

Кубик Рубика и Математика

Дарижапов Ямпил



История головоломки

- История кубика Рубика началась 13 июля 1944 года в Будапеште. В этот день на свет появился Эрнё Рубик. Его отец был авиаинженером на заводе в Эстергоме, мать — поэтесса.
В 1967 году Эрно закончил технический университет в Будапеште по специальности инженер-строитель, продолжил обучение в аспирантуре на скульптора и дизайнера.
- В 1971-1975 годах работал архитектором, затем снова вернулся в академию и получил звание профессора. Тогда-то и началось самое интересное.
- Эрно никак не мог втолковать студентам математическую теорию групп. Она их не увлекала. Занимаясь группами, Рубик однажды сделал 27 деревянных кубиков, раскрасил каждый в шесть цветов. Неожиданно оказалось довольно трудно сложить из них один куб, чтобы каждая грань была окрашена в свой цвет. Сам Рубик бился над задачей целый месяц.
- Но самым сложным оказалось придумать механизм - как заставить отдельные разноцветные кубики свободно вращаться на своих местах, не нарушая конструктивного единства всего приспособления?

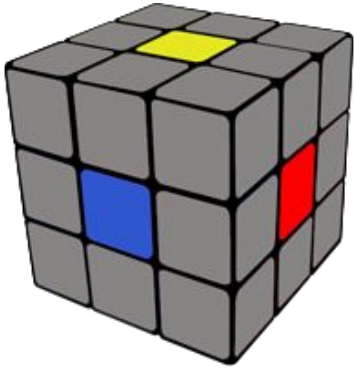


История головоломки

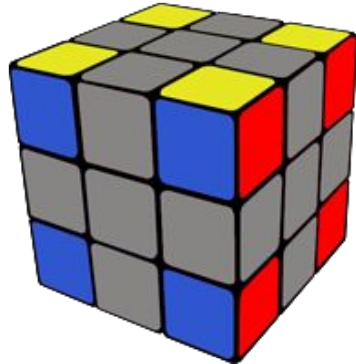
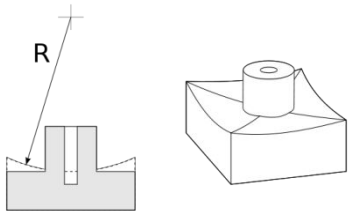


- ▣ Прежде чем заняться строительством большого куба $3 \times 3 \times 3$, Рубик опробовал модели $2 \times 2 \times 2$, элементы которых были скреплены упругими резиновыми стяжками. Впрочем, исследовались возможности применения магнитов, сложных выступов и углублений, но необходимой свободы перемещения каждого элемента получить не удавалось. Опыт показал, что подобные варианты неработоспособны.
- ▣ Вдохновение снизошло ленивым летним днем, когда отчаявшийся Рубик сидел на берегу Дуная и всматривался в прохладные струи. История эта напоминает классические случаи научного озарения — ньютоново яблоко или архимедову ванну.
- ▣ Взгляд творца привлекла обычная речная галька. Подумалось, что её острые грани со временем стачиваются течением, трущим камень о камень, пока он не обретёт простую и совершенную форму. И тут-то Рубик решил как следует "обточить" свои кубики.
- ▣ Естественно, пришлось отбросить всё лишнее. Как легко подсчитать, 26 маленьких кубиков имеют в общей сложности 156 граней. Из них Рубик смело отсек больше ста и оставил всего 54 внешние грани: одноцветные у шести центральных кубиков, двухцветные у двенадцати боковых, и трёхцветные у восьми угловых.

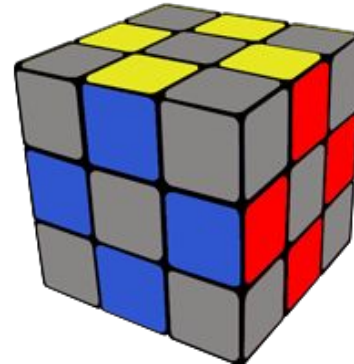
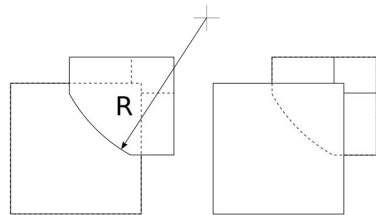
Устройство Кубика



