперсия постоянной с равна нулю*

$$D(c) = 0.$$

2^0. *Константу с выносят за знак **дисперсии** в квадрате*

$$D(c\xi) = c^2 D(\xi)$$

3^0. *Дисперсия суммы независимых случайных величин ξ и η равна сумме их дисперсий:*

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$$

Среднеквадратическое отклонение

Так как размерность дисперсии не совпадает с размерностью случайной величины, то вводят понятие среднеквадратического отклонения $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$ $\left(\sigma_\xi^2 = D_\xi\right)$.

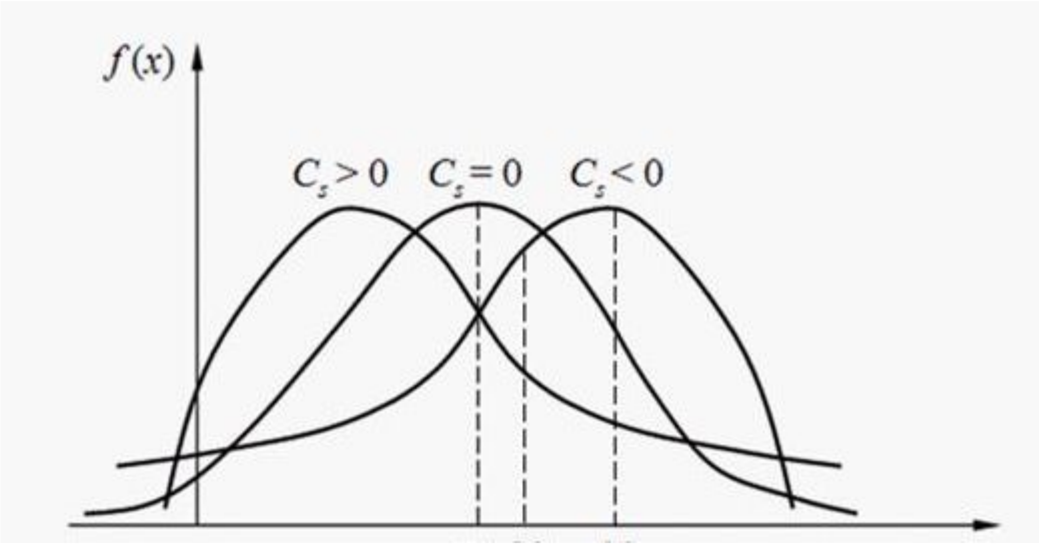
Центральный момент третьего порядка:

служит для оценки ***асимметрии распределения***.
Если распределение симметрично относительно точки $x = m$, то центральный момент третьего порядка будет равен нулю (как и все центральные моменты нечетных порядков).
Если центральный момент третьего порядка отличен от нуля, то распределение не может быть симметричным.

Центральный момент третьего порядка:

Величину асимметрии оценивают с помощью безразмерного *коэффициента асимметрии*: («скошенность») -

$$C = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$



Центральный момент четвертого порядка:

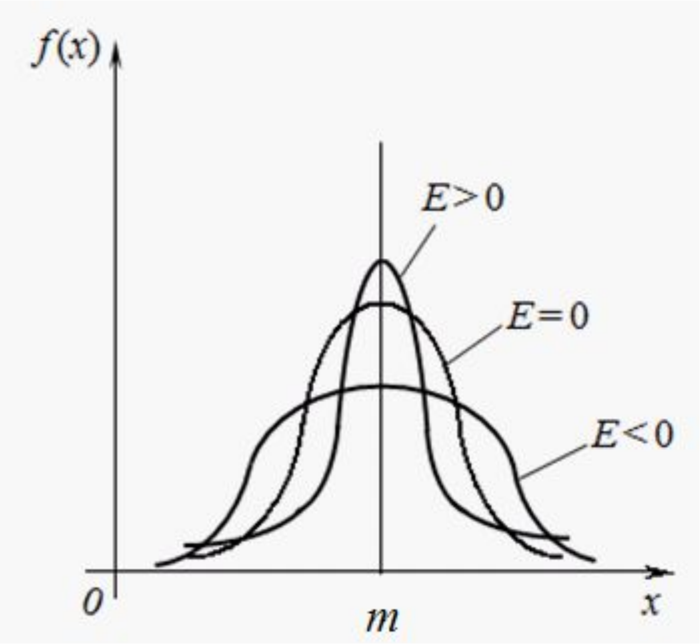
служит для оценки так называемого *эксцесса*, определяющего степень крутости (островершинности) кривой распределения вблизи центра распределения по отношению к кривой нормального распределения.

