

Решение тригонометрических уравнений

Содержание

⊕ Простейшие
тригонометрические
уравнения

⊕ Простейшие
тригонометрические
неравенства

Простейшие тригонометрические уравнения

- ❖ Определение арксинуса
- ❖ Уравнение $\sin t = a$
- ❖ Определение арккосинуса
- ❖ Уравнение $\cos t = a$
- ❖ Определение арктангенса
- ❖ Уравнение $\operatorname{tg} t = a$
- ❖ Определение арккотангенса
- ❖ Уравнение $\operatorname{ctg} t = a$
- ❖ Примеры



Определение арксинуса

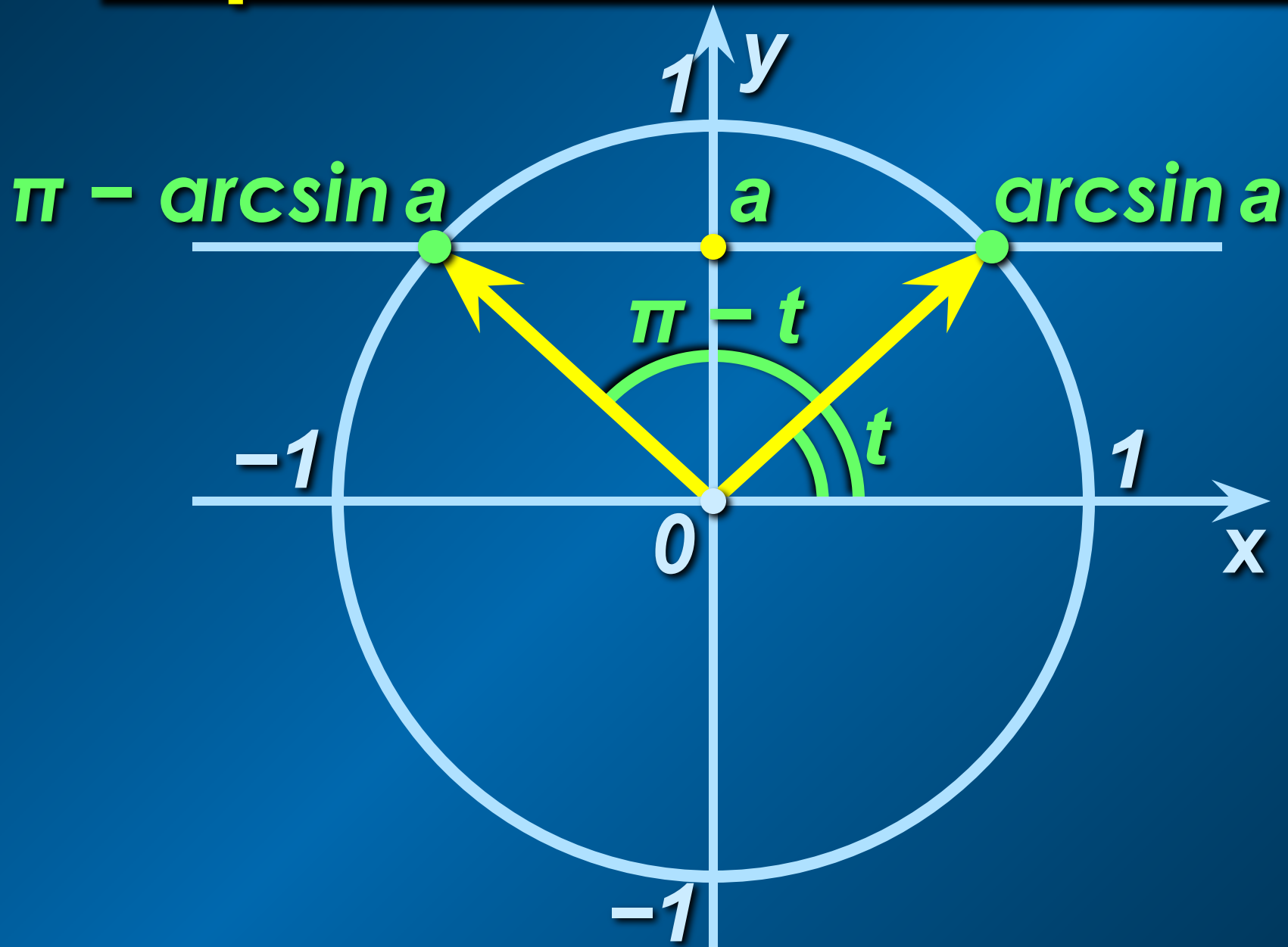
Арксинусом числа a называется такой угол из промежутка $[-0,5\pi; 0,5\pi]$, синус которого равен a , где $|a| \leq 1$.

$$\begin{aligned} \arcsin a = t, \sin t = a \\ \text{где } t \in [-0,5\pi; 0,5\pi] \\ a \in [-1; 1] \end{aligned}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad a \in [-1; 1]$$



Уравнение $\sin t = a$



Уравнение $\sin t = a$

С учетом периодичности:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

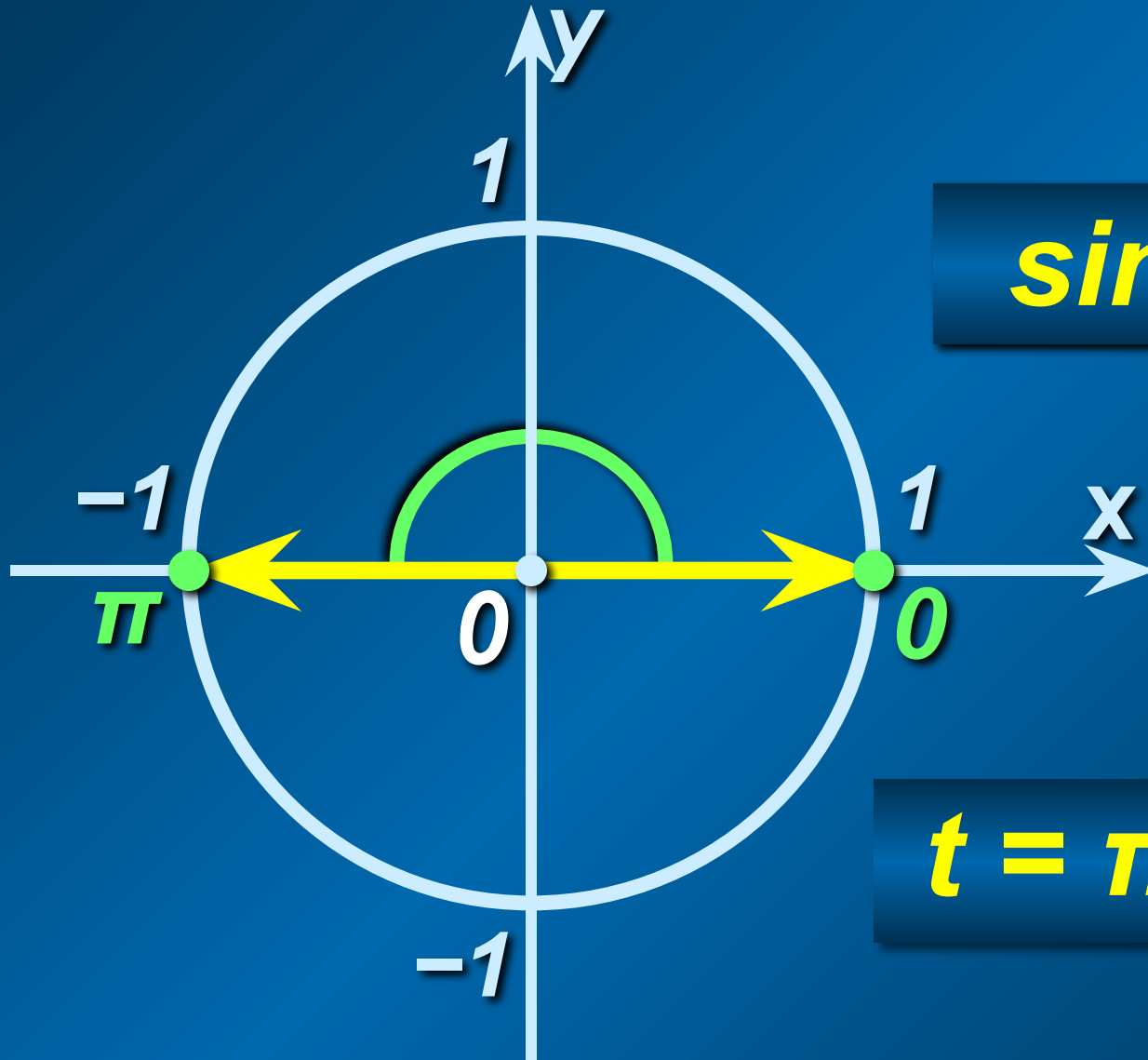
Объединив в одну формулу:

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример



1 частный случай

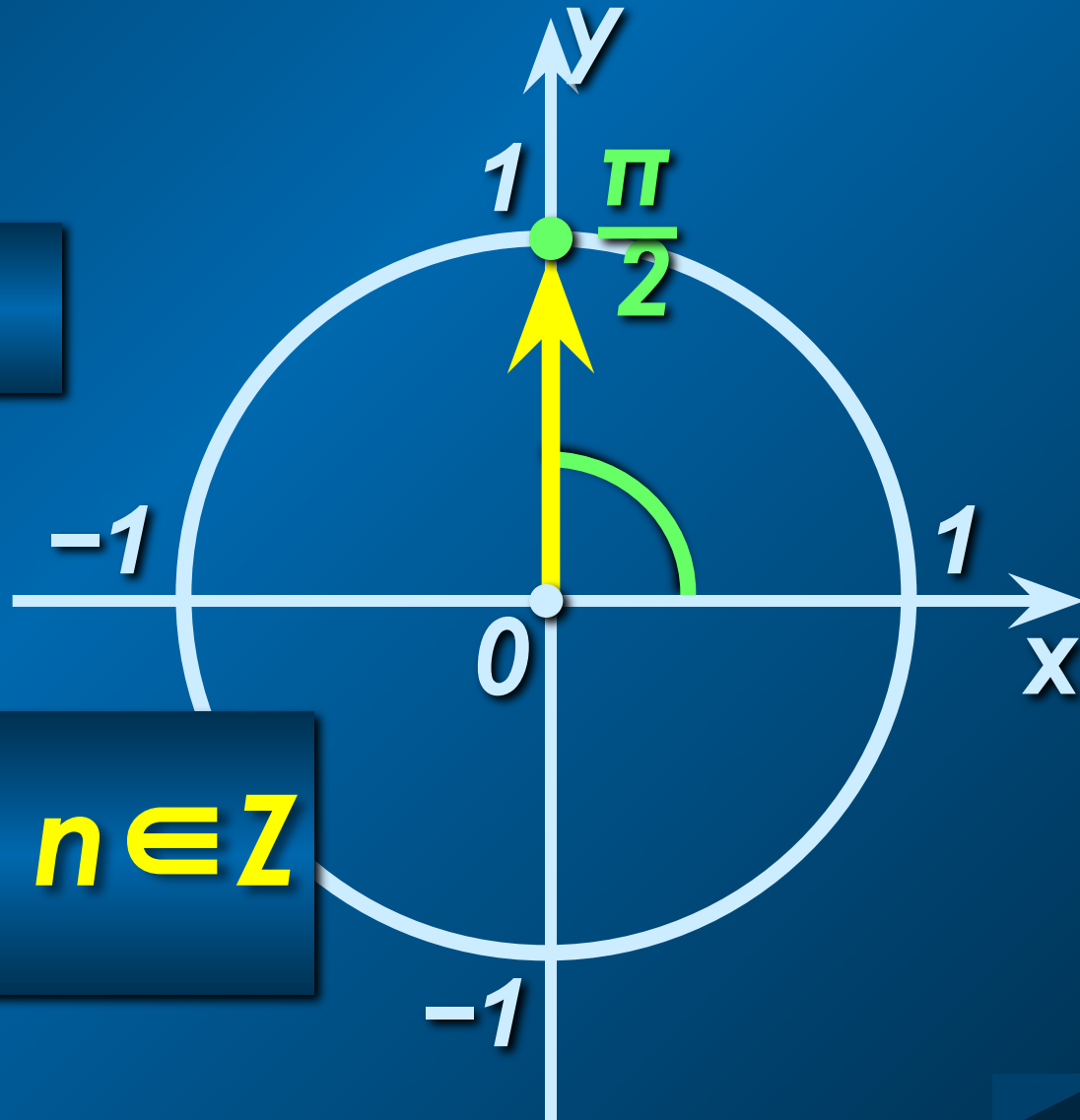


$$\sin t = 0$$

$$t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2 частный случай

$$\sin t = 1$$

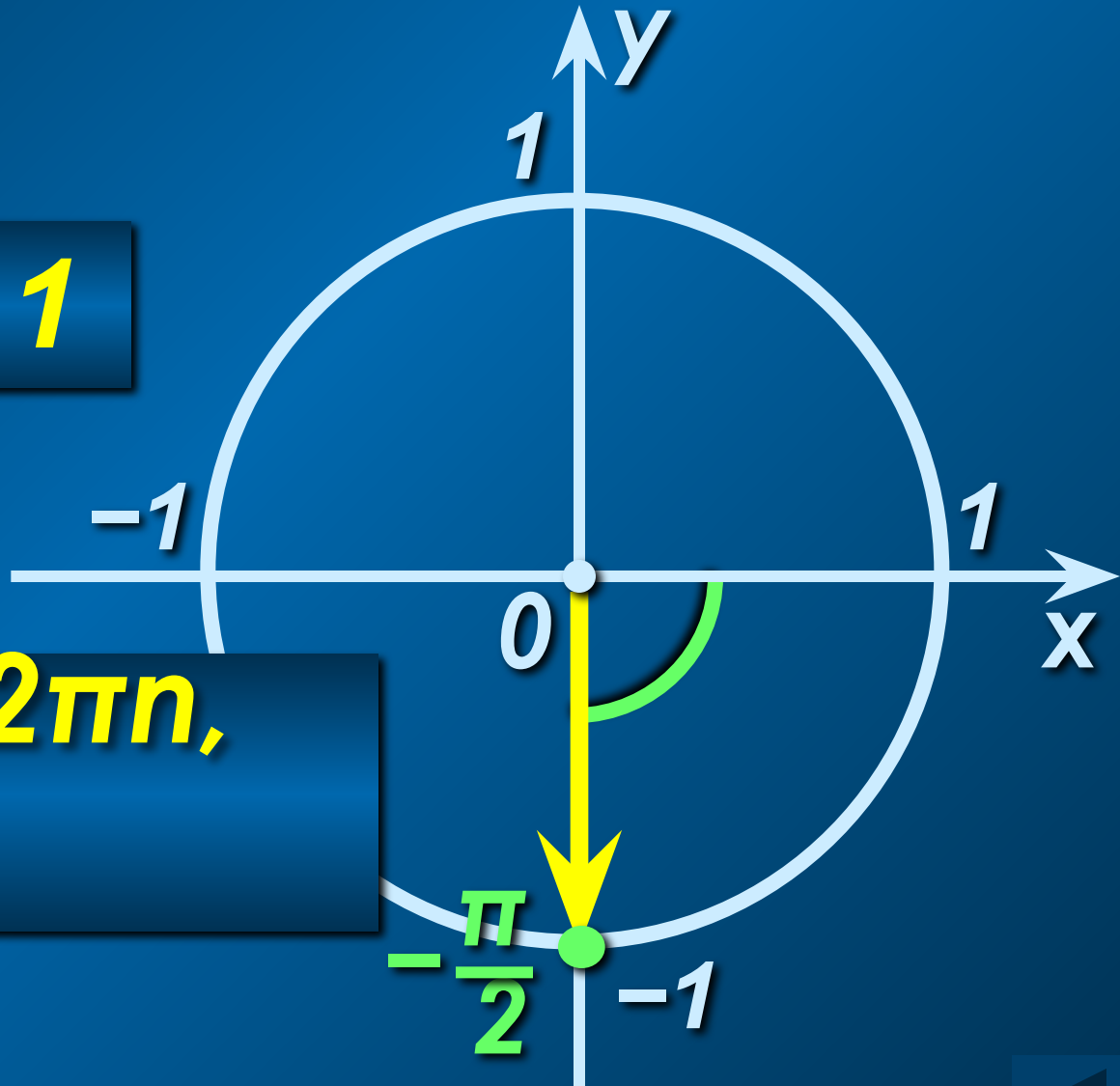


$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

3 частный случай

$$\sin t = -1$$

$$t = \pi + 2\pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$



Определение арккосинуса

Арккосинусом числа a называется такой угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a , где $|a| \leq 1$.