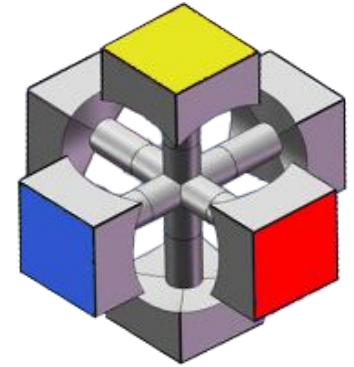
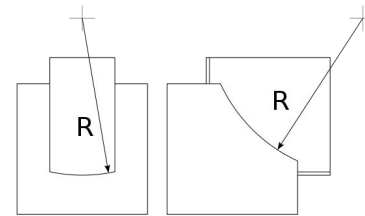
6 центральных элементов (center)



8 угловых элементов (corner)



12 ребёрных элементов (edge)



Таково механическое строение любого классического кубика 3x3x3 – дорогого скоростного или за 50 р. из палатки.

Комбинаторика

- Число всех достижимых различных состояний кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ равно
- $(8! \times 3^{8-1}) \times (12! \times 2^{12-1})/2$
=43 252 003 274 489 856 000.
- Это число не учитывает то, что ориентация центральных квадратов может быть разной. С учётом ориентации центральных квадратов количество состояний возрастает в $4^6/2 = 2048$ раз, а именно до **88 580 102 706 155 225 088 000** состояний. Однако при сборке кубика ориентацию центральных квадратов обычно не учитывают, поскольку на большинстве кубиков нет пометок, которые позволяли бы её отслеживать.

Математика кубика Рубика

- Кубик Рубика может рассматриваться как пример математической группы.
- Каждый из шести поворотов граней кубика Рубика может рассматриваться как элемент симметрической группы множества 48 этикеток кубика Рубика, не являющихся центрами граней. Более конкретно, можно пометить все 48 этикеток числами от 1 до 48 и сопоставить каждому из ходов элемент симметрической группы

- Тогда группа кубика Рубика G определяется как подгруппа S_{48} , порождаемая шестью поворотами граней: $G = \langle F, B, U, D, L, R \rangle$

- Порядок группы G равен

$$|G| = \frac{8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

- Каждая из $4,32 \cdot 10^{19}$ конфигураций может быть решена не более чем за 20 ходов (если считать за ход любой поворот грани)
- Наибольший порядок элемента в G равен 1260. Например, последовательность ходов $(RU^2 D' B D)$ необходимо повторить 1260 раз, прежде чем кубик Рубика вернётся в исходное состояние.

□

Количество отдельных решений

- $G_0 = \langle L, R, F, B, U, D \rangle$ Эта группа совпадает с группой кубика Рубика . Её порядок равен:

$$\frac{8! \cdot 3^8}{3} \cdot \frac{12! \cdot 2^{12}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

- Эта подгруппа G_1 включает в себя все конфигурации, которые могут быть решены без использования поворотов левой или правой граней на $\pm 90^\circ$. Её порядок равен:

$$\frac{8! \cdot 3^8}{3} \cdot 12! \cdot \frac{1}{2} = 21\,119\,142\,223\,872\,000$$

- Эта подгруппа G_2 включает в себя все конфигурации, которые могут быть решены при условии, что повороты четырёх вертикальных граней на $\pm 90^\circ$ запрещены. Её порядок равен:

$$8! \cdot (8! \cdot 4!) \cdot \frac{1}{2} = 19\,508\,428\,800$$

- Эта подгруппа G_3 включает в себя все конфигурации, которые могут быть решены с использованием только поворотов на 180° (half-turns). Она получила название «группа квадратов» (squares group). Её порядок равен:

$$(4! \cdot 4) \cdot \frac{4! \cdot 4! \cdot 4!}{2} \cdot 1 = 663\,552$$

- Эта подгруппа G_4 включает в себя единственную начальную конфигурацию.

$$G_4 = \{1\}$$

Нижние оценки числа Бога

- Достаточно легко показать, что существуют разрешимые конфигурации, которые не могут быть решены менее чем в 17 ходов в метрике FTM или 19 ходов в метрике QTM.

- Доказательство для метрики FTM

- Первый ход можно сделать $6 \rightarrow \pm 90^\circ$ способами (любую из шести граней можно повернуть на один из трёх углов $\pm 90^\circ$), на втором и каждом из следующих ходов число способов равно 15 , так как нет смысла дважды подряд поворачивать одну грань.
- Количество различных последовательностей из n ходов будет равно $18 \cdot 15^{n-1}$. Число последовательностей длины, не превосходящей n , равно $18 \cdot (1 + 15 + \dots + 15^{n-1})$. Минимальное n , при котором эта сумма впервые превысит общее число разрешимых конфигураций $|G|$, равно 17 . Следовательно, существуют конфигурации, которые не могут быть решены менее чем в 17 ходов.

