Расчеты освещения от больших поверхностей. Формула В.А. Фока

E-mail: SmirnovPA@mpei.ru

сот: 8-910-443-75-52

Подготовил: Смирнов П.А.

Фок, Владимир Александрович
(22 декабря 1898 г. – 27 декабря 1974 г. Санкт-Петербург)

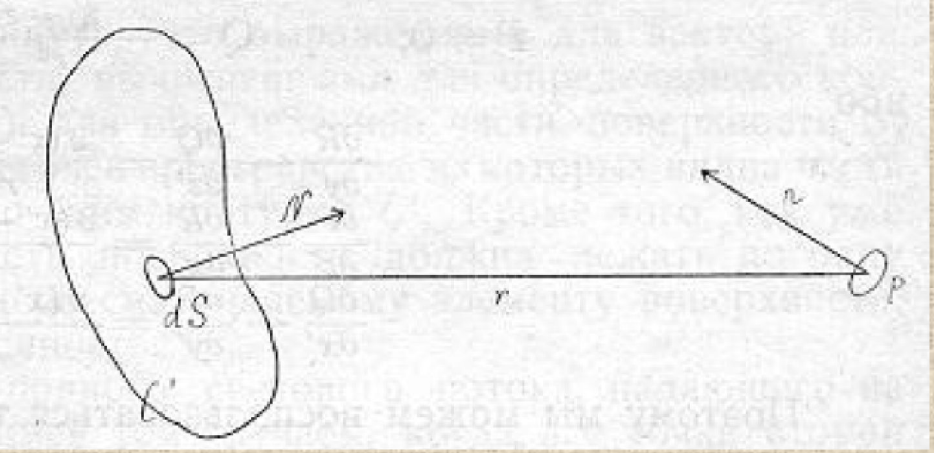
Освещённость от поверхностей произвольной формы – труды ГОИ – 1924 г. – 26 лет.

- Квантовая механика, квантовая электродинамика, квантовая теория поля
- Пространство Фока
- Метод функционалов Фока
- Метод собственного времени
- Многовременной формализм
- Метод Хартри-Фока «Метод самосогласованного поля»
- и т.д.

По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

Принимая яркость поверхности *L*=1

$$E = \frac{1}{\pi}\iint \frac{\cos(\mathbf{N},\mathbf{r})\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})dS}{r^2}$$



Разложение по осям:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{\pi}\iint \dfrac{\cos(\mathbf{N},\mathbf{r})\cos(\mathbf{r},\mathbf{x})dS}{r^2} \\ E_y = \dfrac{1}{\pi}\iint \dfrac{\cos(\mathbf{N},\mathbf{r})\cos(\mathbf{r},\mathbf{y})dS}{r^2} \\ E_z = \dfrac{1}{\pi}\iint \dfrac{\cos(\mathbf{N},\mathbf{r})\cos(\mathbf{r},\mathbf{z})dS}{r^2} \end{cases}$$

По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

Разложение через координаты для E_x:

$$r^2 = \left(x' - x\right)^2 + \left(y' - y\right)^2 + \left(z' - z\right)^2$$

$$\cos(\mathbf{r},\mathbf{x}) = \frac{x' - x}{r};\cos(\mathbf{r},\mathbf{y}) = \frac{y' - y}{r};\cos(\mathbf{r},\mathbf{z}) = \frac{z' - z}{r}$$

$$\cos(\mathbf{N},\mathbf{r}) = \frac{x' - x}{r}\cos(\mathbf{N},\mathbf{x}) + \frac{y' - y}{r}\cos(\mathbf{N},\mathbf{y}) + \frac{z' - z}{r}\cos(\mathbf{N},\mathbf{z})$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\iint\left[\frac{2\left(x' - x\right)^2}{r^4}\cos(\mathbf{N},\mathbf{x}) + \right.$$

$$+\frac{2\left(x' - x\right)\left(y' - y\right)}{r^4}\cos(\mathbf{N},\mathbf{y}) +$$

$$\left. +\frac{2\left(x' - x\right)\left(z' - z\right)}{r^4}\cos(\mathbf{N},\mathbf{z})\right]dS$$

По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\iint\left(A\cos(\mathbf{N},\mathbf{x}) + B\cos(\mathbf{N},\mathbf{y}) + C\cos(\mathbf{N},\mathbf{z})\right)dS$$

