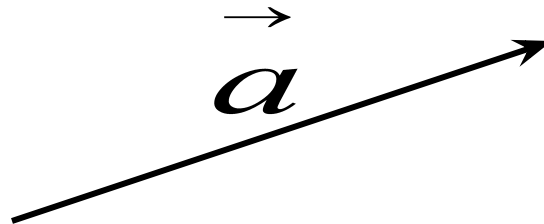
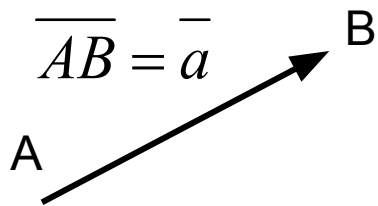


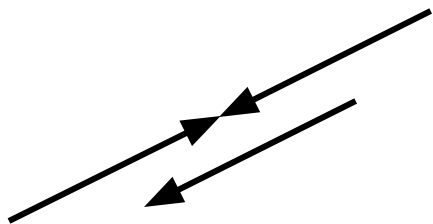
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектор – направленный отрезок.

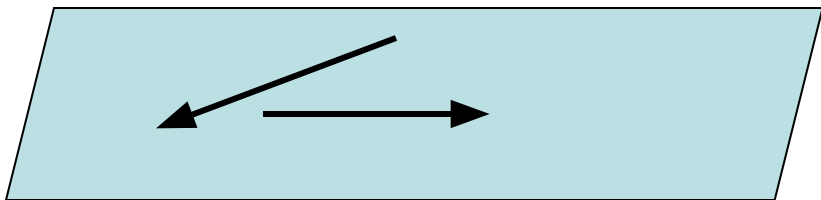




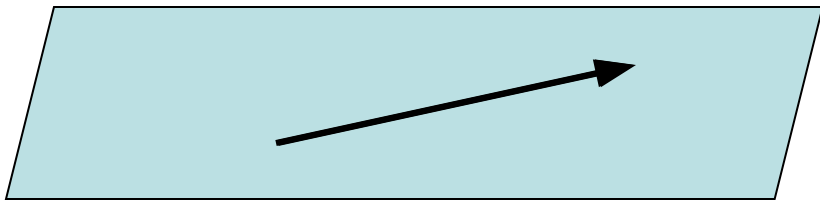
Модуль вектора –
длина направленного отрезка $|\overline{AB}| = |\vec{a}|$.



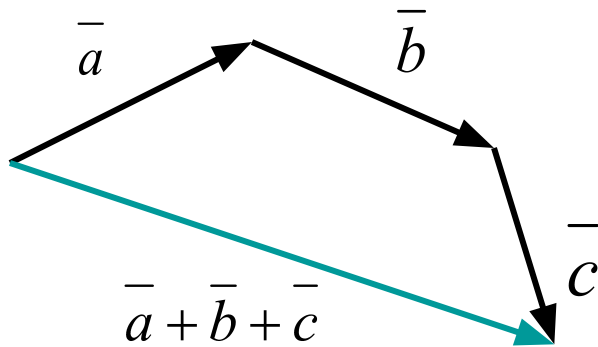
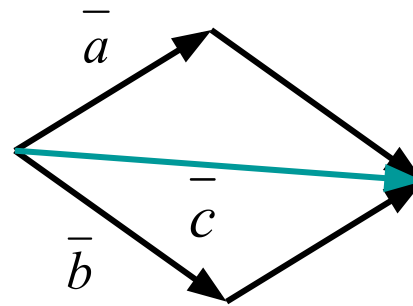
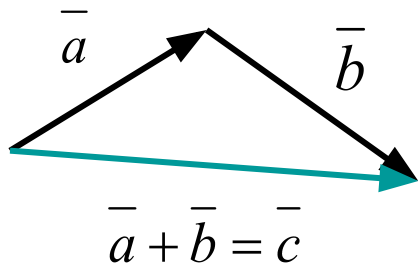
Векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых называются **коллинеарными**.



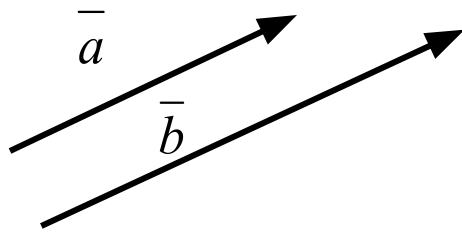
Векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях называются **компланарными**.