17

Мой пример запоминания

			Ф					
			Р	В	И			
			З					
П			Г		К			
У	Л	Ж	В	У	А	Д	Р	С
О			Б		Л			
			Е					
			Н	Ф	М			
			Т					
			Ц					
			Ч	Д	Х			
			Ш					

			Ф		М			
				В				
			Буф		Б			
Х		Буф	Буф	А	В	Л		
	Л			У		Р		
С		И	Ж	Г	Д	П		
			З		Е			
				Ф				
			Т		О			
			Р		Н			
				Д				
			У		К			

Мировые соревнования

- В 21 веке возобновились и соревнования по сборке кубика Рубика. Появилась Всемирная Ассоциация Кубика (WORLD CUBE ASSOCIATION), которая проводит чемпионаты по официальным правилам и ведет официальный мировой рейтинг результатов. Люди и сейчас улучшают рекорд за рекордом, стремительно приближаясь к фантастической отметке в 4,90 секунд.
- Спидкубинг-(Speed-скорость, cube-куб или “куб на скорость”)-сборка Кубика Рубика на скорость.
- Нужно отметить, что сборка кубика Рубика не единственная номинация на такого рода чемпионатах.
- Рекорды также фиксируются и в таких дисциплинах как:
 - • сборка одной рукой
 - • сборка ногами
 - • сборка с закрытыми глазами 3x3, 4x4, 5x5
 - • кубики 2x2, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7
 - • пирамидка
 - • мегаминкс
 - • square-1
 - • skewb
 - • Часы рубика
 - • Сборка Кубика Рубика на количество ходов

Мировые рекордсмены

- • 3x3-**Lucas Etter** 4.90
- • сборка одной рукой- Feliks Zemdegs 6.88
- • сборка ногами- Jakub Kupa 20.57
- • сборка с закрытыми глазами- Kaijun Lin 21.05
- • сборка на максимальное количество кубиков собранных с закрытыми глазами(multi blind)- **Marcin Kowalczyk** 41/41 54:14
- • сборка на минимальное количество движений- **Marcel Peters** 19 ходов
- • **Tim Wong** 19 ходов
-
- • 3x3- Lucas Etter 4.90
- • 4x4- Feliks Zemdegs 21.54
- • 5x5- Feliks Zemdegs 46.97
- • 2x2- Rami Sbahi 0.58
- • Piraminx (Пирамидка)- Drew Brads 1.32
- • Megaminx(Мегаминкс)-Yu Da-Hyun 37.58
- • square-1- Bingliang Li 6.96
- • skewb- Jonatan Klosko 1.10
- • Rubik's clock (Часы Рубика)- Nathaniel Berg 3.73

Головоломки

Головоломки



Рекорды

Lucas Etter 4.90

сборка одной рукой- **Feliks Zemdegs** 6.88

сборка ногами- **Jakub Kupa** 20.57

сборка с закрытыми глазами-**Kaijun Lin** 21.05

сборка на максимальное количество кубиков
собранных с закрытыми глазами(multi blind)-

Marcin Kowalczyk 41/41 54:14

сборка на минимальное количество движений-

Marcel Peters 19 ходов

Tim Wong 19 ходов



Feliks Zemdegs 21.54

сборка с закрытыми глазами- **Oliver Frost**
2:02.75

$$\frac{8! \times 3^7 \times 24!^2}{4!^6 \times 24} \approx 7.40 \times 10^{45}$$

