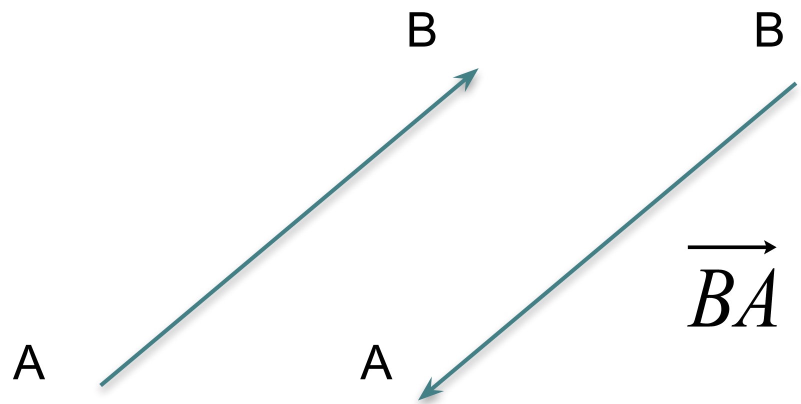
ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

ВЕКТОРЫ на плоскости и в пространстве

Вектор (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок ***AB***, у которого одна из ограничивающих его точек ***A*** принимается за начало, а вторая ***B*** – за конец.

$\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$



$\overrightarrow{BA}$

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются

равными, если:

имеют одинаковые длины $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$

и одинаково направлены

Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

Характеристики: модуль, направление

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются

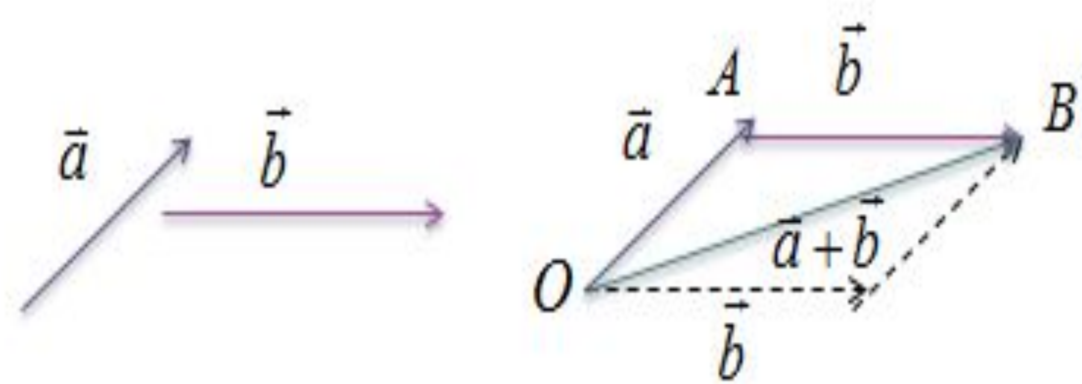
равными, если:

имеют одинаковые длины $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$

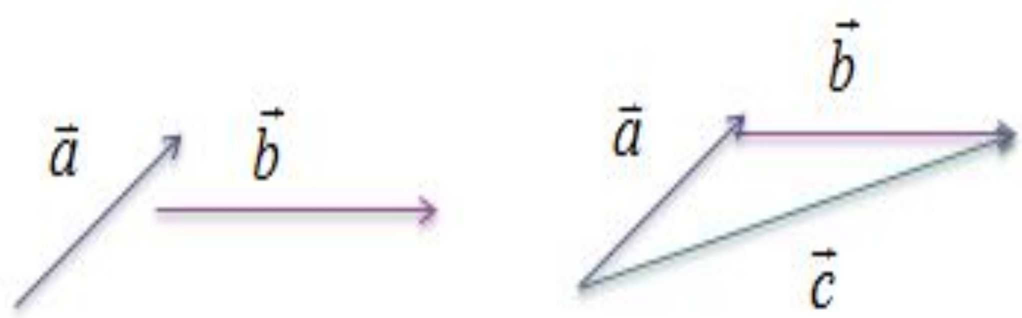
и одинаково направлены

Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

Операции: сложение векторов



Правило параллелограмма



Правило треугольника

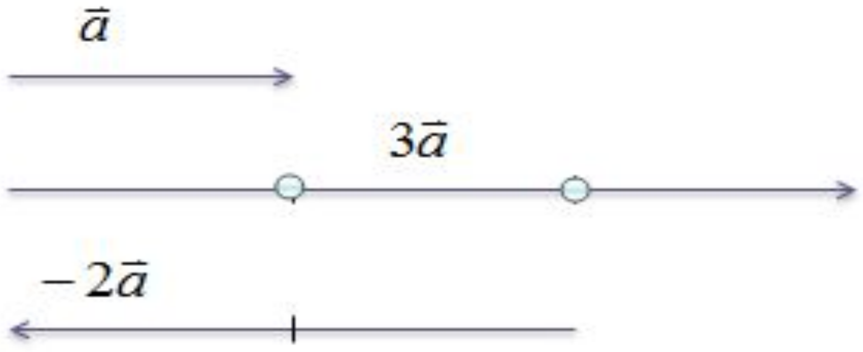
$$\vec c = \vec a + \vec b$$

Операции: умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, модуль которого равен числу $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление $(-\vec{a})$, если $\lambda < 0$.

Обозначается: $\lambda\vec{a}$.

Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

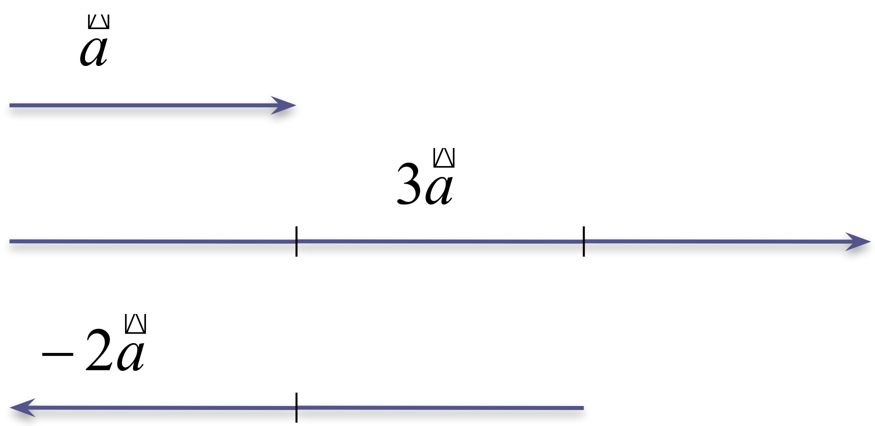


перации3. Умножение вектора на число

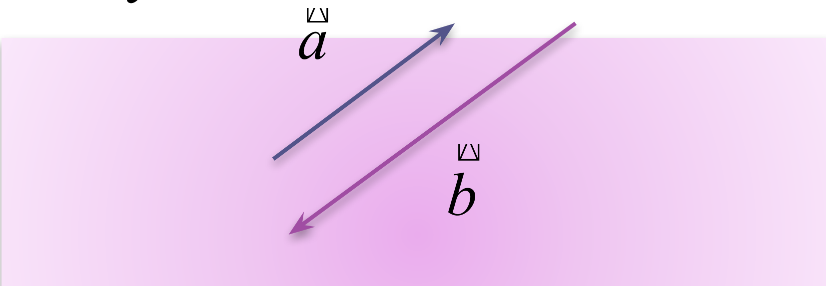
Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, модуль которого равен числу $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление $(-\vec{a})$, если $\lambda < 0$.

Обозначается: $\lambda\vec{a}$.

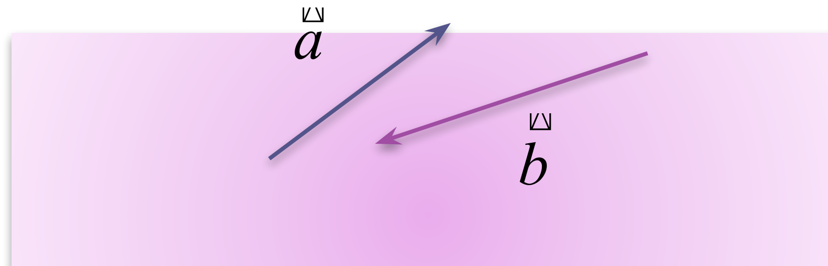
Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.



Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются ***неколлинеарными***.



Коллинеарные векторы



Неколлинеарные векторы

Нулевой вектор ***коллинеарен*** всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

Вектор $\vec{a}$ называется ***коллинеарным*** прямой ***l***, если этот вектор лежит на прямой ***l*** ***или*** на прямой, параллельной ***l.***

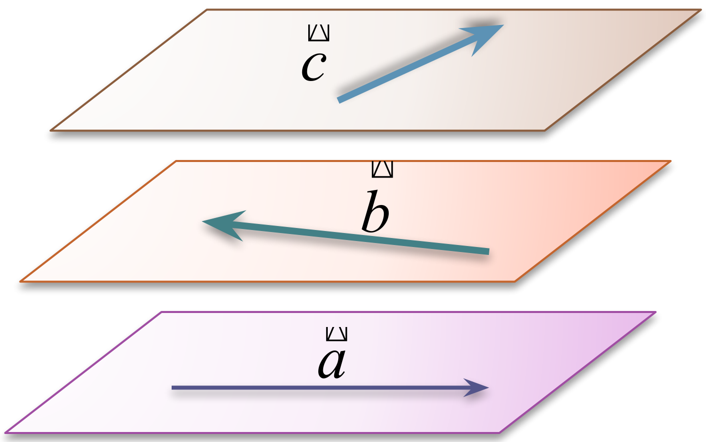
Признак коллинеарности двух ненулевых векторов

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \mu \cdot \vec{b}, \ \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a},$$

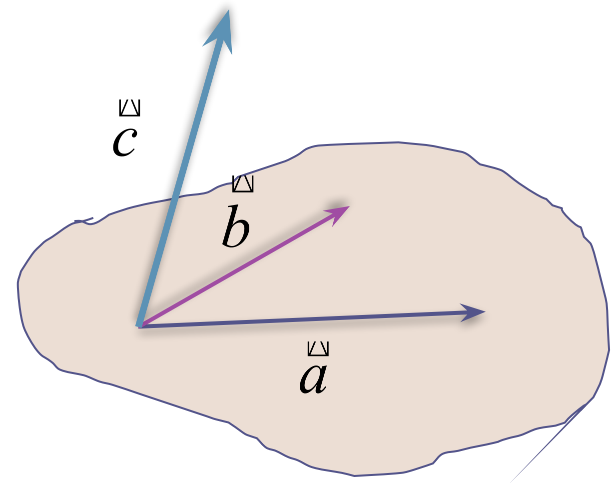
где λ и μ - некоторые числа.

Три вектора называются ***компланарными***, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются ***некомпланарными***.

Если хоть один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ нулевой вектор, то эти векторы компланарны.



Компланарные векторы



Некомпланарные векторы

1) ***Базисом*** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) ***Базисом*** на плоскости называются любые 2 неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.

3) ***Базисом*** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$,

то числа α, β и γ - называются ***координатами*** вектора в этом базисе.

Свойства:

1) равные векторы в одном и том же базисе имеют одинаковые координаты

2) при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число

$$\boxed{\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha)\vec{e}_1 + (\lambda\beta)\vec{e}_2 + (\lambda\gamma)\vec{e}_3}$$

3) при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

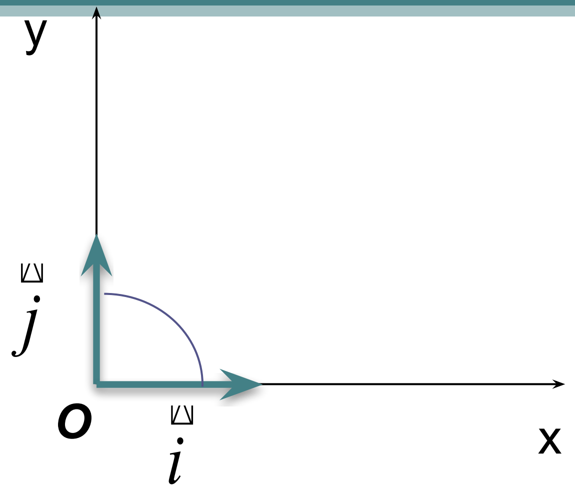
$$\boxed{(\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3}$$

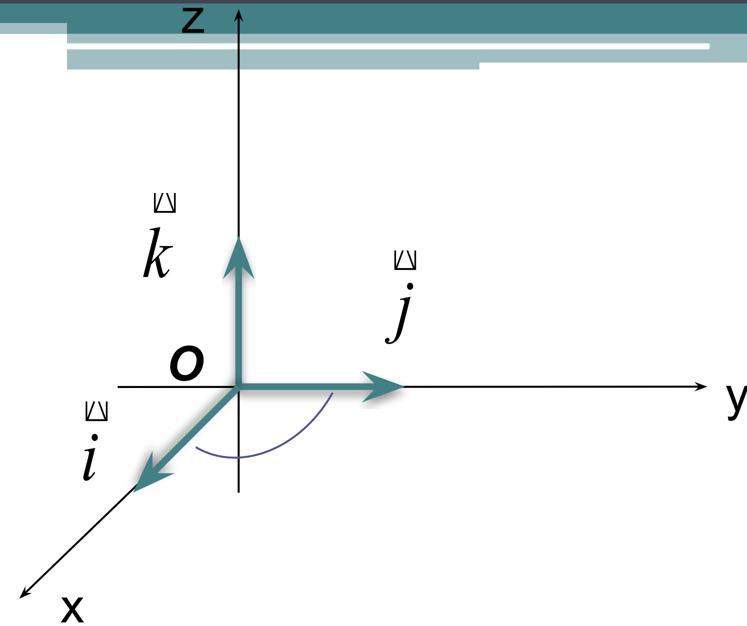
Опр. Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ - некоторая система векторов пространства R (R_1, R_2 или R_3), тогда любой вектор вида $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$ называется ***линейной комбинацией векторов***

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \quad , где\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n -$$

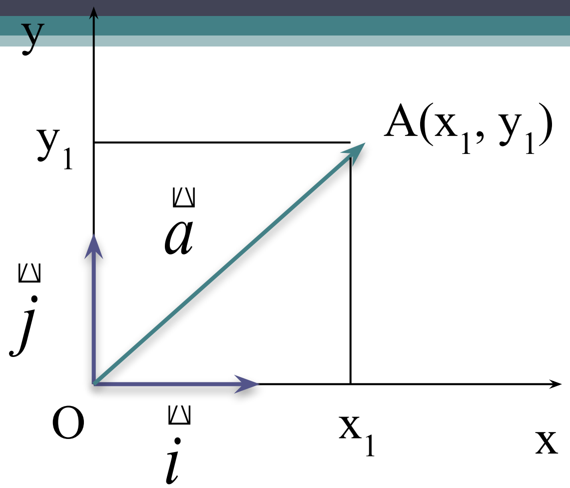
некоторые действительные числа, называемые ***коэффициентами линейной комбинации***.

Если какой-либо вектор представляется в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он ***разложен*** по этим векторам.





- O – произвольная точка
- $\vec{i},\vec{j}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ единичные взаимно-перпендикулярные векторы плоскости (пространства) – орты
- Oxy – прямоугольная система координат на плоскости
- $Oxyz$ – декартовая система координат в пространстве
- x – абсцисса
- y – ордината
- z – аппликата



Вектор $\vec{a}$ на плоскости ***Oxy***, может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

где x_1, y_1 – проекции конца вектора на соответствующие оси координат называются ***прямоугольными координатами вектора***.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ с координатами x_1 и y_1 обозначается: $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и называется ***радиус-вектором*** точки А.

Задача : найти координаты вектора, если даны координаты его начала и конца.

Решение.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Но $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Условие коллинеарности двух векторов

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Векторы

коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ в прямоугольных координатах :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ в декартовых координатах:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Направление вектора определяется углами ***α***, ***β***, ***γ***, образованными с осями координат Ox, Oy, Oz.

Косинусы этих углов определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|} \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}$$

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **<u>число</u>**, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и равное

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$$

$$\boxed{\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}}$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Разность двух векторов:

$$\vec{b} - \vec{a} = (20 - 15; 3 - (-6); 16 - (-5)) = (5; 9; 21)$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 15 \cdot 5 + (-6) \cdot 9 + (-5) \cdot 21 = -84$$

Задача. Даны векторы $\vec{a}=(15;-6;-5)$ $\vec{b}=(20;3;16)$

Найти: 3) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right)$ если $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$

$$\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}=2(15;-6;-5)+(20;3;16)=(50;-9;6)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right)=\frac{15\cdot 50+(-6)\cdot(-9)+(-5)\cdot 6}{\sqrt{15^2+(-6)^2+(-5)^2}\sqrt{50^2+(-9)^2+6^2}}=$$

$$\frac{750+54-30}{\sqrt{286}\cdot\sqrt{2617}}=\frac{774}{\sqrt{748462}}$$

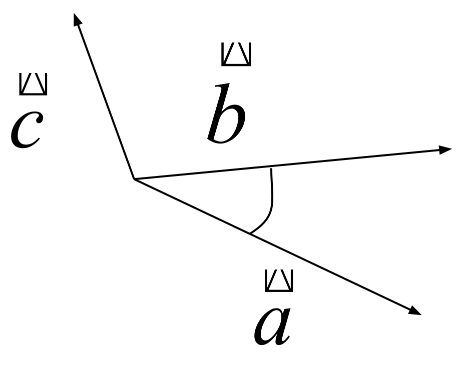
Задача. Даны векторы $\vec{a}=(15;-6;-5)$ $\vec{b}=(20;3;16)$

Найти: 4) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

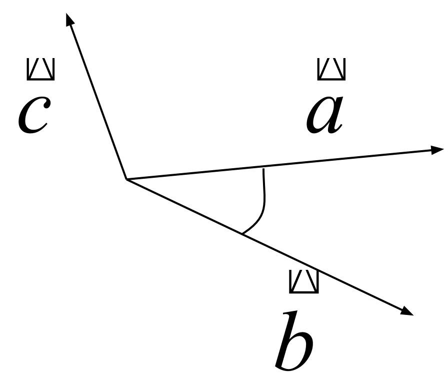
$$\vec{a}+\vec{b}=(35;-3;9)$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{35^2+(-3)^2+9^2}=\sqrt{1225+9+81}=\sqrt{1315}$$

Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют ***правую тройку*** (***левую тройку***) или ***положительно ориентированы*** (***отрицательно ориентированы***), если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Правая тройка



Левая тройка

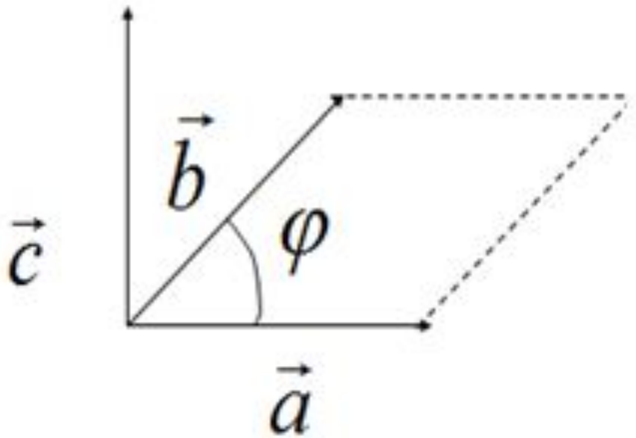
Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий **вектор** $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

Свойства

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$

2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0},$

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$

4. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \vec{b}\right) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

5. *Критерий коллинеарности векторов*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

Векторное произведение в координатах

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

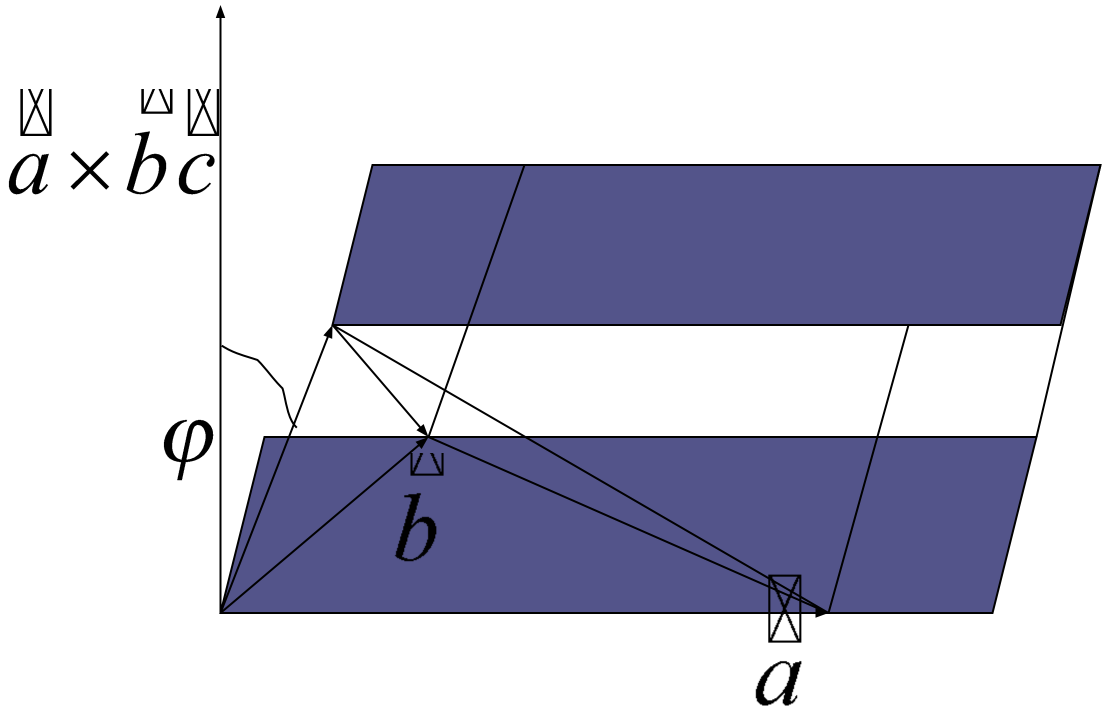
Опр. Смешанным произведением трех векторов называется ***число***, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и определяемое следующим образом

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$$

Другие обозначения :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle.$$

Геометрический смысл



$$V_{\text{парал.}} = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$$

Свойства

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

2. $\lambda \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

3. $\vec{a}\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{a} = 0$

4. $(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$

Свойства

5. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$

(не нарушается круговой порядок)

6. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

(нарушается круговой порядок)

Смешанное произведение в координатах

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Признак компланарности трех векторов (линейной зависимости трех векторов)

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда

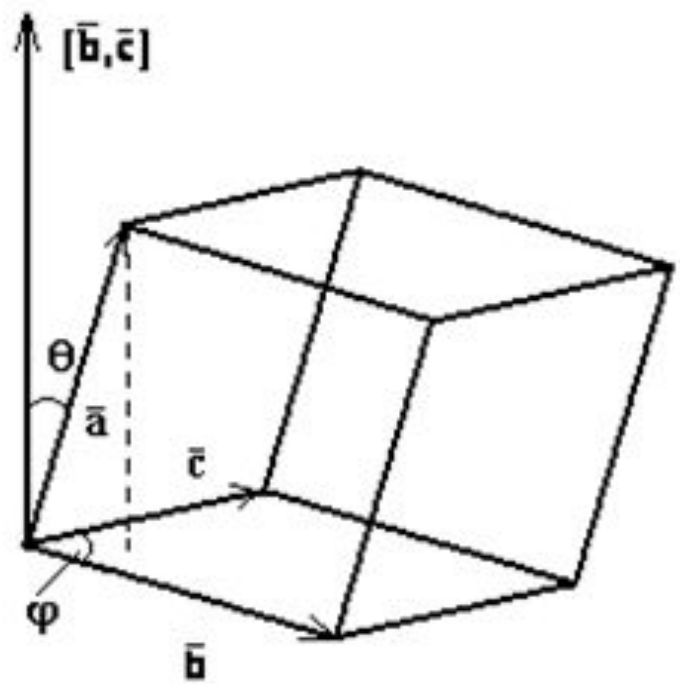
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Вычисление объема параллелепипеда, пирамиды

Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах

$\bar{a} = (2; 3; 5) \quad \bar{b} = (1; 4; 4) \quad \bar{c} = (3; 5; 7)$



$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 7 = -4$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \text{(куб. ед.)}$$