

Корень n -й степени и его свойства

Определение корня n -й степени

Арифметическим корнем n -й степени из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b , n -я степень которого равна a .

$$b = \sqrt[n]{a}, \text{ где } n \text{ – показатель корня,}$$
$$a \text{ – подкоренное выражение}$$

Если n – нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a .

Если n – четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$.

Примеры

1. $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

2. $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

3. Решите уравнение $x^6 = 7$

Решение : корнями уравнения служат числа, шестая степень которых равна 7. Таких чисел два : $\sqrt[6]{7}$ и $-\sqrt[6]{7}$

4. Решите уравнение $x^3 = 27$

Решение : уравнение имеет единственный корень. Этот корень есть число, третья степень которого равна 27,

т.е. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

Свойства арифметического корня

1. Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней этих

множителей.

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из

числителя, деленному на корень из знаменателя.

Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.

Если n , k и m – натуральные числа и $a \geq 0$,

$$\text{то } \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

4. *Если n и k – натуральные числа и $a \geq 0$,*

$$\text{то } \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Практическое задание

1. Найдите значение выражения :

$$а) \sqrt[4]{16} \quad б) \sqrt[5]{32} \quad в) \sqrt[12]{1} \quad г) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$$

$$д) \sqrt[3]{-0,027} \quad е) \sqrt[4]{0,0625} \quad ж) \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} \quad з) \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$$

2. Найдите значение выражения :

$$а) (\sqrt{10})^2 \quad б) (-\sqrt[4]{12})^4 \quad в) \sqrt[6]{2^6} \quad г) -\sqrt[6]{25^3}$$

$$д) (\sqrt[3]{5})^3 \quad е) (2\sqrt[5]{-2})^5 \quad ж) 2^4 \sqrt{(-3)^4} \quad з) \sqrt[6]{64^2}$$

3. Решите уравнение:

$$a) x^3 = 27 \quad б) x^4 = -16 \quad в) x^3 + 8 = 0 \quad г) x^8 - 1 = 0$$

$$д) x^4 = 81 \quad е) x^3 = -7 \quad ж) 16x^4 - 1 = 0 \quad з) x^4 - 16 = 0$$

4. Найдите значение выражения:

$$a) \sqrt[3]{8 \cdot 27} \quad б) \sqrt[4]{625 \cdot 16} \quad в) \sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}} \quad г) \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$$

$$д) \sqrt[4]{16 \cdot 0,0001} \quad е) \sqrt[4]{0,0016 \cdot 81} \quad ж) \sqrt[6]{64 \cdot \frac{1}{729}} \quad з) \sqrt[5]{-7 \frac{19}{32}}$$

5. Вычислите:

$$a) \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} \quad б) \sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27} \quad в) \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}} \quad г) \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$д) \sqrt[3]{135} \cdot \sqrt[3]{25} \quad е) \sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3} \quad ж) \frac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}} \quad з) \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$$

6. Внесите множитель под знак корня :

$$а) 3\sqrt{2} \quad б) 5^3\sqrt{3} \quad в) 2^5\sqrt{\frac{1}{8}} \quad г) a^4\sqrt{5}, a > 0$$

7. Упростите выражение :

$$а) \sqrt{\sqrt[3]{6}} \quad б) \sqrt[3]{\sqrt{2}} \quad в) \sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} \quad г) \sqrt[6]{a^4}$$

$$д) \sqrt[3]{a^3\sqrt{a}} \quad е) \sqrt{\sqrt[4]{4}} \quad ж) \sqrt[4]{4^3\sqrt{4}} \quad з) \sqrt[4]{m^3\sqrt{m}}$$

8. Упростите выражение :

$$а) (3 + 2\sqrt{6})^2 + (3 - 2\sqrt{6})^2$$

$$б) \left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \right)^2$$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Вычислите :

$$а) \sqrt[9]{512} \quad б) \sqrt[7]{-128}$$

$$в) (-\sqrt[4]{12})^4 \quad г) 2^4 \sqrt{(-3)^4}$$

2. Решите уравнение :

$$а) x^5 - 32 = 0$$

$$б) 16x^4 + 625 = 0$$

3. Вычислите :

$$а) \sqrt[3]{24 \cdot 9} \quad б) \sqrt[4]{\frac{1250}{2}}$$

$$в) \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{7} \quad г) \frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$$

Вариант 2

1. Вычислите :

$$а) \sqrt[8]{256} \quad б) \sqrt[6]{-64}$$

$$в) (-\sqrt[4]{13})^4 \quad г) 3^4 \sqrt{(-2)^4}$$

2. Решите уравнение :

$$а) x^5 - 243 = 0$$

$$б) 81x^4 + 16 = 0$$

3. Вычислите :

$$а) \sqrt[3]{49 \cdot 7} \quad б) \sqrt[4]{\frac{768}{6}}$$

$$в) \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} \quad г) \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$$

Домашняя работа

1. Вычислите:

$$a) \sqrt[4]{\frac{16}{0,0625}} \quad б) \sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3} \quad в) \sqrt[3]{75 \cdot 45} \quad г) \sqrt[3]{\sqrt{729}}$$

2. Решите уравнение:

$$a) x^3 - 64 = 0$$

$$б) x^4 - 21 = 0$$

$$в) 16x^2 - 9 = 0$$