Головоломки

Головоломки



Рекорды

Feliks Zemdegs 46.97

сборка с закрытыми глазами-

Roman Strakhov 5:04.81



Kevin Hays 1:33.55



Feliks Zemdegs 2:23.55

Головоломки

Головоломки

Рекорды



Drew Brads *1.32*



Yu Da-Hyun *37.58*



Bingliang Li *6.96*

Головоломки

Головоломки



Рекорды

Jonatan Kłosko *1.10*



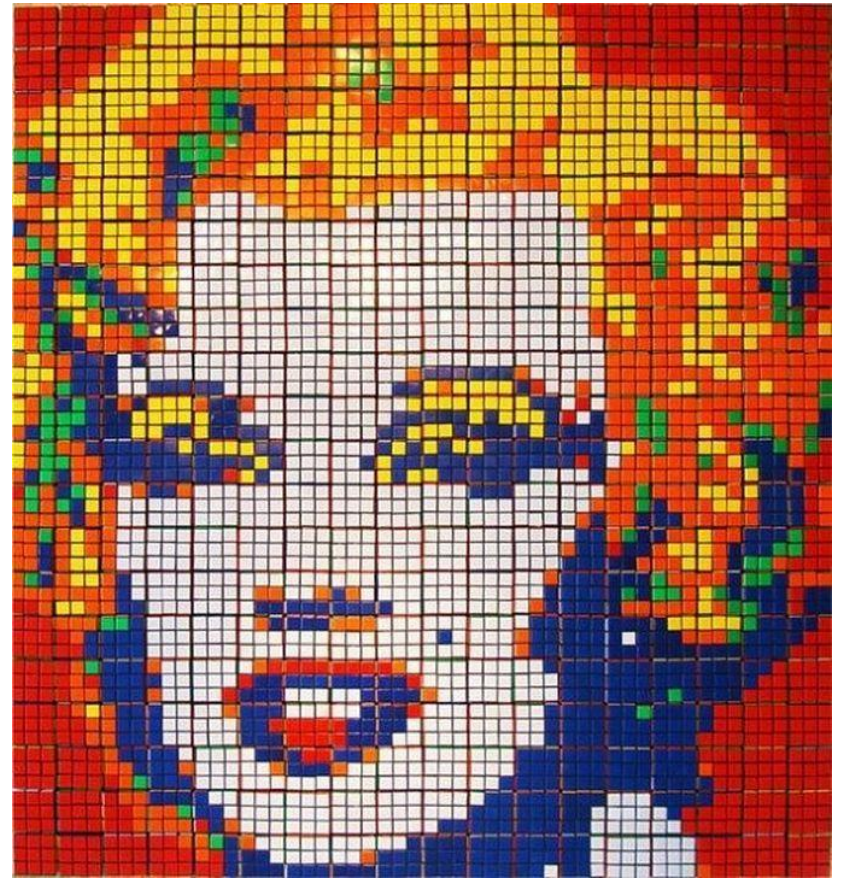
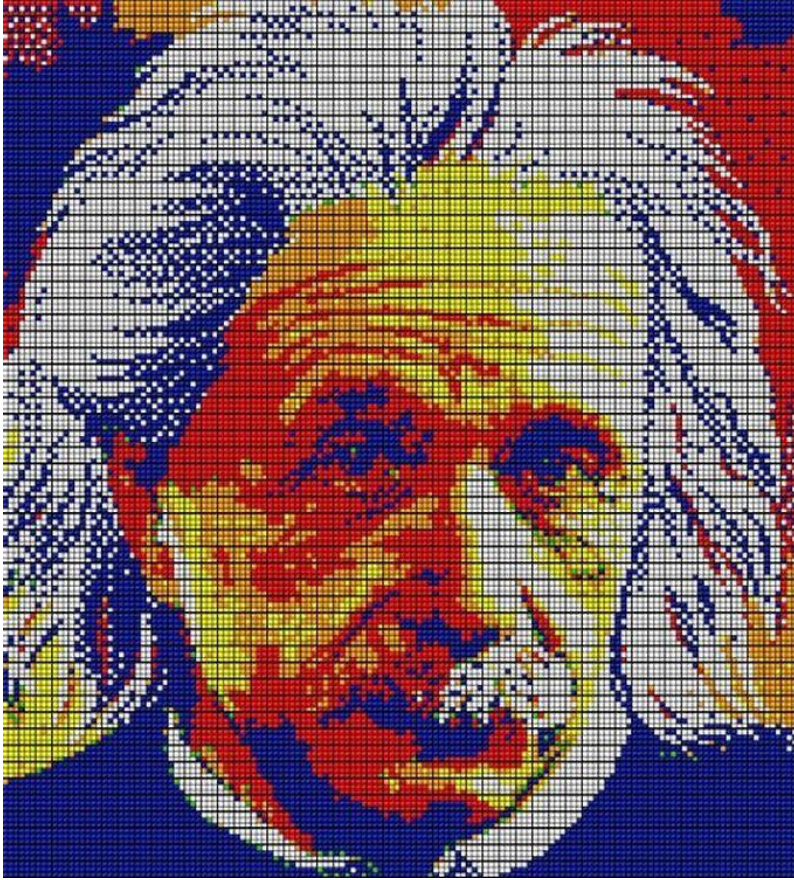
Nathaniel Berg *3.73*