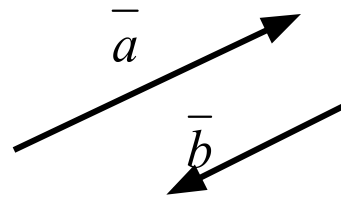
Сложение векторов



Умножение вектора на число



$$\vec{b} = 1,4 \cdot \vec{a} \quad (\lambda > 0)$$

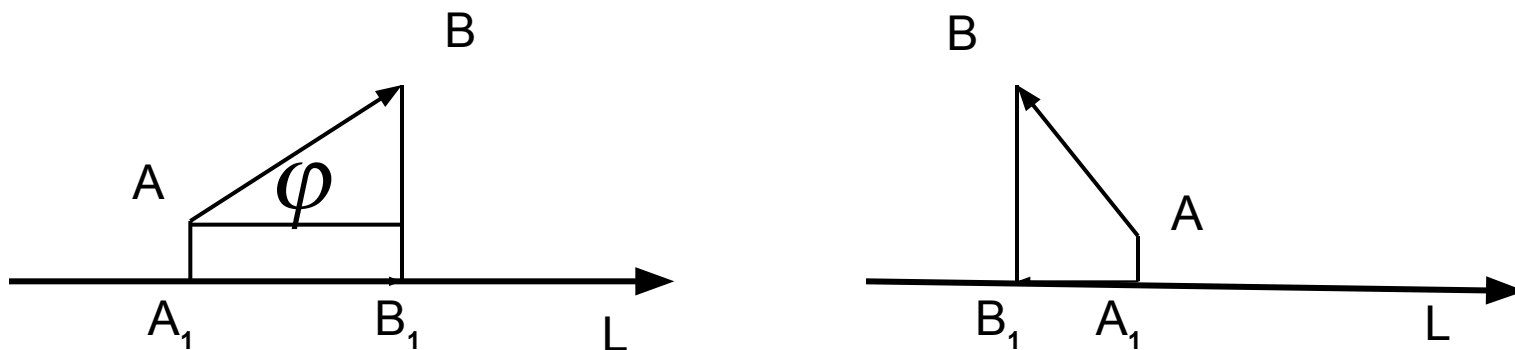


$$\vec{b} = (-0,7) \cdot \vec{a} \quad (k < 0)$$

Множество всех векторов на плоскости, в котором определены операции сложения векторов и умножения на число называется *векторным пространством R^2* .

Множество всех векторов в пространстве, в котором определены операции сложения векторов и умножения на число называется *векторным пространством R^3* .

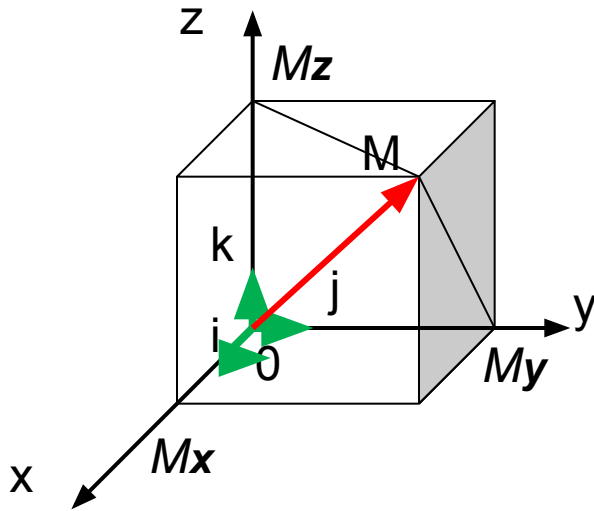
Проекция вектора на ось



Проекцией вектора \overline{AB} на ось L $np_L \overline{AB}$ называется длина вектора $\overline{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с осью L , и со знаком «-», если направление $\overline{A_1B_1}$ противоположно оси L .

$$np_L \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$$

Ортонормированный базис в пространстве R^3 . Декартовы прямоугольные координаты.



M - точка в пространстве.

Проекции вектора OM на координатные оси Ox , Oy , Oz называются *координатами точки M*

и обозначаются $M(x, y, z)$.

