

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

МАТРИЦА размера $m \times n$ – ТАБЛИЦА из m строк, n столбцов.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элемент матрицы,

i – номер строки,

j – номер столбца,

a_{ii} – диагональный элемент.

Виды матриц

Квадратная матрица ($m = n$) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Диагональная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

Единичная матрица $E_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Операции над матрицами

Умножение матрицы на число

$$\lambda \cdot \underset{m \times n}{A} = \underset{m \times n}{B} \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц

$$\underset{m \times n}{A} + \underset{m \times n}{B} = \underset{m \times n}{C} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ m \times n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ n \times m \end{pmatrix} \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

$$\underset{m \times k}{A} \cdot \underset{k \times n}{B} = \underset{m \times n}{C}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 5 & (1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0) = -2 & (1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)) = 1 \\ (3 \cdot 1 + 4 \cdot 2) = 11 & -6 & 5 \\ 16 & -8 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 11 & -6 & 5 \\ 16 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ – число, характеризующее квадратную матрицу .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 1-го ПОРЯДКА

$$\text{Если } A = (a_{11}), \text{ то } \det(A) = a_{11}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 2-го ПОРЯДКА

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Пример :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 11$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ n-ГО ПОРЯДКА

Минор M_{ij} – определитель матрицы, которая получается из исходной матрицы вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j .

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Определитель равен сумме произведений элементов любой строки или любого столбца на алгебраические дополнения этих элементов.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

A^{-1} называется обратной к матрице A , если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{Найти } A^{-1}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |4| = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |3| = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |5| = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |2| = 2.$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система из m уравнений с n
неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

Система называется **совместной**, если имеет решение.

Система называется **несовместной**, если не имеет решения.

Совместная система называется **определенной**, если имеет единственное решение.

Совместная система называется **неопределенной**, если имеет более одного решения.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Метод обратной матрицы

$$X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основная матрица системы}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных коэффициентов}$$

Решить методом обратной матрицы $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$
Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

II. Формулы Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n$$

где Δ – определитель основной матрицы системы,

Δ_i – определитель матрицы, полученной из основной матрицы системы заменой i – того столбца столбцом свободных коэффициентов.

Если $\Delta = \Delta_i = 0$ для любого $i \Rightarrow$ система неопределенная.

Если $\Delta = 0$ и хотя бы один $\Delta_i \neq 0 \Rightarrow$ система несовместная.

Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -0,5$$

I. Метод Гаусса.

1 шаг (прямой ход): приведение расширенной матрицы системы с помощью тождественных преобразований к треугольному виду.

2 шаг (обратный ход): последовательное нахождение неизвестных.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ

- ✓ Изменение порядка строк.
- ✓ Прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на число.

Пример

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ \leftarrow + \\ \times(-1) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \times(-3) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & \Rightarrow x_1 = 1,5 \\ 0x_1 - x_2 + 0x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -1 & \Rightarrow x_3 = -0,5 \end{cases}$$

Если в процессе преобразований получилась строка, в которой последний элемент отличен от нуля, а все остальные – нулевые, то система несовместна, т.е. нет решений.

Решение неопределенной системы (на примере)

Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20; \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ 2 & -4 & -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \leftarrow + \\ (-2) \\ \leftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если количество ненулевых строк меньше количества неизвестных, то система неопределенная.

Количество неизвестных = 4, количество ненулевых строк = 2, следовательно, система имеет бесконечно много решений.

Общим решением неопределенной системы линейных уравнений называется выражение базисных переменных через свободные.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 10. \end{cases}$$

Количество базисных переменных равно количеству ненулевых строк после преобразований.

За базисные переменные принимаем переменные соответствующие ненулевым диагональным элементам.

В данном случае, базисные: x_1 и x_2 .
Остальные переменные - свободные.

Выразим базисные переменные x_1 и x_2 через свободные x_3 и x_4 :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2 \cdot \left(2 - \frac{2}{5}x_3 + x_4 \right) + x_3 - 3x_4; \\ x_2 = 2 - \frac{2}{5}x_3 + x_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 + \frac{1}{5}x_3 - x_4; \\ x_2 = 2 - \frac{2}{5}x_3 + x_4. \end{cases}$$

Присваивая свободным переменным различные значения, получим **частные** решения.

Найдем одно из частных решений

$$x_3 = 0; x_4 = 0; x_1 = 9; x_2 = 2.$$

Таким образом, метод Гаусса может использоваться для доказательства несовместности и неопределенности системы линейных уравнений.