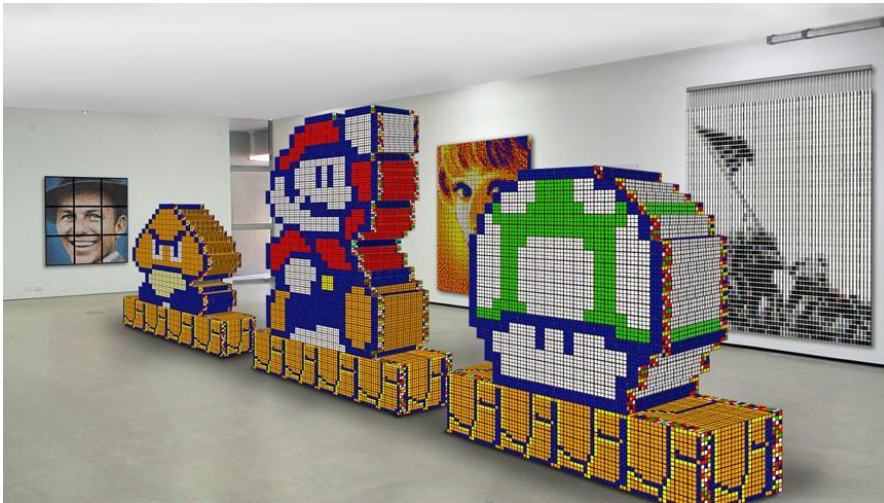
Rami Sbahi *0.58*

Творчество

- Также из кубиков можно составлять картины и портреты.

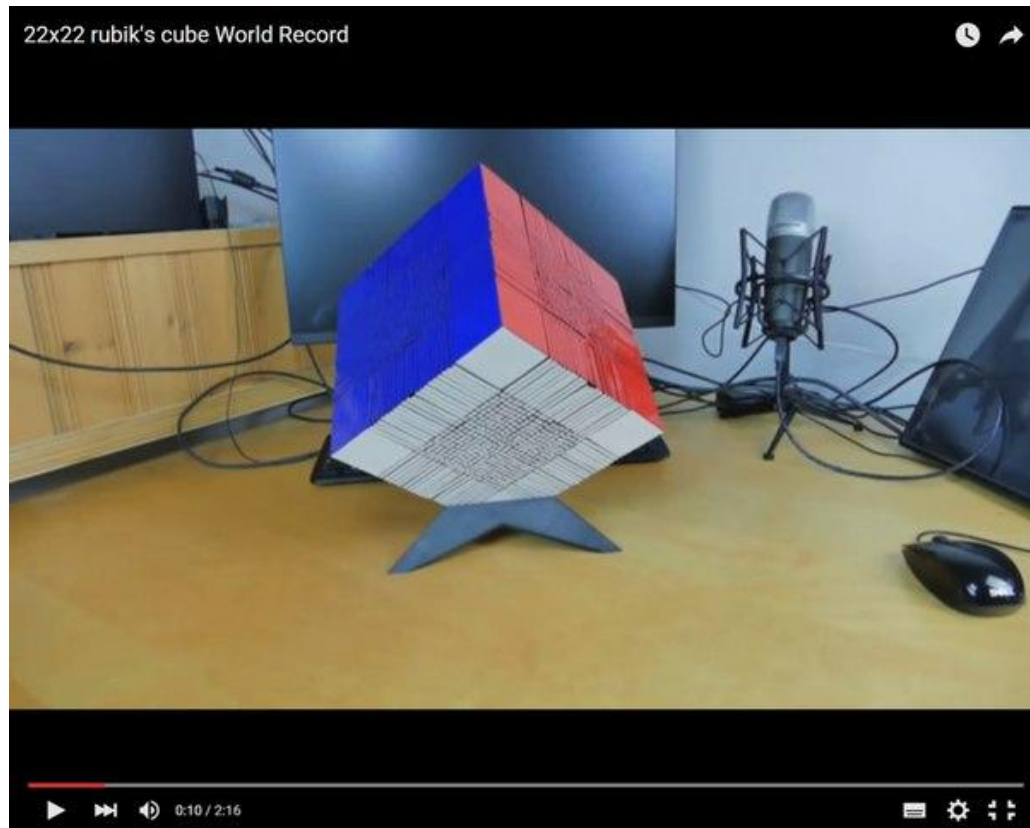


Творчество



Неофициальные рекорды

- Самым большим кубиком в своей размерности ($n \times n \times n$) кубик $22 \times 22 \times 22$ изготовленный норвежцем 3 недели назад



Заключение

- Кубик Рубика за последние годы стал не просто игрушкой века, но и целым молодежным движением. У нас в России Спидкубингом увлекается около 20000 людей