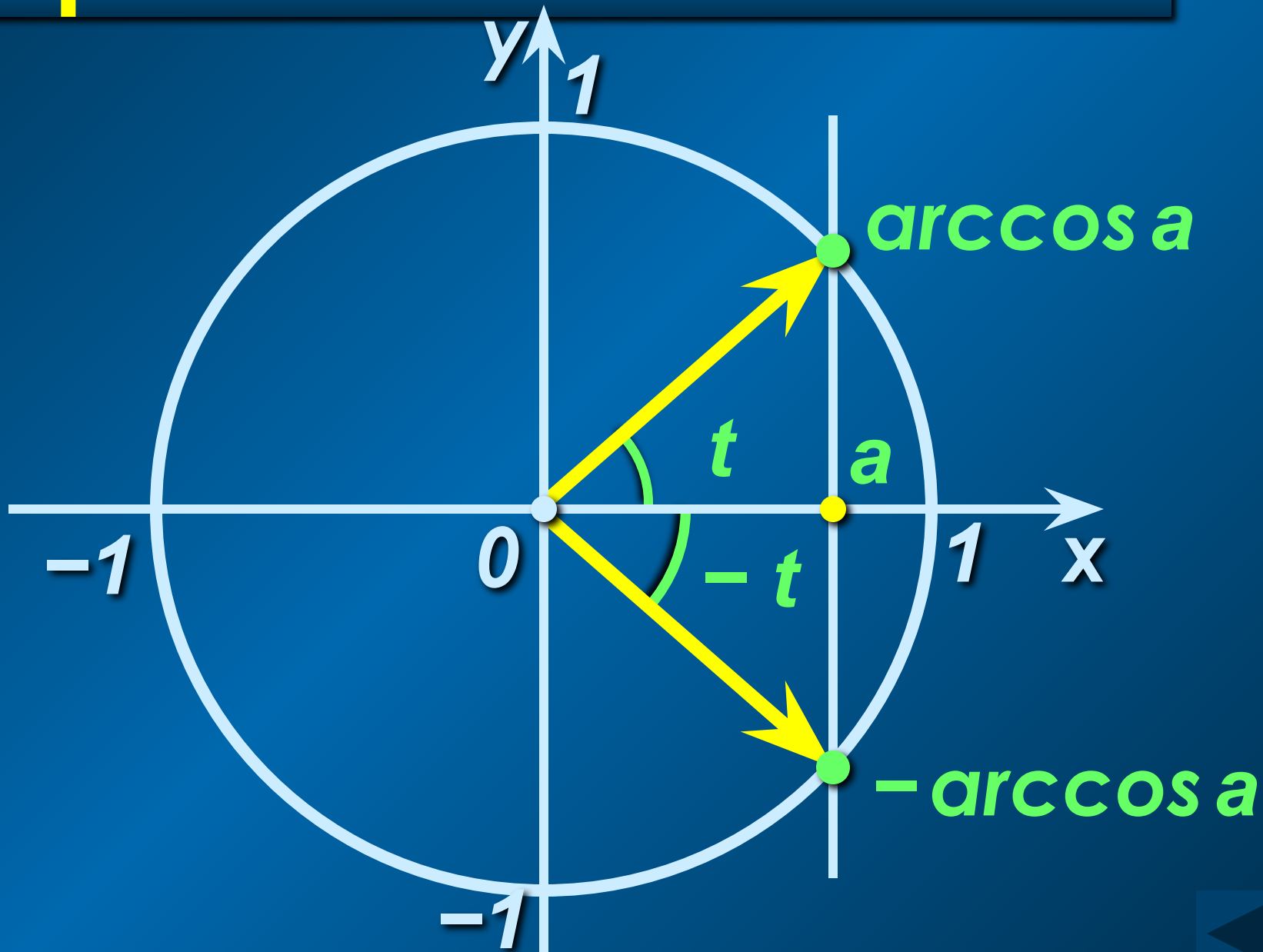
$$\arccos a = t, \quad \cos t = a$$

$$\text{где } t \in [0; \pi]$$

$$a \in [-1; 1]$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad a \in [-1; 1]$$

Уравнение $\cos t = a$



Уравнение $\cos t = a$

С учетом периодичности:

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

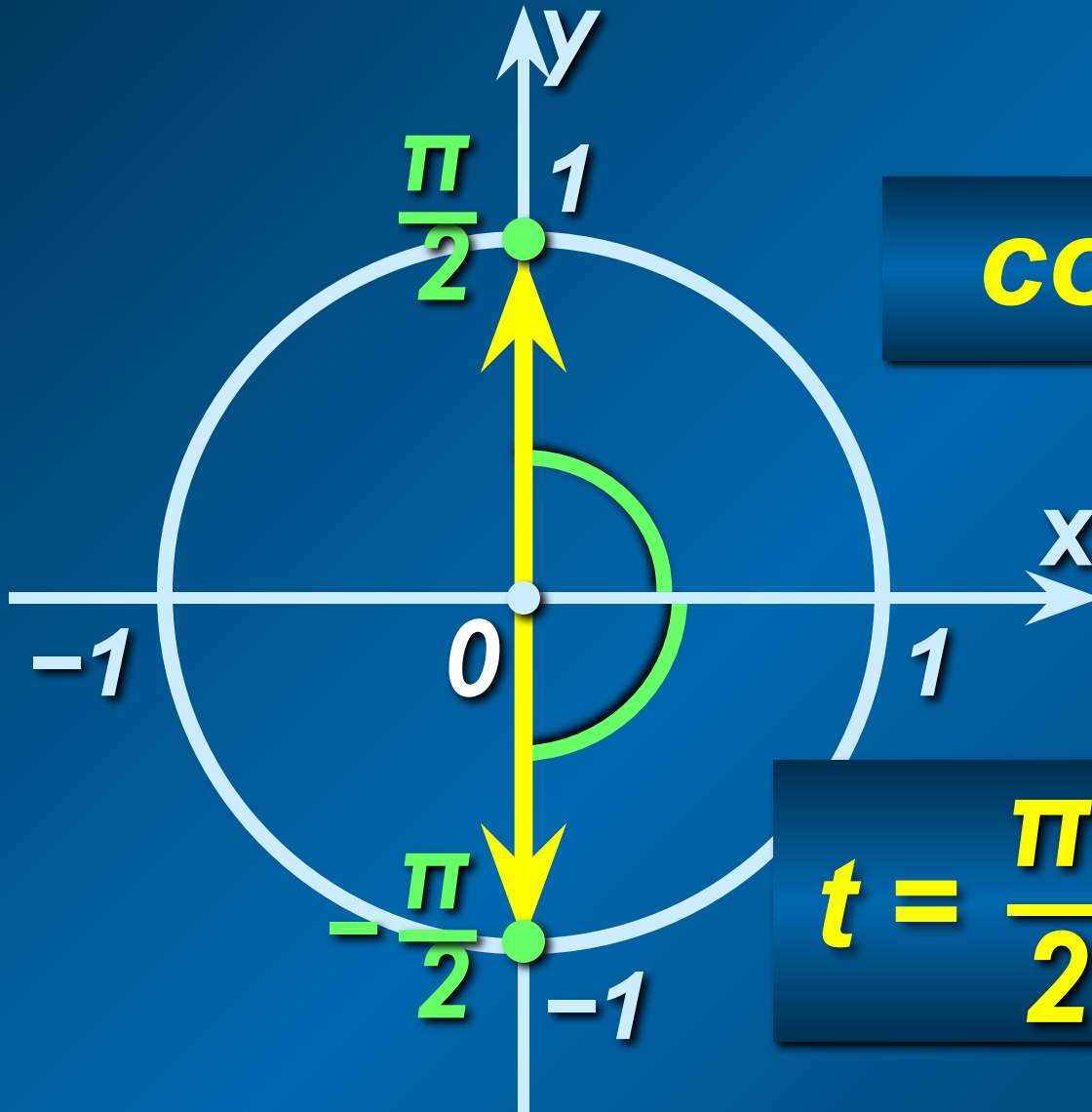
Объединив в одну формулу:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример



1 частный случай

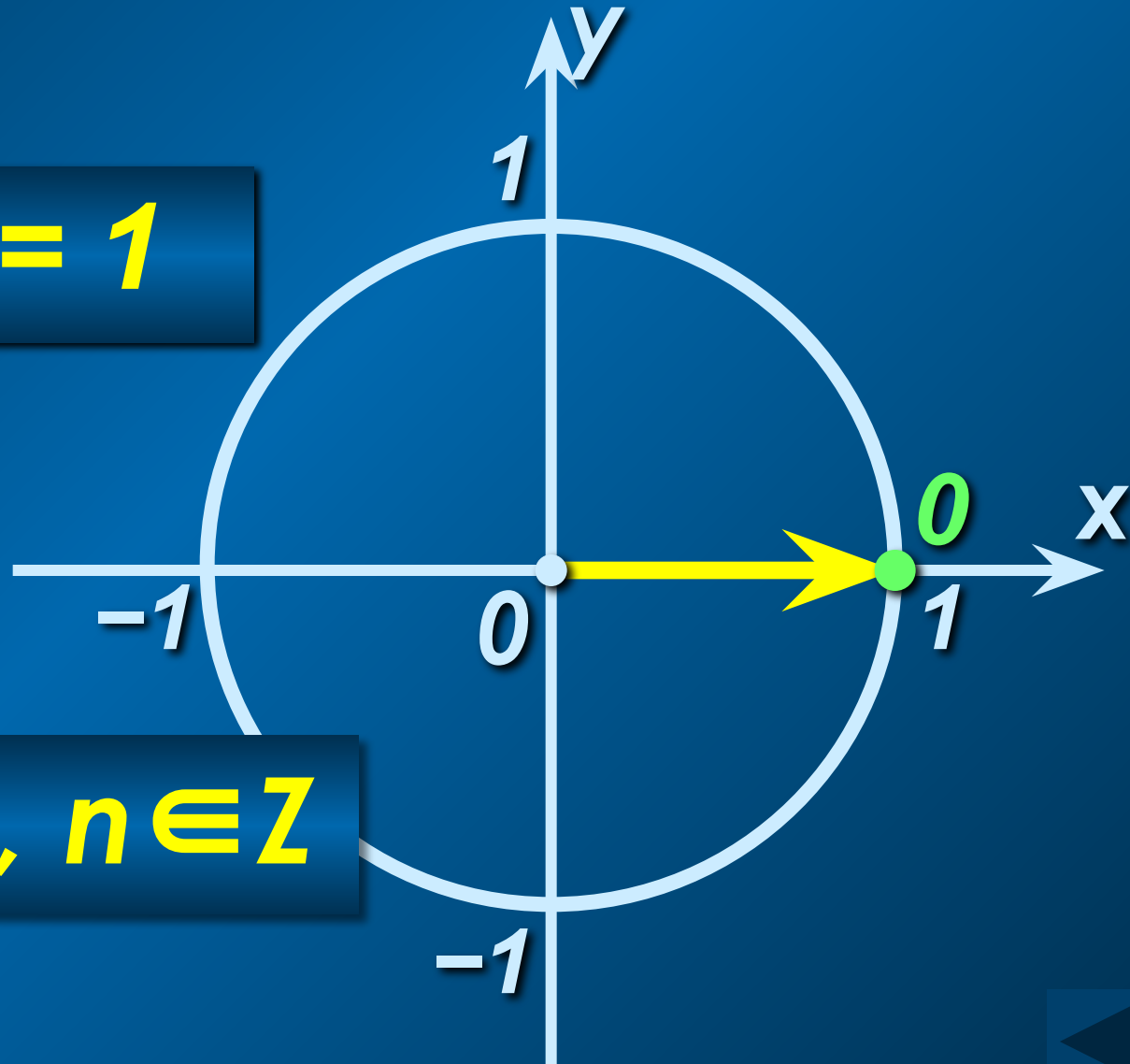


$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

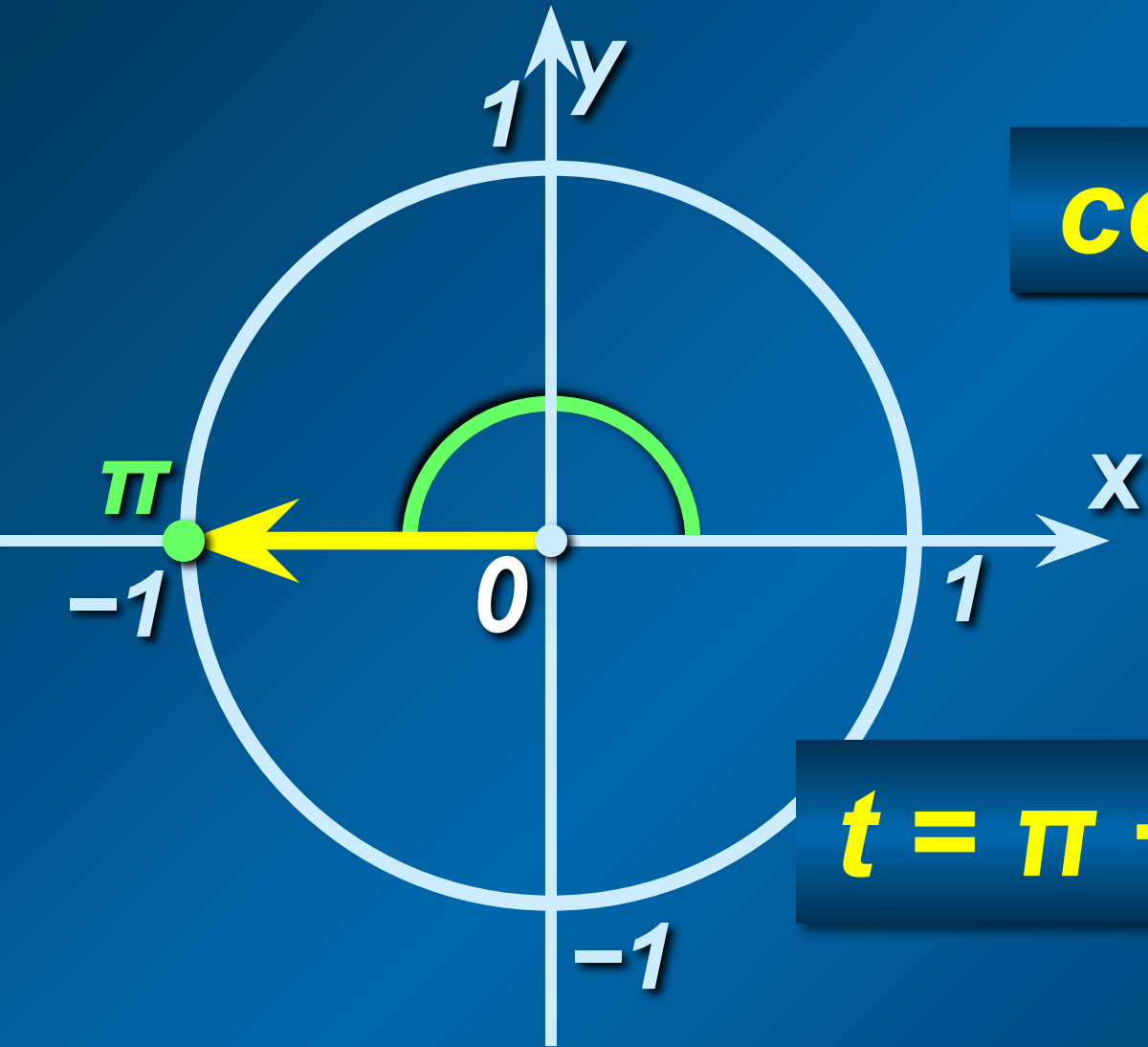
2 частный случай

$$\cos t = 1$$



$$t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

3 частный случай



$$\cos t = -1$$

$$t = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Определение арктангенса

Арктангенсом числа a называется такой угол из промежутка $(-0,5\pi; 0,5\pi)$, тангенс которого равен a .

$$\operatorname{arctg} a = t, \operatorname{tg} t = a$$

где $t \in (-0,5\pi; 0,5\pi)$

$$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a$$



Уравнение $\operatorname{tg} t = a$



$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

Пример

Определение арккотангенса

Арккотангенсом числа a называется такой угол из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

