ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА

Определение логарифма

Логарифмом числа ***b*** по основанию ***a*** называется показатель степени, в которую нужно возвести ***a*,** чтобы получить ***b***.

$$\log_a b = c, \quad a^c = b,$$

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Определение логарифма

$b > 0$

$a > 0,\ a \neq 1$

$b = a^c$

$c = \log_a b$

Примеры:

$\log_2 16 = 4,$

$\log_4 2 = 1/2,$

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$

$\log_{0,25} 4 =$.

Примеры

$$\log_2 8 = 3,\ т.к.\quad 2^3 = 8$$

$$\log_5 25 = 2,\ т.к.\quad 5^2 = 25$$

$$\log_2 2 = 1,\ т.к.\quad 2^1 = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1,\ т.к.\quad 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2,\ т.к.\quad 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Запишите в виде логарифмического равенства:

$3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$ **(по определению);**

$2^{-5} = \frac{1}{32} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$ **(по определению);**

$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$

$\sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

$\sqrt[4]{16^3} = 8 \Rightarrow \log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

Особые логарифмы

Десятичные логарифмы
(по основанию 10)

$$\log_{10} a = \lg a$$

Натуральные логарифмы
(по основанию e)

$$\log_{e} a = \ln a$$

Пример

$$\lg 100 = 2, \quad 10^2 = 100$$

$$\lg 10 = 1, \quad 10^1 = 10$$

$$\lg 1 = 0, \quad 10^0 = 1$$

$$\lg 0{,}1 = -1, \quad 10^{-1} = 0{,}1$$

$$\lg 0{,}00001 = -5, \quad 10^{-5} = 0{,}00001$$

Пример

$$\ln e = 1, \quad e^1 = e$$

$$\ln e^2 = 2, \quad e^2 = e^2$$

$$\ln \frac{1}{e} = -1, \quad e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\log_e e = 1$$

$$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \qquad \ln \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3}$$

Найдите число x

$$\log_5 x = 2$$

$$x = 25$$

$$\log_3 x = -1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x = -2$$

$$x = 36$$

$$\log_{\sqrt{5}} x = 0$$

$$x = 1$$

Найдите число x

$$\log_x 81 = 4$$

$$x = 3$$

$$т.к.\, 3^4 = 81$$

$$\log_x \frac{1}{16} = 2$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$т.к.\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\log_x \frac{1}{4} = -2$$

$$x = 2 \qquad т.к.\, 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Вычислите

$$\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}}\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 3^{1+\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

Вычислите

$$3+\log_7 \frac{1}{7} = 3+(-1) = 2$$

$$2\log_5 0{,}04 = 2\log_5 \frac{4}{100} =$$

$$= 2\log_5 \frac{1}{25} = 2\cdot(-2) = -4$$

Основные свойства логарифмов

Основное логарифмическое тождество

1) $\boxed{a^{\log_a b} = b}$, $a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a a = 1$

Основные свойства логарифмов

4) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

5) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

6) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

6′) $\log_a a^m = m$

7) $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

7′) $\log_{a^k} a = \frac{1}{k}$

8) $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \cdot \log_a b$

8′) $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k}$

9) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

9′) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Понятие логарифмической функции