Координаты радиус-вектора OM равны координатам точки M .

$$\overline{OM} = \{x, y, z\}.$$

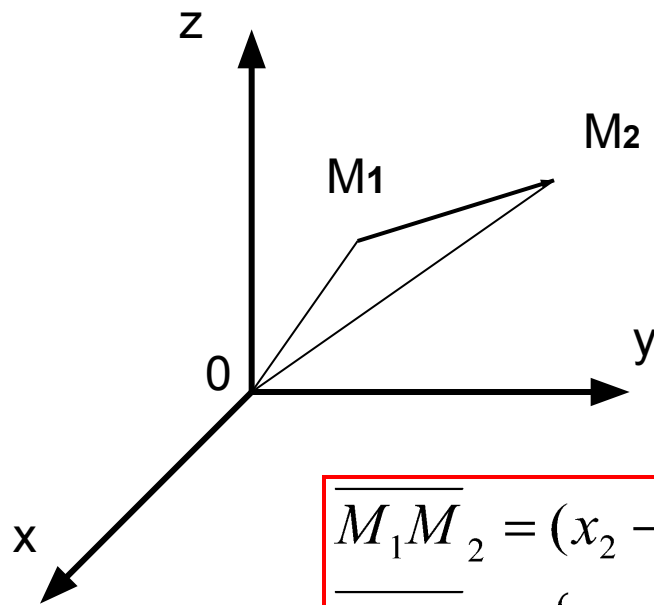
$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – базис в пространстве R^3 , длина базисных векторов равна 1.

$$\overline{OM} = \overline{OM}_x + \overline{OM}_y + \overline{OM}_z$$

$$\overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

Координаты вектора, заданного координатами начала и конца



$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

$$\overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} = \overline{OM_2}$$

$$\overline{OM_1} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},$$

$$\overline{OM_2} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}.$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k},$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Расстояние d между двумя точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

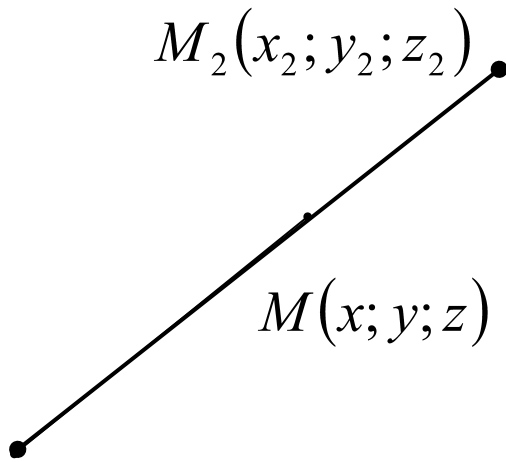
$$\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}, \quad \bar{b} = \{\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z\}$$

Следствие.

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = k$$

Деление отрезка в заданном отношении



$$M_1(x_1; y_1; z_1)$$

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x)$$

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$$

$$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$$

$$\frac{|M_1M|}{|M_2M|} = \lambda \Rightarrow \overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$$

$$\overline{M_1M} = \{(x - x_1); (y - y_1); (z - z_1)\}$$

$$\lambda \cdot \overline{MM_2} = \{\lambda \cdot (x_2 - x); \lambda \cdot (y_2 - y); \lambda \cdot (z_2 - z)\}$$

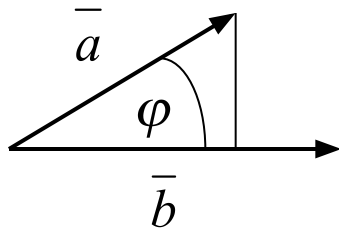
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1},$$
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1},$$
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}.$$

Следствие.

Координаты
середины отрезка:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Скалярное произведение векторов



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$

Формула скалярного произведения в координатной форме

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Задача.

Даны вершины четырехугольника A(1; 2; 3), B(7; 3; 2), C(-3; 0; 6), D(9; 2; 4).

1) Найти величину внутреннего угла при вершине C.

2) Доказать, что диагонали перпендикулярны.

$$1) \overline{CB} = \{10; 3; -4\}$$

$$2) \overline{AC} = \{-4; -2; 3\}$$

$$\overline{CD} = \{12; 2; -2\}$$

$$\overline{BD} = \{2; -1; 2\}$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CD} = |\overline{CB}| \cdot |\overline{CD}| \cdot \cos \hat{C}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{134}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{152}} \approx 0,9721$$

$$\hat{C} = \arccos(0,9721)$$

Векторное пространство \mathbb{R}^n , в котором определено скалярное произведение называется *Евклидовым пространством* и обозначается E^n .

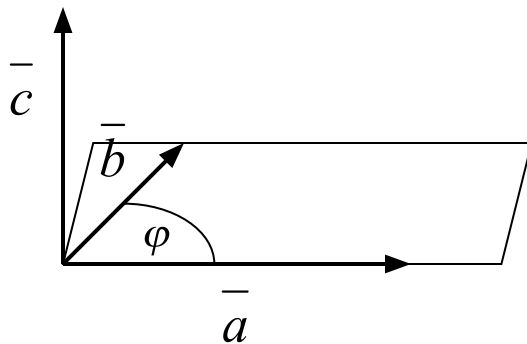
Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , определяемый условиями:

$$1) \bar{c} \perp \bar{a}, \quad \bar{c} \perp \bar{b},$$

2) векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} образуют правую тройку.

$$3) |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi = S_{\text{пар.}},$$



Если векторы заданы координатами, то координаты векторного произведения вычисляются по формуле:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}.$$

Задача.

Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\overline{AB} = \{2; -2; -3\}$$

$$\overline{AC} = \{4; 0; 6\}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \{-12; -24; 8\}$$

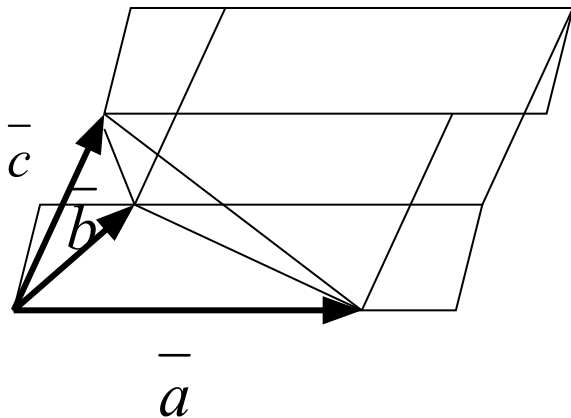
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 576 + 64} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{784} = 14 (\text{кв.ед.})$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трёх векторов называется

$$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}).$$



Свойства:

а) Модуль смешанного произведения численно равен объёму параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах.

б) Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Если векторы заданы своими координатами, то их смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Задача. Доказать, что векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ компланарны.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (28 - 8 + 9) - (12 + 24 - 7) = 29 - 29 = 0$$

Линейная зависимость векторов. Базис векторного пространства.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}$ называются *линейно-зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что $\lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} + \dots + \lambda_k \cdot \overline{a_k} = \overline{0}$. В противном случае векторы называются *линейно-независимыми*.

Совокупность n линейно-независимых векторов в пространстве R^n называется базисом.

Теорема. Любой вектор пространства R^n можно разложить по базису единственным образом.

Доказательство:

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \mathbb{0}, \bar{a}_n - \text{базис} \Rightarrow \lambda \cdot \bar{x} + \lambda_1 \cdot \bar{a}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{a}_2 + \mathbb{0} + \lambda_n \cdot \bar{a}_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{\lambda} (\lambda_1 \cdot \bar{a}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{a}_2 + \mathbb{0} + \lambda_n \cdot \bar{a}_n)$$

Пусть разложение не единственное

$$\bar{x} = k_1 \cdot \bar{a}_1 + k_2 \cdot \bar{a}_2 + \mathbb{0} + k_n \cdot \bar{a}_n,$$

$$\bar{x} = l_1 \cdot \bar{a}_1 + l_2 \cdot \bar{a}_2 + \mathbb{0} + l_n \cdot \bar{a}_n.$$

$$\Rightarrow \bar{0} = (k_1 - l_1) \cdot \bar{a}_1 + (k_2 - l_2) \cdot \bar{a}_2 + \mathbb{0} + (k_n - l_n) \cdot \bar{a}_n$$

$$\Rightarrow k_1 = l_1; k_2 = l_2; \dots; k_n = l_n.$$

Для любого вектора \bar{x} в пространстве \mathbb{R}^n

имеет место разложение по базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

$$\bar{x} = \lambda_1 \cdot \bar{a}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \bar{a}_n.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - **координаты вектора** относительно базиса.

Задача. Найти координаты вектора $\bar{c} = \{8;5;11\}$ в базисе $\bar{a}_1 = \{1;2;3\}$,
 $\bar{a}_2 = \{3;2;1\}$,
 $\bar{a}_3 = \{3;1;2\}$.

Решение: $\bar{c} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 8, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 5, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 11. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

из решения системы