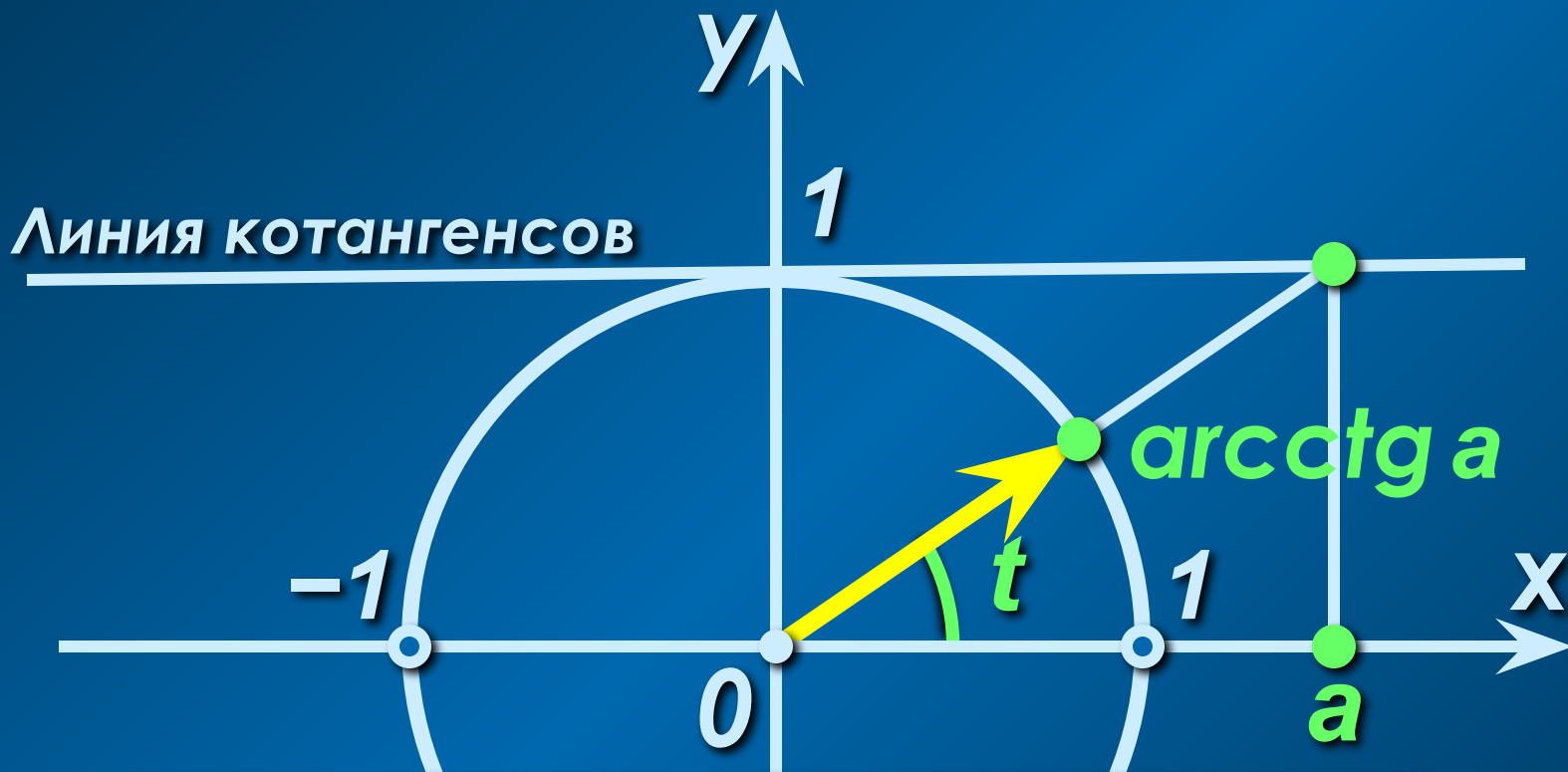
$$\operatorname{arccotg} a = t, \operatorname{ctg} t = a$$

где $t \in (0; \pi)$

$$\operatorname{arccotg} (-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$$



Уравнение $\operatorname{ctg} t = a$



$$t = \operatorname{arccotg} a + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Пример

Примеры

Пример 1 Пример 1.

$$\sin x = -$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{1}{2}$$

Пример 2 Пример 2.

$$\cos x =$$

Пример 3 Пример 3.

$$\sqrt{3}$$
$$\operatorname{tg}$$

Пример 1 $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Пример 2 $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$

Пример $\operatorname{tg} x = -1$

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Пример $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

$$x = \operatorname{arccctg} \sqrt{3} + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

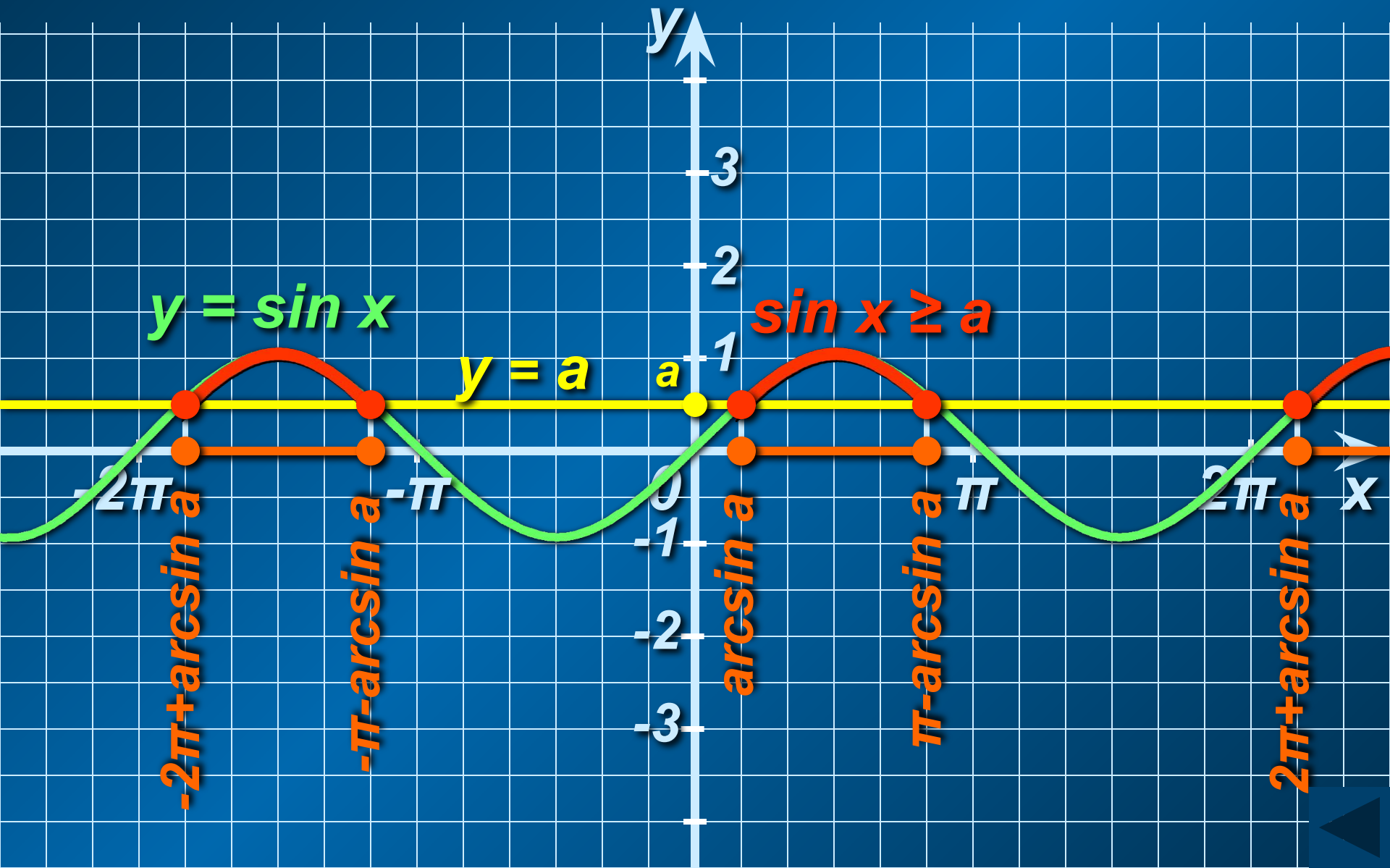
Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Простейшие тригонометрические неравенства

