Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления

Веремей Е.И.

Введение в задачи исследования и проектирования цифровых систем

Лекции 6 – 9

Раздел 2. Вопросы анализа дискретных процессов и систем

Вопросы анализа дискретных систем

1. Ряды и преобразование Фурье для числовых последовательностей

$$f = \{f[n]\} \qquad f[n] = f[n+mN],\ m \in N^1$$

$$f_k = \{f_k[n]\},\ \omega_k = \frac{2\pi}{N}k,$$

$$f_k[n] = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\omega_k n}$$

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Коэффициенты конечного ряда Фурье

Вопросы анализа дискретных систем

1. Ряды и преобразование Фурье для числовых последовательностей

$$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$F=\{F[k]\}, k=\overline{0,N-1}$$

Комплексный спектр периодической последовательности

$$A[k]=|F[k]|$$

$$A=\{A[k]\}, k=\overline{0,N-1}$$

Амплитудный спектр периодической последовательности

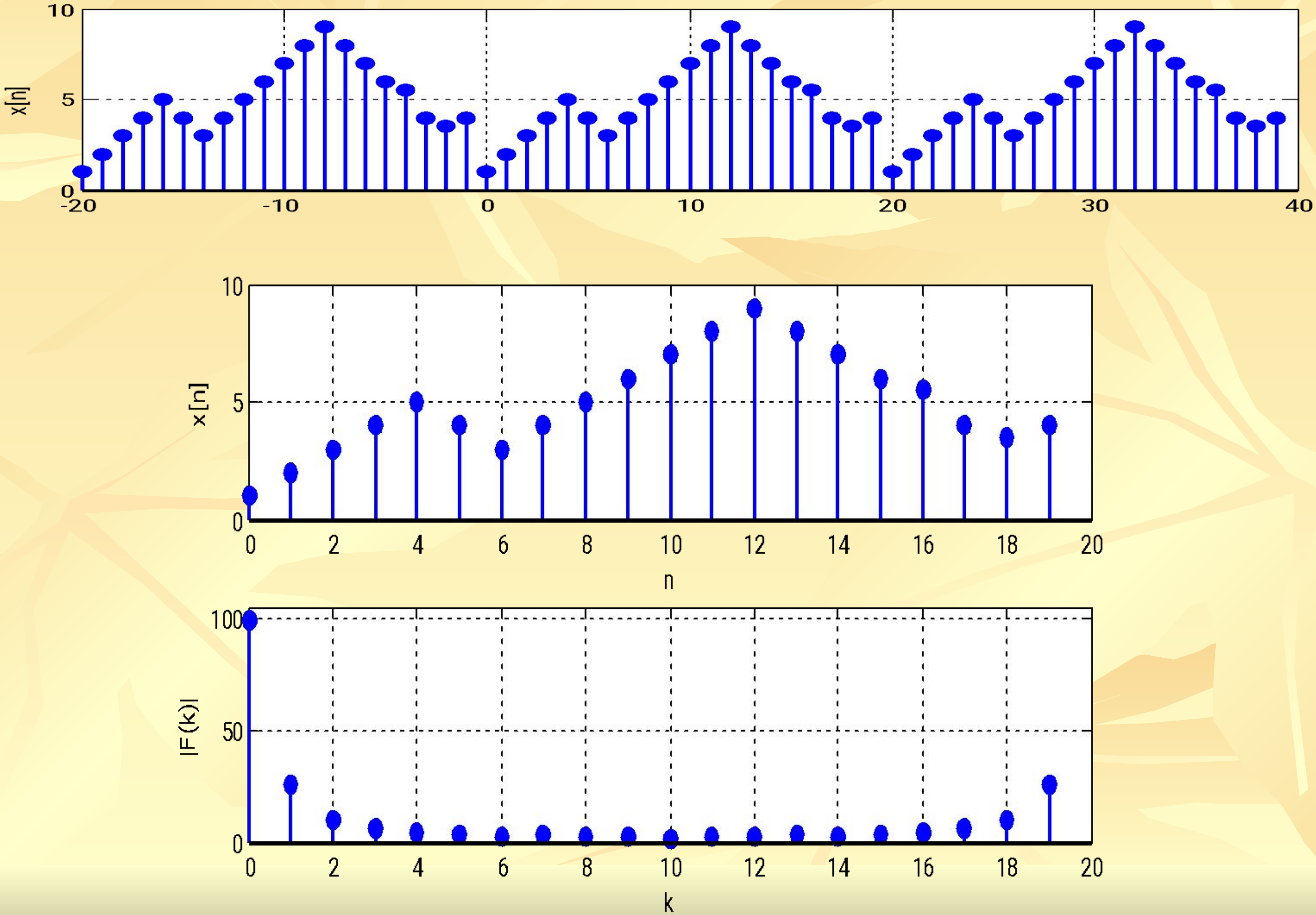
$$\varphi[k]=\arg F[k]$$

$$\varphi=\{\varphi[k]\}, k=\overline{0,N-1}$$

Фазовый спектр периодической последовательности

Вопросы анализа дискретных систем

1. Ряды и преобразование Фурье для числовых последовательностей



Вопросы анализа дискретных систем

1. Ряды и преобразование Фурье

$$f = \{f[n]\} \qquad n \in N^1$$

Произвольная последовательность

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |f[n]| = Q_x < \infty$$

Условие абсолютной суммируемости

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f[n] e^{-j\omega n}$$

Дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ) последовательности $\{f[n]\}$

$$F(j\omega) = F(e^{j\omega})$$

Комплексная частотная (спектральная) характеристика (КЧХ) последовательности f

$$A(\omega) = \left|F(e^{j\omega})\right|$$

Амплитудная частотная (спектральная) характеристика (АЧХ) последовательности f

$$\varphi(\omega) = \arg\left(F(e^{j\omega})\right)$$

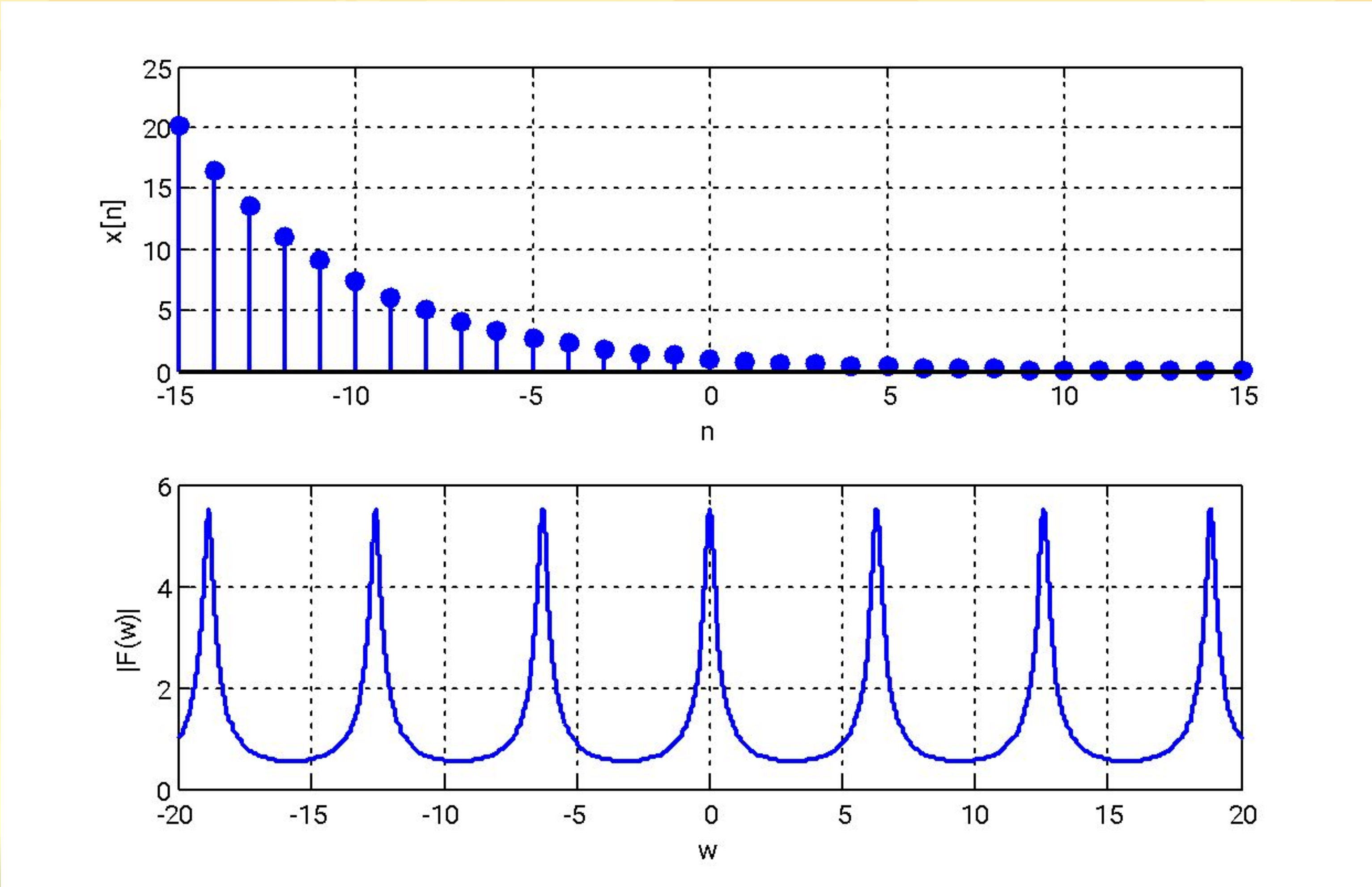
Фазовая частотная (спектральная) характеристика (АЧХ) последовательности f

Вопросы анализа дискретных систем

$$f_e[n]=\begin{cases} e^{-\alpha n}, & если \;\; n\ge 0;\\ 0, & если \;\; n<0.\end{cases}$$

$$\alpha > 0$$

1. Ряды и преобразование Фурье



Вопросы анализа дискретных систем

1. Ряды и преобразование Фурье

$$f=\{f[n]\} \qquad n\in N^1$$

Произвольная последовательность

$$F(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow A(\omega),\ \varphi(\omega)$$

Прямое ДВПФ для {*f* [*n*]}

$$1.\ F(e^{-j\omega}) \Rightarrow A(-\omega)=A(\omega) \qquad \varphi(-\omega)=-\varphi(\omega)$$

$$2.\ F(e^{j(\omega+2\pi k)})=F(e^{j\omega}) \qquad \forall k\in N^1$$

$$3.\ F(e^{j\gamma}) \Rightarrow F(e^{-j\omega}) \qquad \forall\omega\in[0,\pi],\ \gamma=2\pi-\omega$$

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(j\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

Обратное ДВПФ для {*f* [*n*]}

Вопросы анализа дискретных систем

2. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$f = \{f[n]\} = \{f_n\} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

Конечная последовательность

Два варианта превращения в бесконечную последовательность:

$n \in N^1$

а) Периодическая последовательность $f_p = \{f_p[n]\} = \{f_{pn}\}$ $\quad f_p[n] = f[n]$ $\quad f_p[n] = f_p[n+mN]$

б) последовательность, дополненная нулями $f_i = \{f_i[n]\} = \{f_{in}\}$ $\quad f_i[n] = \begin{cases} f[n], \text{ если } n = 0,1,\ldots,N-1, \\ 0, \text{ если } n < 0 \text{ или } n > N-1. \end{cases}$

Прямое ДПФ:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Обратное ДПФ:

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Вопросы анализа дискретных систем

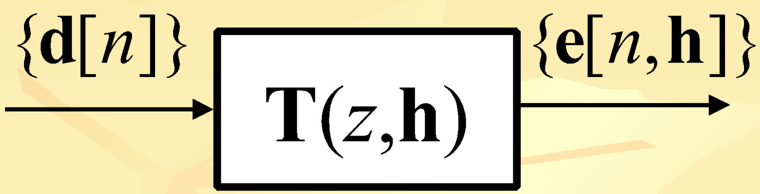
5. Понятие качества функционирования ЦС

Три варианта варьируемых элементов в DLTI системах:

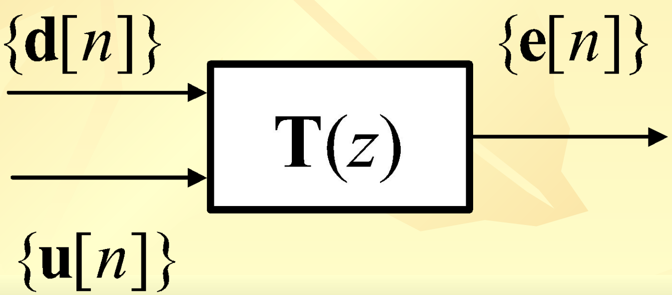
1. Конечные наборы настраиваемых параметров $\mathbf{h} \in E^p$

2. Входные дискретные сигналы $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}[n]\}$ $\quad n \in [n_1, n_2]$

3. Передаточные матрицы регуляторов $\mathbf{K}(z)$



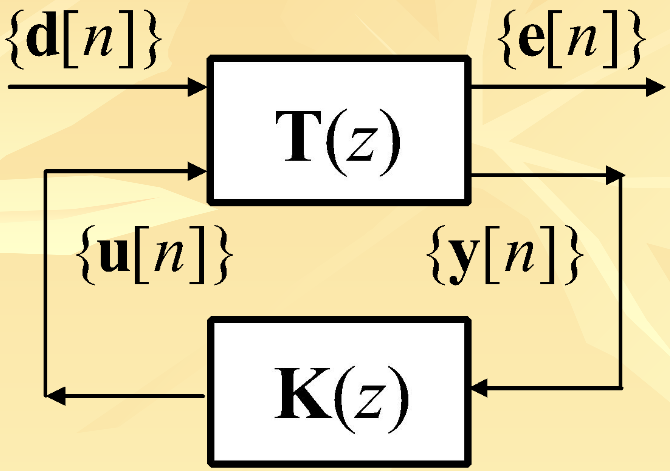
$$J = J(\mathbf{h}) = J(\{\mathbf{e}[n,\mathbf{h}]\}) = J(\mathbf{T}(z,\mathbf{h})\{\mathbf{d}[n]\})$$

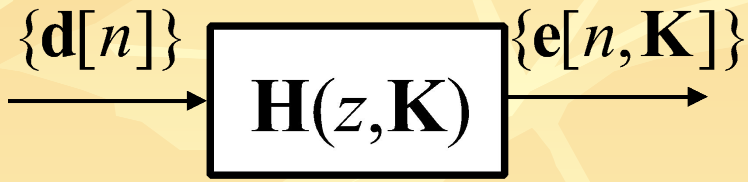


$$J = J(\mathbf{u}) = J(\{\mathbf{e}[n,\mathbf{u}]\}) = J\left(\mathbf{T}(z)\begin{pmatrix}\{\mathbf{d}[n]\}\\ \{\mathbf{u}[n]\}\end{pmatrix}\right)$$

Вопросы анализа дискретных систем

5. Понятие качества функционирования ЦС





$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \hline \mathbf{y}\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c}\mathbf{T}_{11}(z) & \mathbf{T}_{12}(z)\\ \hline \mathbf{T}_{21}(z) & \mathbf{T}_{22}(z)\end{array}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(z,\mathbf{K})\mathbf{d}, \qquad \mathbf{H}(s,\mathbf{K}) = \mathbf{T}_{11}(s) + \mathbf{T}_{12}(s)\mathbf{K}(s)[\mathbf{E} - \mathbf{T}_{22}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{T}_{21}(s)$$

$$J = J(\mathbf{u}) = J(\{\mathbf{e}[n,\mathbf{K}]\}) = J(\mathbf{H}(z,\mathbf{K})\{\mathbf{d}[n]\})$$

Вопросы анализа дискретных систем

5. Понятие качества функционирования ЦС

Классические функционалы качества

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}(n, \mathbf{x}[n]) \qquad \mathbf{x} = \{\xi[n]\} \qquad \xi[0] = \xi_0$$

$$\beta = \{\beta[n]\} \qquad \beta[n] = \eta[n] - \xi[n] \qquad \mathbf{x} = \{\eta[n]\} \qquad \eta[0] = \eta_0$$

$$T_p = \inf\{n_m : \beta[n] \in M(\mathbf{0}, \Delta), \forall n \geq n_m\}$$

$$J_m = \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0} \qquad \rho_m = \max_{n \in [0, \infty)} \|\beta[n]\| \qquad N_k \Longrightarrow \rho[n] \geq \rho_0$$

$$J_p = \sum_{n=0}^{T_p} (\eta[n] - \xi[n])' \mathbf{R} (\eta[n] - \xi[n])$$

Вопросы анализа дискретных систем

5. Понятие качества функционирования ЦС

Функционалы качества как нормы выходных сигналов

$$\{\mathbf{d}[n]\} \longrightarrow \boxed{\mathbf{T}(z,\mathbf{h})} \longrightarrow \{\mathbf{e}[n,\mathbf{h}]\}$$

Пространство l_2 :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon[n]|^2 < \infty \qquad \|\varepsilon\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon[n]|^2}$$

Пространство m :

$$|\varepsilon[n]| \le c_e \qquad \|\varepsilon\|_\infty = \sup_{n\in N^1} |\varepsilon[n]|$$

$$\widetilde{e}[n] = \sqrt{\mathbf{e}'[n]\mathbf{e}[n]} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}\|_2 = \|\widetilde{e}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widetilde{e}[n]|^2} \qquad \|\mathbf{e}\|_\infty = \|\widetilde{e}\|_\infty = \sup_{n\in N^1} |e[n]|$$

$$J_2 = J_2(\mathbf{h}) = \|\mathbf{e}\|_2 = \|\{\mathbf{e}[n,\mathbf{h}]\}\|_2 = \|\mathbf{T}(z,\mathbf{h})\{\mathbf{d}[n]\}\|_2$$

$$J_\infty = J_\infty(\mathbf{h}) = \|\mathbf{e}\|_\infty = \|\{\mathbf{e}[n,\mathbf{h}]\}\|_\infty = \|\mathbf{T}(z,\mathbf{h})\{\mathbf{d}[n]\}\|_\infty$$

5. Понятие качества функционирования ЦС

Функционалы качества как нормы передаточных матриц

$$\{\mathbf{d}[n]\} \longrightarrow \boxed{\mathbf{H}(z)} \longrightarrow \{\mathbf{e}[n]\}$$

$$\|\varepsilon\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]} \qquad S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]$$

$$E(z) = Z\{\varepsilon[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon[n] z^{-n} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} E(z) \frac{z^n}{z} dz$$

Дискретный аналог теоремы Парсеваля:

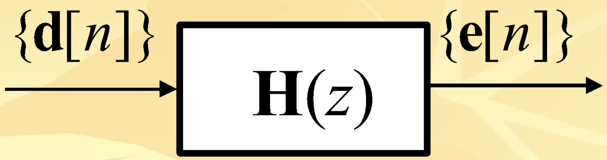
$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} E(z) E(z^{-1}) \frac{1}{z} dz \qquad S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| E(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(z)\mathbf{d}, \qquad \|\mathbf{e}\|_2^2 = \|\tilde{e}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{e}^2[n] \qquad \mathbf{e}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \mathbf{E}(z) z^n \frac{1}{z} dz$$

Вопросы анализа дискретных систем

5. Понятие качества функционирования ЦС

Функционалы качества как нормы передаточных матриц



Теорема Парсеваля для векторных сигналов:

$$\|\mathbf{e}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}'[n]\mathbf{e}[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} \mathbf{E}'(z^{-1})\cdot\mathbf{E}(z)\frac{1}{z}\,dz.$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{z}) = \mathbf{H}(z)\mathbf{D}(z) \qquad \mathbf{D}(z)\cdot\mathbf{D}'(z^{-1}) \equiv \mathbf{I}_{m_s\times m_s}$$

$$\|\mathbf{e}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}'[n]\mathbf{e}[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} \mathrm{tr}\left[\mathbf{H}(z)\mathbf{H}'(z^{-1})\right]\frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} \mathrm{tr}\left[\mathbf{H}'(z^{-1})\mathbf{H}(z)\right]\frac{1}{z}\,dz$$

Нормы передаточных матриц по пространствам H_2 и H_∞

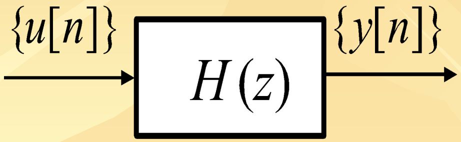
$$\|\mathbf{H}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} \mathrm{tr}\left[\mathbf{H}'(z^{-1})\mathbf{H}(z)\right]\frac{1}{z}\,dz \qquad \|\mathbf{H}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}\left[\mathbf{H}'(e^{-j\omega})\mathbf{H}(e^{j\omega})\right]d\omega$$

$$\|\mathbf{H}\|_\infty = \max_{-\pi\le\omega\le\pi} \bar{\sigma}[\mathbf{H}(e^{j\omega})]$$

Вопросы анализа дискретных систем

5. Понятие качества функционирования ЦС

Функционалы качества как нормы передаточных матриц



$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|H(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \qquad \|H\|_\infty^2 = \max_{-\pi\le\omega\le\pi}\left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

$$\|H\|_2 = 0.3569$$

$$\|H\|_\infty = 0.5738$$

$$\begin{aligned}
x_1[n+1] &= -0.04886x_1[n] + 0.4040x_2[n] + 0.2306x_3[n] - 0.4326u[n],\\
x_2[n+1] &= \;\;0.06819x_1[n] + 0.3540x_2[n] - 0.4081x_3[n],\\
x_3[n+1] &= -0.4602x_1[n] - 0.08946x_2[n] - 0.03682x_3[n] + 0.1253u[n],\\
y[n] &= 0.2877x_1[n] - 1.146x_2[n] + 1.191x_3[n].
\end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{0.02482\,z^2 + 0.3317\,z + 0.004783}{z^3 - 0.2684\,z^2 + 0.01354\,z - 0.1155}$$

$$z_{1,2} = -0.158 \pm 0.416\,j$$

$$z_3 = 0.584$$