Функцию вида

$y = log_a x$, **где** $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$

называют

логарифмической функцией

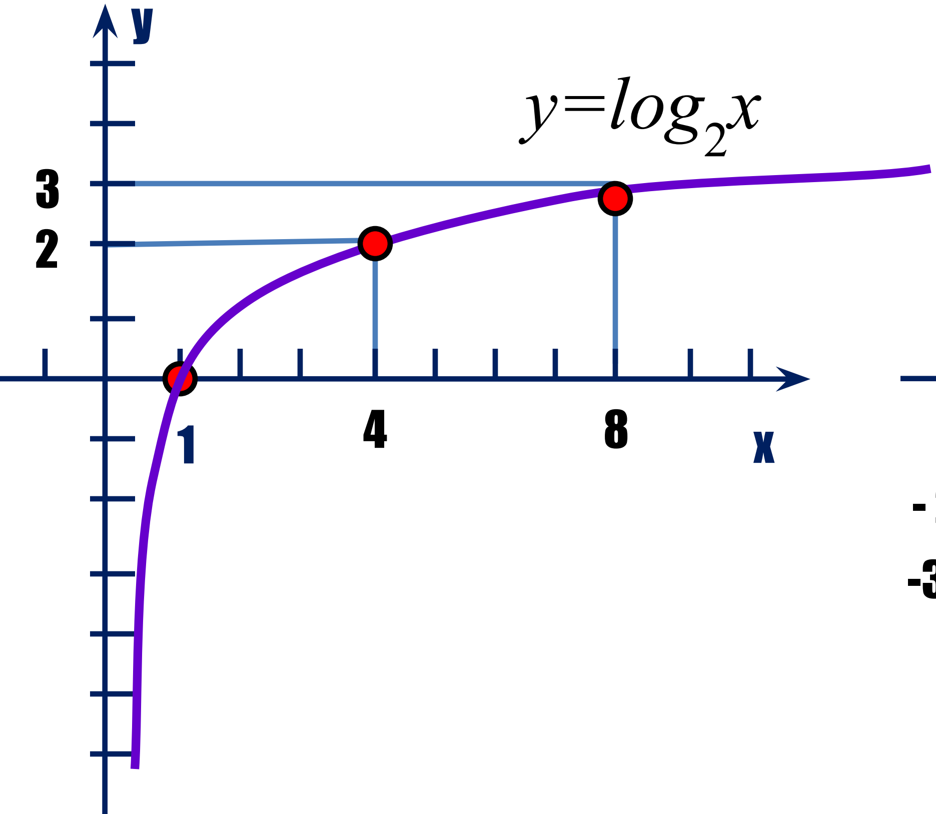
Построим графики функций

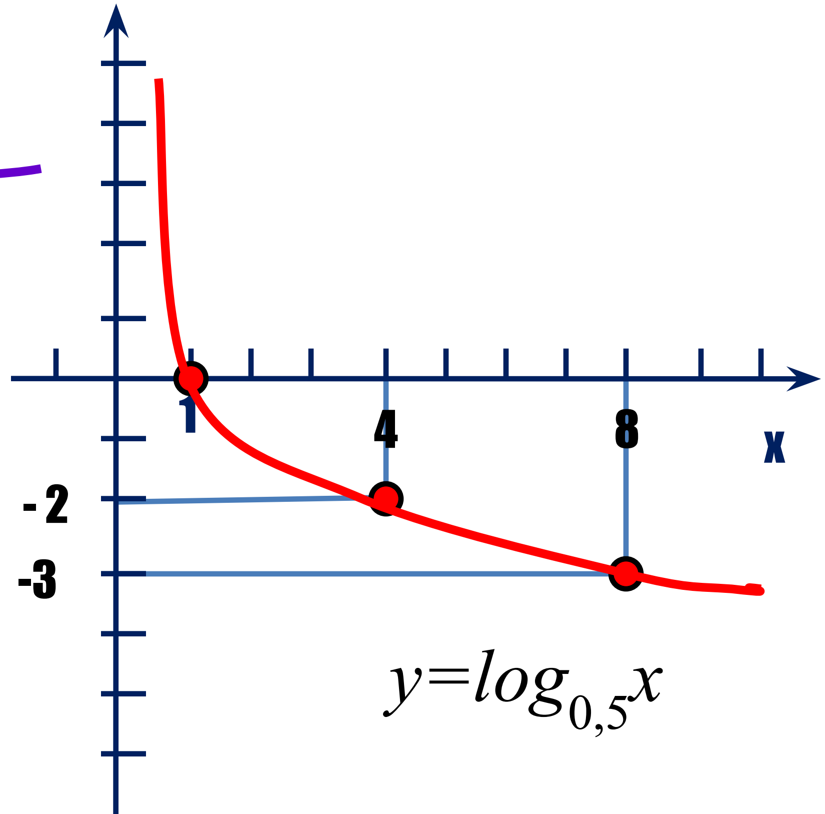
$y = log_2 x$

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

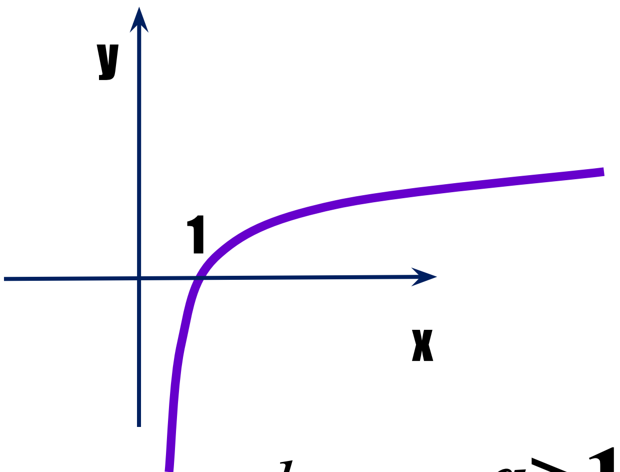
$y = log_{0,5} x$

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	2	1	0	-1	-2	-3



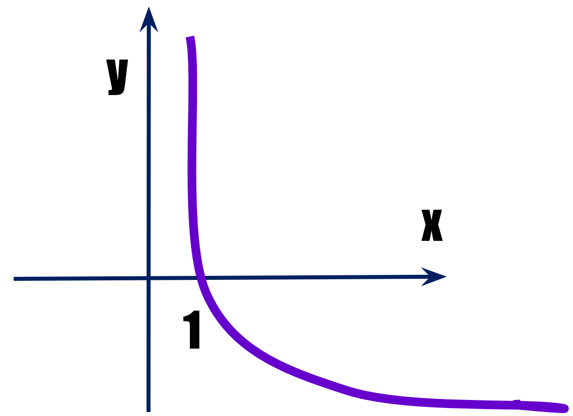


Свойства функции $y=log_a x$



$y=log_a x$ $\boldsymbol{a>1}$

1) D(y): (0;+∞)
2) ***возрастает*** на всей своей области определения
3) не ограничена ни сверху, ни снизу
4) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений



$y=log_a x$ $\boldsymbol{0<a<1}$

1) D(y):(0;+∞)
2) **убывает** на своей области определения
3) не ограничена ни сверху, ни снизу
4) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений