



Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления

Веремей Е.И.

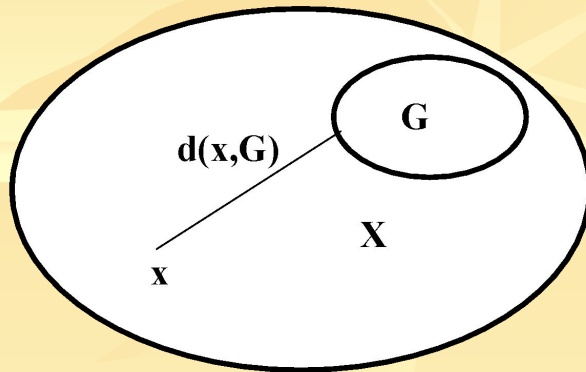
Введение в задачи исследования и проектирования цифровых систем

Лекции 14 — 16

Раздел 3. Методы синтеза цифровых систем

1. Основы оптимизационного подхода

1. Пространство X проектных решений и множество G допустимых проектных решений:



$d(x, G) = \inf_{g \in G} \rho(x, g)$ – расстояние от произвольной точки x до допустимого множества G

2. Обобщенная оптимизационная формализация задачи проектирования

$$J(x) = d(x, G) \rightarrow \min_{x \in X}$$

3. Обобщенные необходимые условия экстремума:

$dJ(x, h)$ - дифференциал Фреше, $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} r(x, h) / \|h\| = 0$

$$J(x + h) - J(x) = dJ(x, h) + r(x, h) \quad \forall h \in G$$

$$dJ(x, h) = 0$$

5. Формы необходимых условий экстремума:

- равенство нулю градиента функции многих переменных
- системы дифференциальных уравнений Эйлера
- матричные алгебраические или дифференциальные уравнения Риккати;
- обобщенные операторные уравнения.

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n]), \quad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$$

Модель дискретного объекта

$$\mathbf{u}[n] \in \mathbf{U} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Ограничения на управление

$$\mathbf{x}[n] \in \mathbf{X} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Ограничения на состояние

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}[n] - \mathbf{r}_x[n]\| = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}[n] - \mathbf{r}_u[n]\| = 0$$

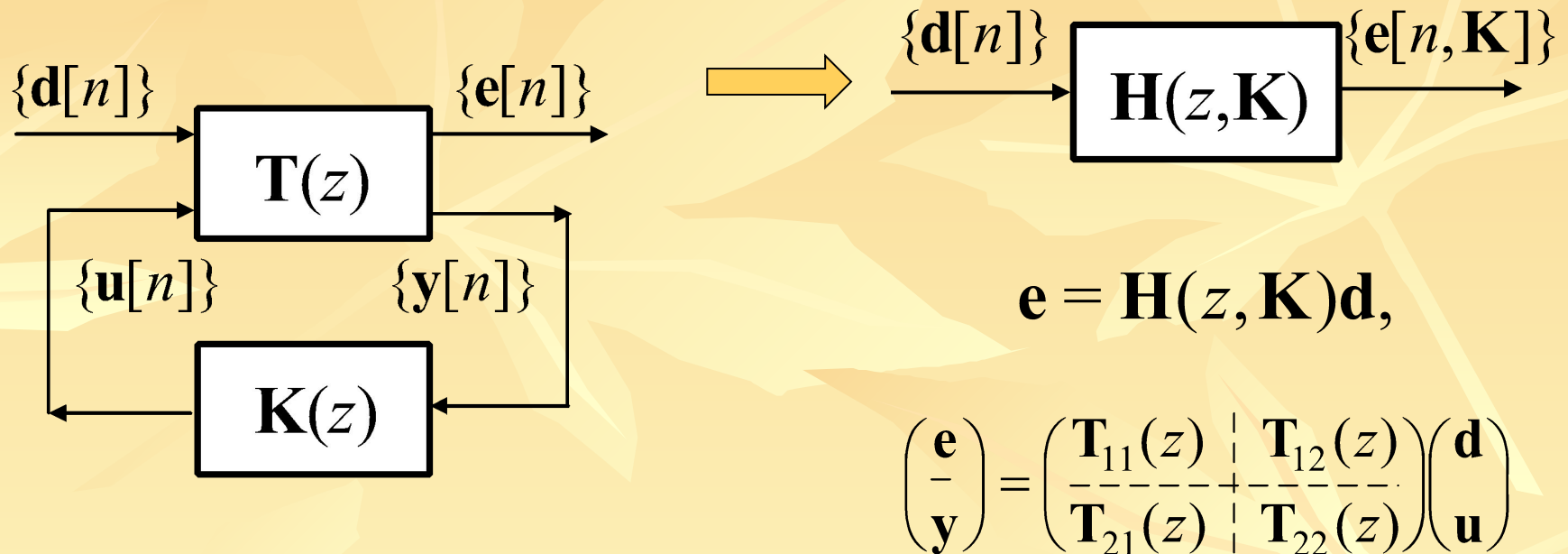
Цель управления

$$J = J(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k])$$

Функционал качества

Задача синтеза цифровых систем

состоит в формировании управляющей последовательности $\mathbf{u}[n]$ ($n=0, 1, 2, \dots$) m_s -мерных векторов из определённого класса, которая обеспечивает достижение поставленной цели с учетом заданных ограничений, включая ограничение на функционал качества



$$\mathbf{H}(s, \mathbf{K}) = \mathbf{T}_{11}(s) + \mathbf{T}_{12}(s)\mathbf{K}(s)[\mathbf{E} - \mathbf{T}_{22}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{T}_{21}(s)$$

$$J = J(\mathbf{u}) = J(\{\mathbf{e}[n, \mathbf{K}]\}) = J(\mathbf{H}(z, \mathbf{K})\{\mathbf{d}[n]\})$$

$$J = J(\mathbf{K}) = \|\mathbf{H}(z, \mathbf{K})\| \rightarrow \inf_{\mathbf{K} \in \Omega}, \quad J_e = J_e(\mathbf{K}) = \|\mathbf{e}(t, \mathbf{K})\| = \|\tilde{e}(t, \mathbf{K})\| \rightarrow \inf_{\mathbf{K} \in \Omega}.$$

2. Параметрическая оптимизация с заданием динамического «коридора»

Пусть задан объект управления в виде DLTИ системы и регулятор

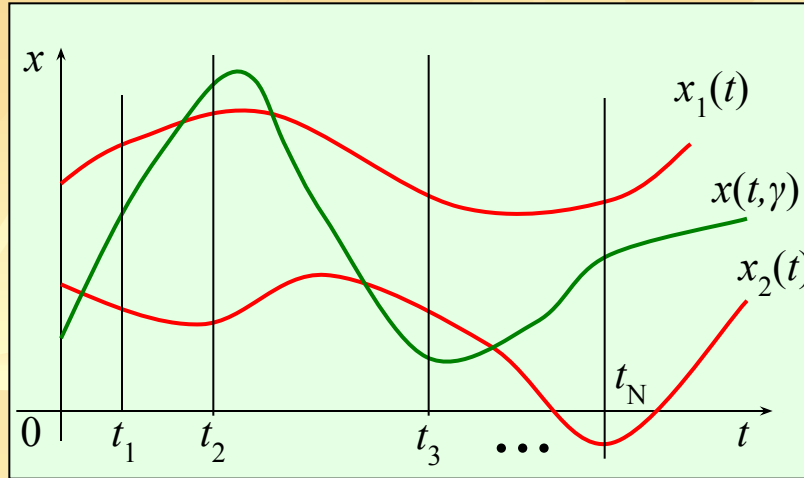
$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}(z) & | & \mathbf{T}_{12}(z) \\ \hline \mathbf{T}_{21}(z) & | & \mathbf{T}_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}(z, \mathbf{h})\mathbf{y}$$

Математическая модель замкнутой системы в частотной области:

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(z, \mathbf{h})\mathbf{d}$$

$$\mathbf{H}(z, \mathbf{h}) = \mathbf{T}_{11}(z) + \mathbf{T}_{12}(z)\mathbf{K}(z, \mathbf{h})[\mathbf{E} - \mathbf{T}_{22}(z)\mathbf{K}(z, \mathbf{h})]^{-1}\mathbf{T}_{21}(z)$$

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{d}[n]\} \quad \longrightarrow \quad x[n, \mathbf{h}] = \|\mathbf{e}[n, \mathbf{h}]\| = \sqrt{\mathbf{e}'[n, \mathbf{h}]\mathbf{R}\mathbf{e}[n, \mathbf{h}]}$$

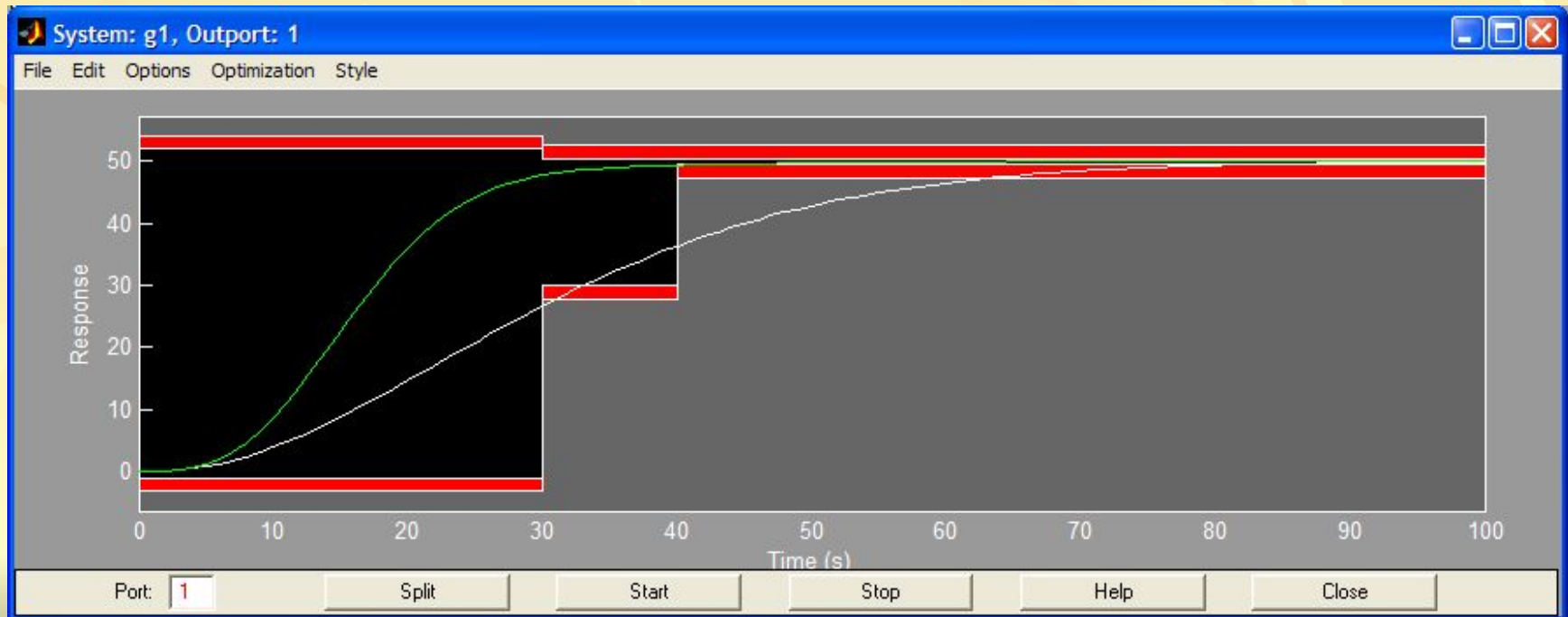


$$x_2[n] < x[n, \mathbf{h}] < x_1[n] \quad \forall n \in [0, N]$$

$$\alpha_n(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_2[n] \leq x[n, \mathbf{h}] \leq x_1[n]; \\ x[n, \mathbf{h}] - x_1[n], & \text{if } x[n, \mathbf{h}] > x_1[n]; \\ x_2[n] - x[n, \mathbf{h}], & \text{if } x[n, \mathbf{h}] < x_2[n]. \end{cases}$$

$$\alpha(\mathbf{h}) = \sum_{n=0}^N \alpha_n(\mathbf{h})$$

$$\alpha(\mathbf{h}) \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in E^p}$$



$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \longrightarrow \det(\mathbf{E}z - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \Delta(z) \longrightarrow \mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k$$

DLTI-система

Желаемый хар. полином

Регулятор по состоянию

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8123 & 0.0362 & -0.0913 \\ -0.0970 & 0.8872 & 0.1374 \\ 0.0156 & -0.1642 & 0.8813 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.0029 \\ -0.0115 \\ -0.0586 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_A = \begin{pmatrix} 0.785 \\ 0.988 + 0.173j \\ 0.988 - 0.173j \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы A

Период дискретности: T=0.025с

Корни желаемого характеристического полинома:

$$\mathbf{z}_\Delta = \gamma \mathbf{z}_A \quad \gamma = 1.04, \quad \gamma = 0.8, \quad \gamma = 0.6,$$

Уравнения замкнутой системы

$$\mathbf{x}[n+1] = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}[n] + \mathbf{B} \cdot d \cdot u_e[n]$$

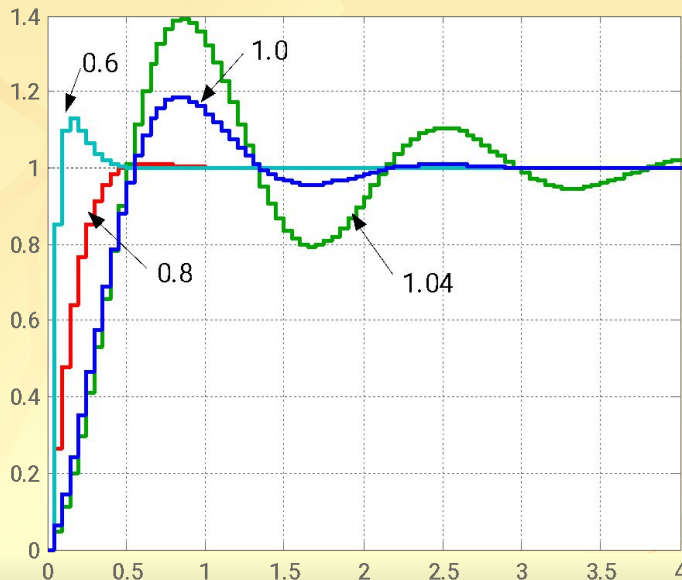
$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.3126 & 2.6903 & 0.2897 \end{pmatrix}$$

$$d = 1 / \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}$$

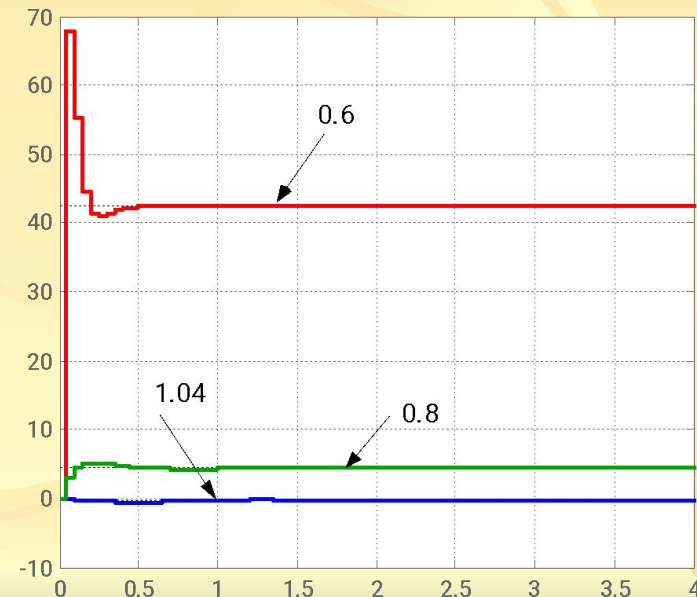
- нормирующий множитель

Переходные процессы в замкнутой системе для различных величин γ

а) по выходной переменной



б) по управлению



DLTI-объект

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \quad \mathbf{x} \in E^{n_s}, \mathbf{u} \in E^{m_s}$$

$$\mathbf{u}[n] = \mathbf{K}\mathbf{x}[n]$$

Регулятор по состоянию дискретного объекта

Квадратичный функционал, заданный на движениях замкнутой системы:

$$J = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}'[n]\mathbf{R}\mathbf{x}[n] + \gamma^2 \mathbf{u}'[n]\mathbf{Q}\mathbf{u}[n])$$

$$J = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{K}) \rightarrow \min_{\mathbf{K} \in \Omega_K}$$

Задача LQR-оптимального синтеза

Ω_K – множество матриц размера $m_s \times n_s$ с постоянными компонентами, для которых собственные числа матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ расположены в открытом единичном круге на комплексной плоскости

Ограничения:

1. Пара (A,B) стабилизируемая

2. $R \geq 0$, $Q > 0$

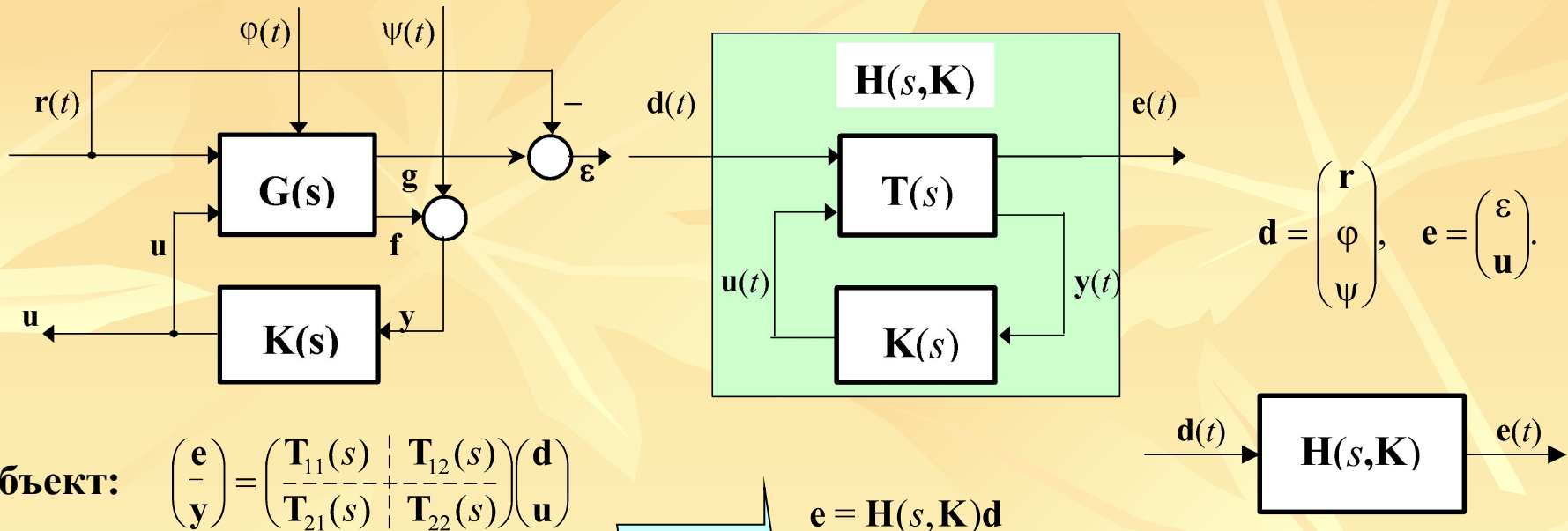
3. Пара (R, A-BQ⁻¹B^T) не должна иметь неуправляемой части с полюсами на единичной окружности

Решение задачи LQR-оптимального синтеза:

$$K_{opt} = (B^T S B + Q)^{-1} B^T S B$$

Здесь матрица S – решение матричного алгебраического уравнения Риккати:

$$A^T S A - S - A^T S B B^T S B (B^T S B + Q)^{-1} B^T S B + R = 0$$



Объект: $\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}(s) & \mathbf{T}_{12}(s) \\ \mathbf{T}_{21}(s) & \mathbf{T}_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$

Регулятор: $\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}$

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(s, \mathbf{K})\mathbf{d}$$

$$\mathbf{H}(s, \mathbf{K}) = \mathbf{T}_{11}(s) + \mathbf{T}_{12}(s)\mathbf{K}(s)[\mathbf{E} - \mathbf{T}_{22}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{T}_{21}(s)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{K}) = \|\mathbf{H}(s, \mathbf{K})\| \rightarrow \inf_{\mathbf{K} \in \Omega},$$

$$\|\mathbf{H}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{H}^T(-j\omega)\mathbf{H}(j\omega)]d\omega} \quad \Rightarrow \quad \|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} \quad \text{для SISO-систем}$$

$$\|\mathbf{H}\|_{\infty} = \sup_{\omega \in [0, \infty)} \bar{\sigma}(\omega) \quad \bar{\sigma}(\omega) - \text{макс. синг. число } \mathbf{H}(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in [0, \infty)} |H(j\omega)| \quad \text{для SISO-систем}$$