- ◆ Неравенство $\sin x \geq a$
- ◆ Неравенство $\cos x < a$
- ◆ Неравенство $\operatorname{tg} x > a$
- ◆ Неравенство $\operatorname{ctg} x \leq a$
- ◆ Примеры



Неравенство $\sin x \geq a$



Неравенство $\sin x \geq a$

$$\arcsin a \leq x \leq \pi - \arcsin a$$

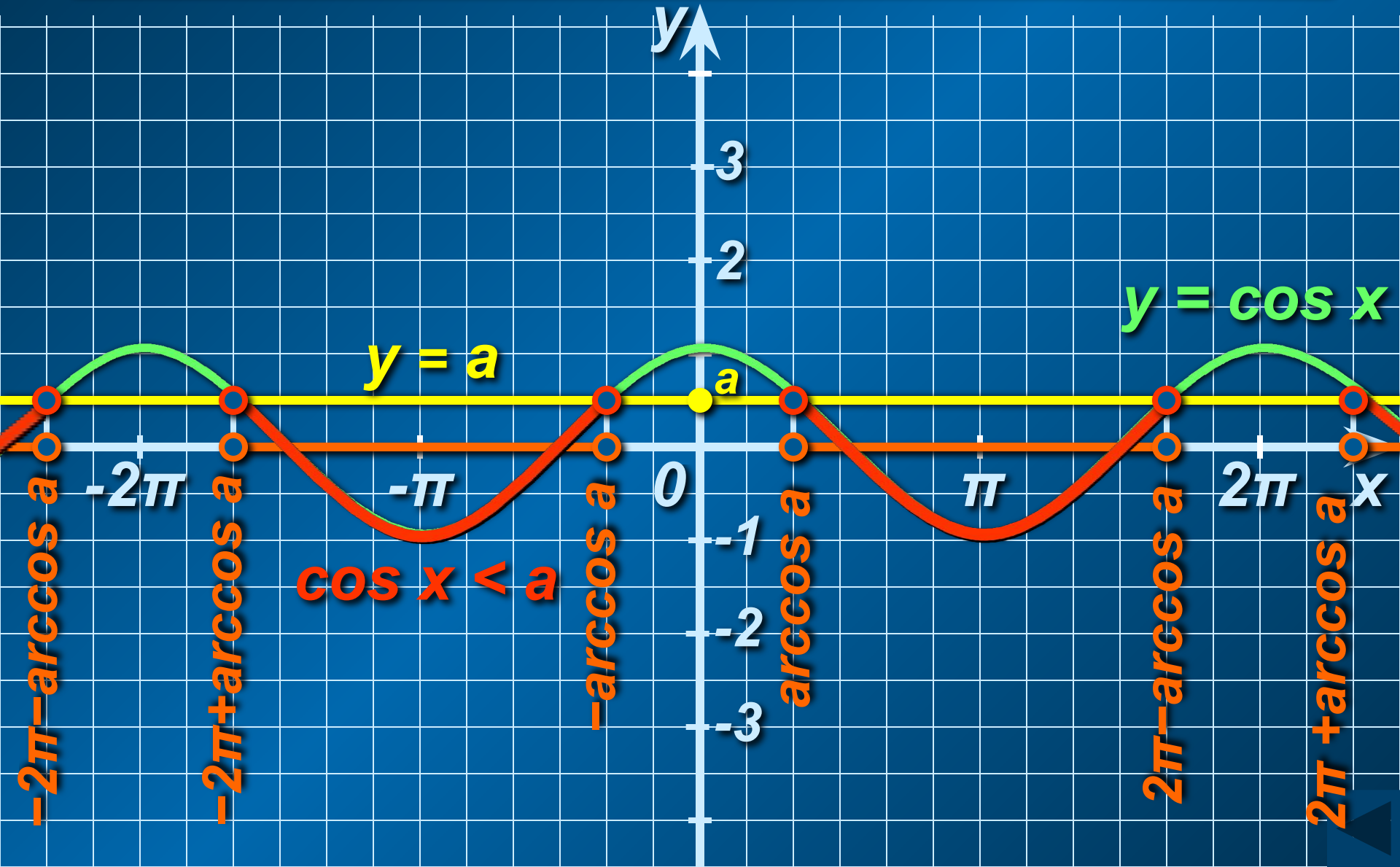
С учетом периодичности:

$$\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$[\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

Неравенство $\cos x < a$



Неравенство $\cos x < a$

$$\arccos a < x < 2\pi - \arccos a$$

С учетом периодичности:

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$(\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$$

Неравенство $\operatorname{tg} x > a$

$$\operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2}$$

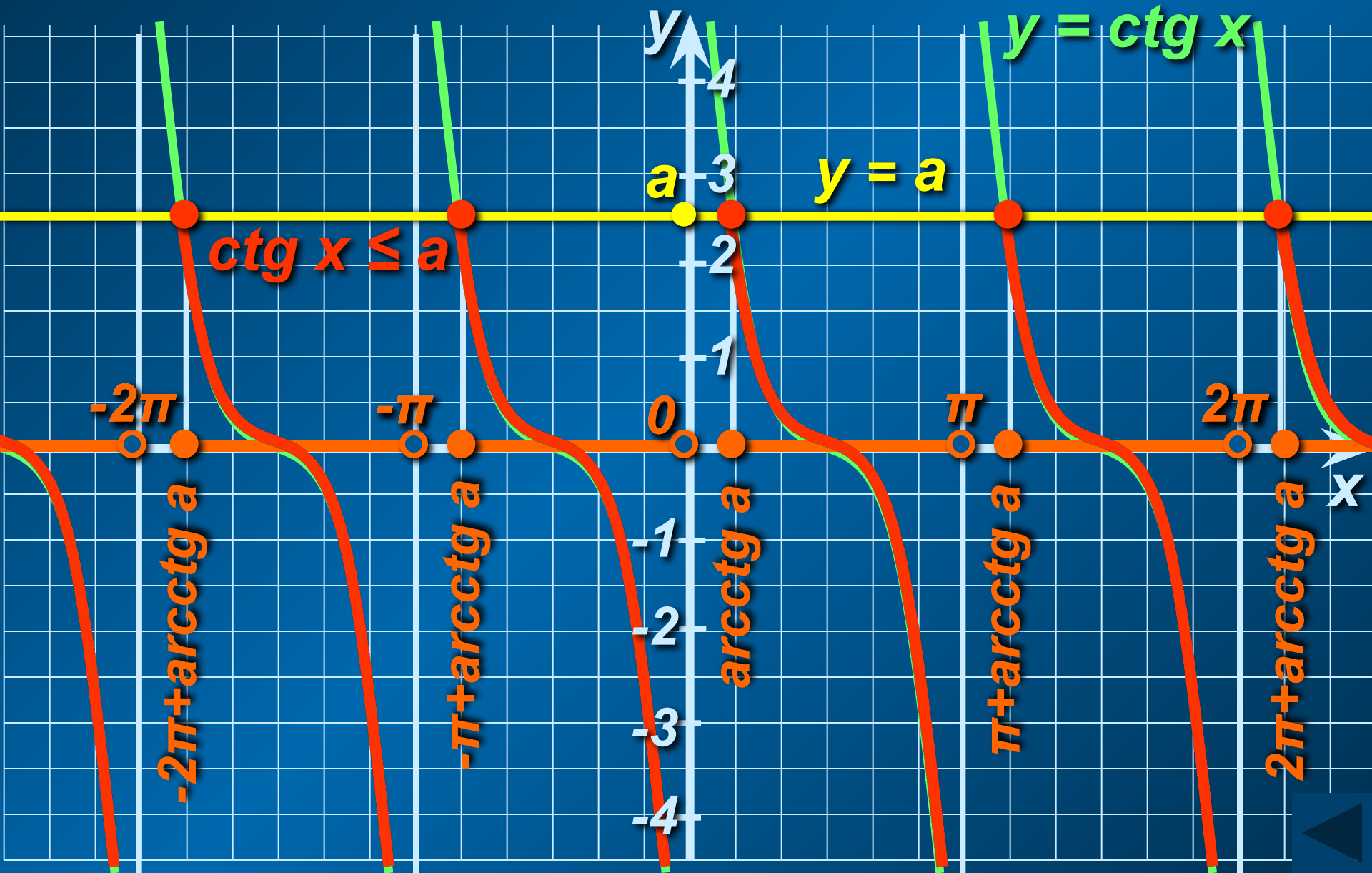
С учетом периодичности:

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$(\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

Неравенство $\operatorname{ctg} x \leq a$



Неравенство $\operatorname{ctg} x \leq a$

$$\operatorname{arcsctg} a \leq x < \pi$$

С учетом периодичности:

$$\operatorname{arcsctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$[\operatorname{arctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

Примеры

Пример 1 Пример 1.

$$\sin x \geq$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 2 Пример 2.

$$\sin x < -$$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{2}{2}$$

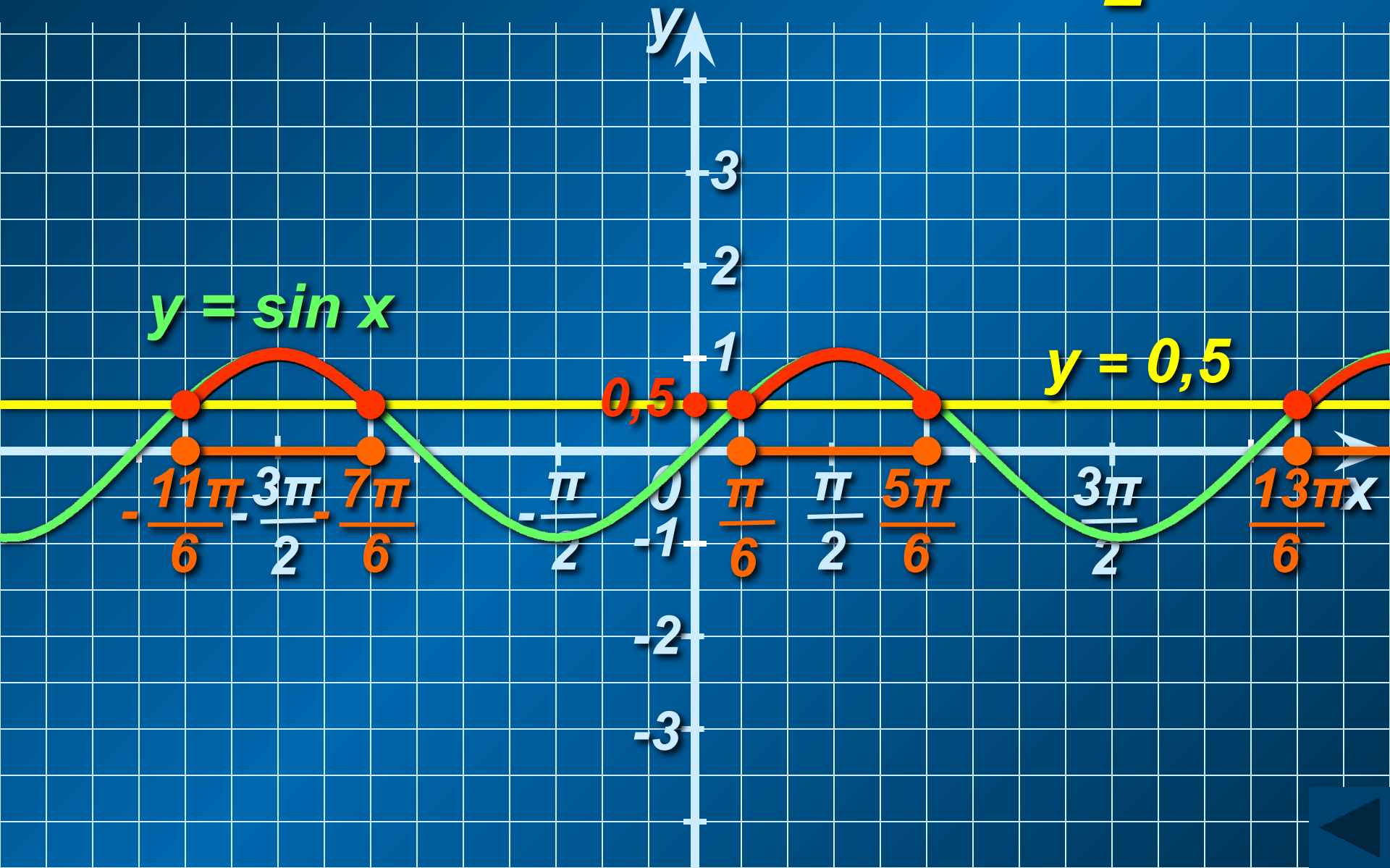
Пример 3 Пример 3.

$$\cos x \leq$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{2}{2}$$



Пример 1: $\sin x \geq \frac{1}{2}$



Пример 1: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

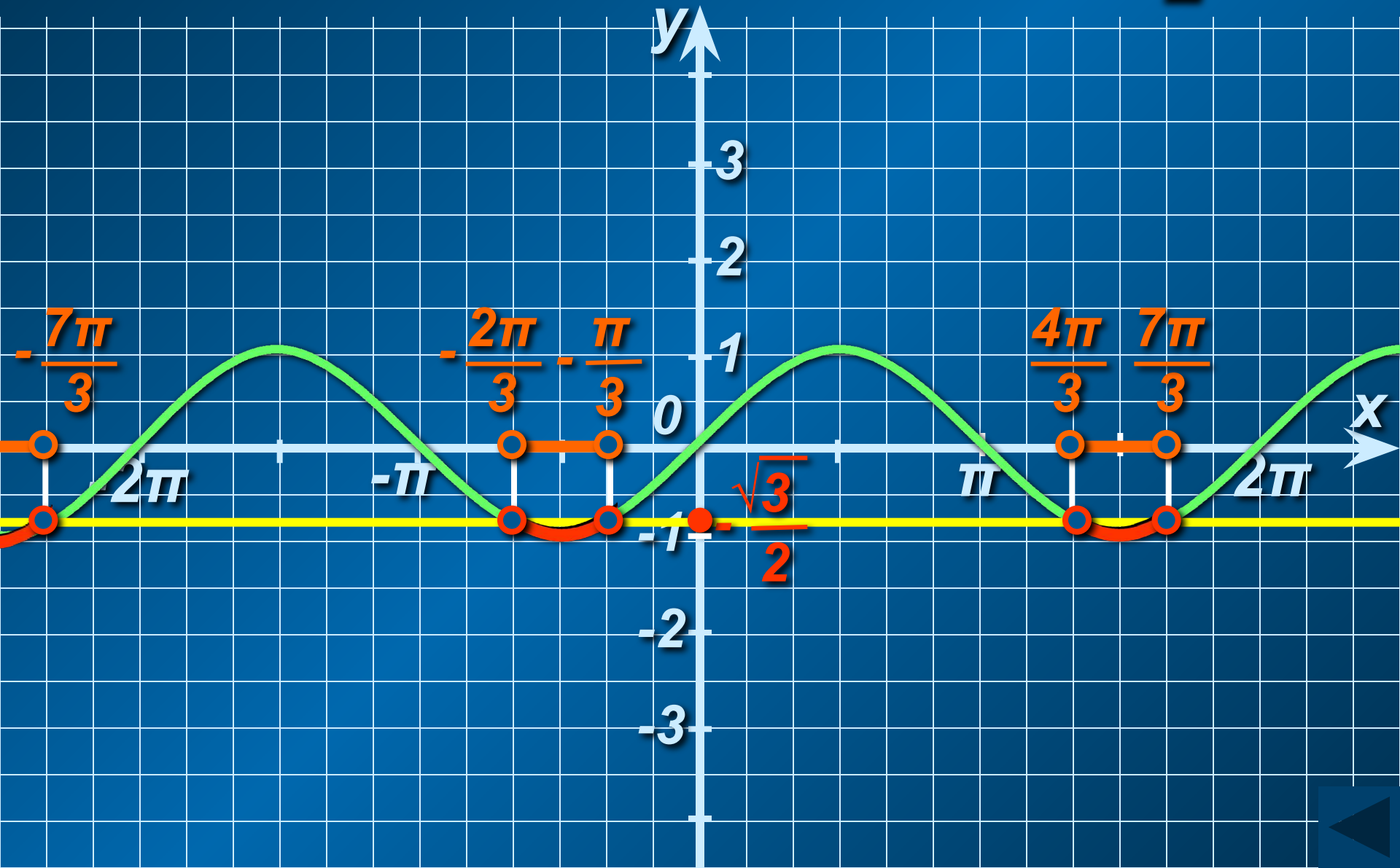
С учетом периодичности:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$$

Пример 2: $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Пример 2: $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$-\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}$$

С учетом периодичности:

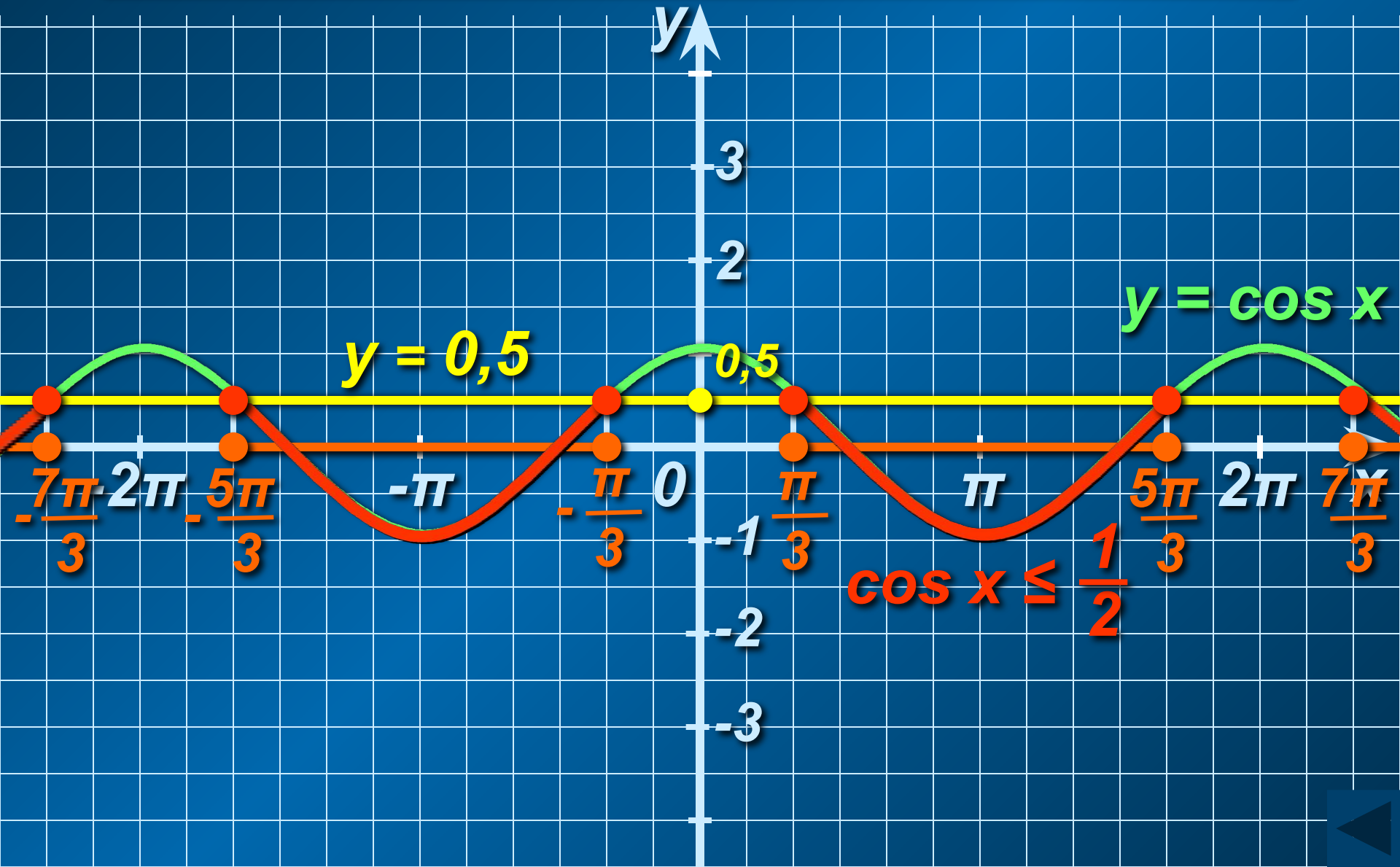
$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$$

Пример 3:

$$\cos x \leq \frac{1}{2}$$



Пример 3: $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

С учетом периодичности:

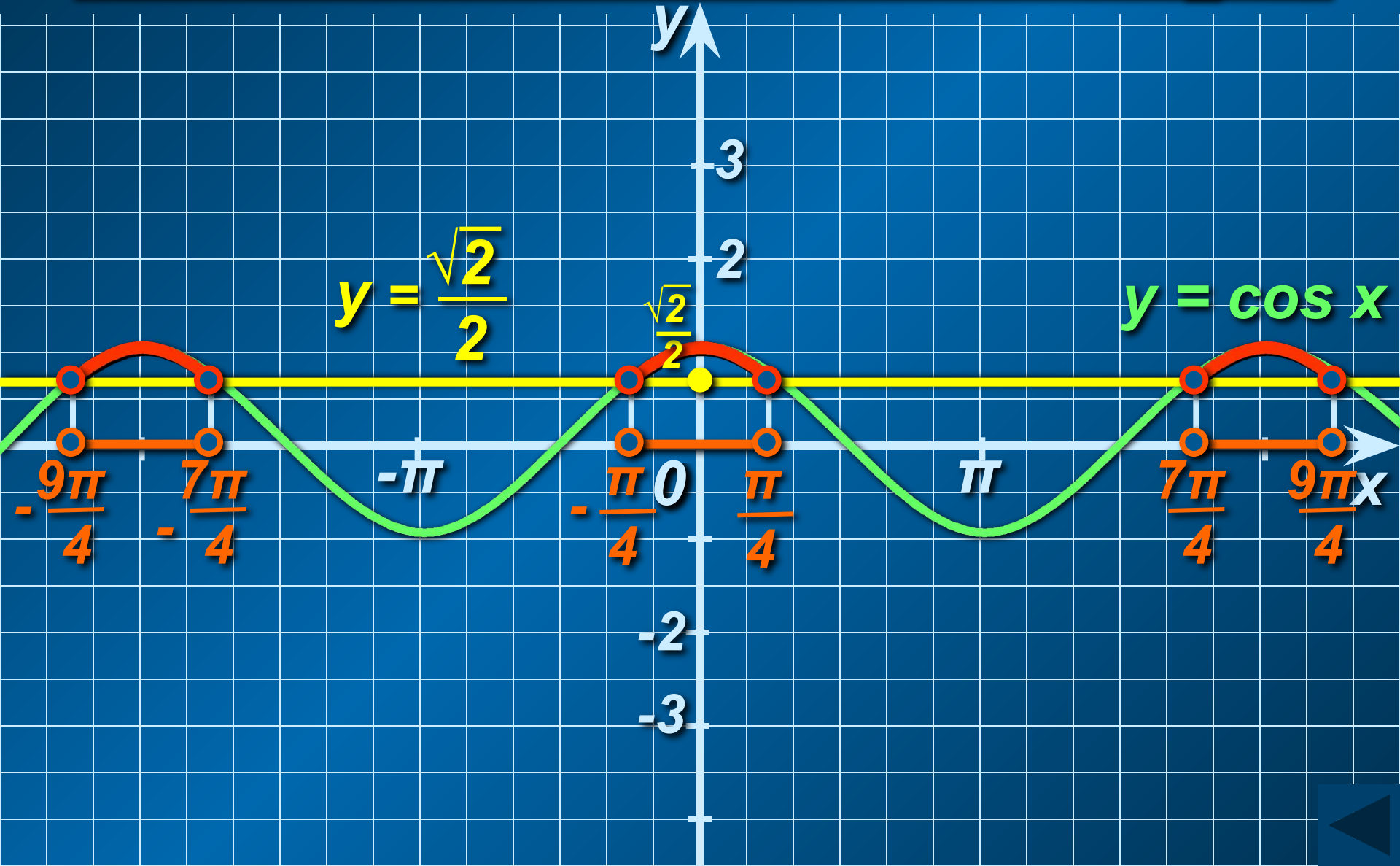
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$$

Пример 4:

$$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Пример 4: $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

С учетом периодичности:

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$$