Центральный момент четвертого порядка:

служит для оценки так называемого *эксцесса,* определяющего степень крутости (островершинности) кривой распределения вблизи центра распределения по отношению к кривой нормального распределения.

Центральный момент четвертого порядка:

Коэффициент эксцесса - $\mathrm{E} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ **- 3.**



МОДА x_{mod}.

Мода случайной величины: для дискретной случайной величины это наиболее вероятное значение,
для непрерывной случайной величины это значение x, при котором плотность вероятностей максимальна

x	$x_1 = -1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$	$x_4 = 7$
$P(X = x)$	$p_1 = 0{,}1$	$p_2 = 0{,}35$	$p_3 = 0{,}35$	$p_4 = 0{,}2$

МОДА x_{mod}.

Если кривая распределения имеет один максимум, то

распределение называется ***унимодальным***.

более одного максимума - ***полимодальным***.

Найти моду

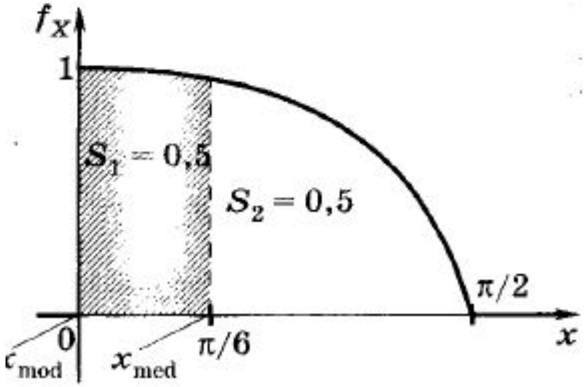
x	$x_1 = -1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$	$x_4 = 7$
$P(X = x)$	$p_1 = 0{,}1$	$p_2 = 0{,}35$	$p_3 = 0{,}35$	$p_4 = 0{,}2$

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \in [0, \pi/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Медиана

Медиана случайной величины M - это значение случайной величины $\xi = M$, для которого $p(\xi < M) = p(\xi \geq M)$

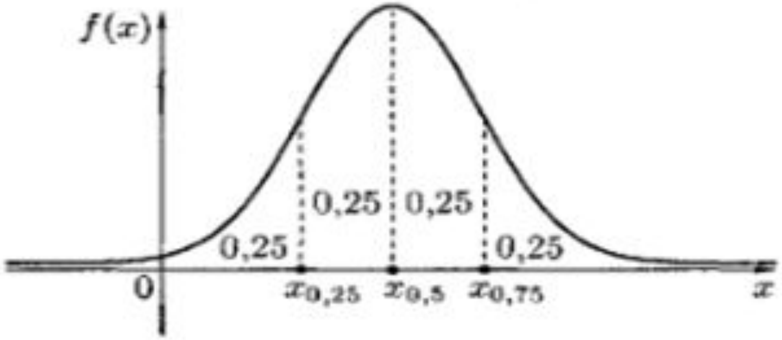
Геометрически *медиана* – это абсцисса точки, в которой площадь под кривой распределения делится пополам.



В случае симметричного модального распределения медиана, мода и математическое ожидание совпадают.

Квантиль

Квантиль x_γ - это значение случайной величины $\xi = x_\gamma$, для которого выполняется равенство $p(\xi < x_\gamma) = \gamma$.



Коэффициент вариации

Мера относительного разброса случайной величины; показывает, какую долю от математического ожидания этой величины составляет её средний разброс:

$$V=\frac{\sigma_\xi}{M_\xi}$$

Понятие случайной величины

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Характеристики положения характеристики рассеяния