где:

$$A = \frac{2\left(x' - x\right)^2}{r^4}$$

$$B = \frac{2\left(x' - x\right)\left(y' - y\right)}{r^4}$$

$$C = \frac{2\left(x' - x\right)\left(z' - z\right)}{r^4}$$

Что есть ротор вектора (*P*,*Q*,*R*):

$$P = 0$$

$$Q = -\frac{z' - z}{r^2}$$

$$R = \frac{y' - y}{r^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y'} - \frac{\partial Q}{\partial z'} = \frac{2\left(x' - x\right)^2}{r^4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{2\left(x' - x\right)\left(y' - y\right)}{r^4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} = \frac{2\left(x' - x\right)\left(z' - z\right)}{r^4}$$

По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

Используем теорему Стокса:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \dfrac{(y'-y)dz' - (z'-z)dy'}{r^2} \\ E_y = \dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \dfrac{(z'-z)dx' - (x'-x)dz'}{r^2} \\ E_z = \dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \dfrac{(x'-x)dy' - (y'-y)dx'}{r^2} \end{cases}$$

Введём в рассмотрение вектор:

$$\begin{cases} V_x = -\dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \lg r dx' \\ V_y = -\dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \lg r dy' \\ V_z = -\dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \lg r dz' \end{cases}$$

тогда:

$$E_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$E_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$E_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Выражения для потока

$$\Phi_{12} = \iint\limits_{S_2} \left(E_x \cos(\mathbf{n},\mathbf{x}) + E_y \cos(\mathbf{n},\mathbf{y}) + E_z \cos(\mathbf{n},\mathbf{z}) \right) dS_2$$

Т.к. вектор E – это ротор, то можно ещё раз применить теорему Стокса:

$$\boxed{\Phi_{12} = \oint\limits_{C} V_x dx + V_y dy + V_z dz}$$

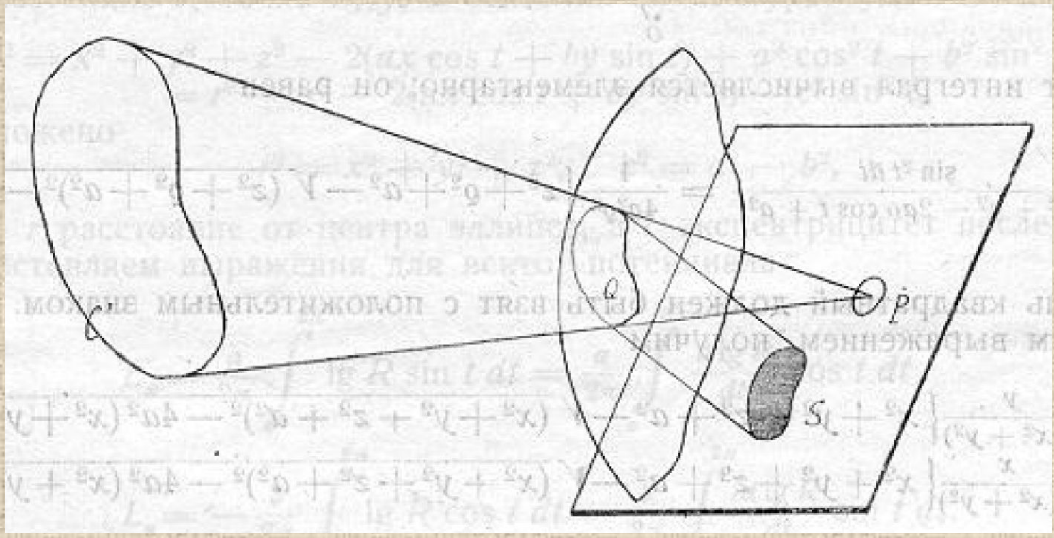
или

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_{12} &= -\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \oint\limits_{C} \lg r \left(dx dx' + dy dy' + dz dz' \right) \\ \Phi_{12} &= -\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C'} \oint\limits_{C} \lg r \cos\left(ds, ds' \right) ds ds' \end{aligned}}$$

Связь с геометрией

$$\begin{cases} \xi = \cos(\mathbf{r},\mathbf{x}) = \dfrac{x'-x}{r} \\ \eta = \cos(\mathbf{r},\mathbf{y}) = \dfrac{y'-y}{r} \\ \zeta = \cos(\mathbf{r},\mathbf{z}) = \dfrac{z'-z}{r} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_{C'} \eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta \\ E_y = \dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_{C'} \zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta \\ E_z = \dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_{C'} \xi\, d\eta - \eta\, d\xi \end{cases}$$



Освещённость на плоскости P будет равна делённой на π проекции участка единичной сферы на эту плоскость.

Расчёт освещённости от равноярkой поверхности

Световой вектор:

$$\mathbf{E} = \int_{\Omega} L\, d\mathbf{\Omega}$$

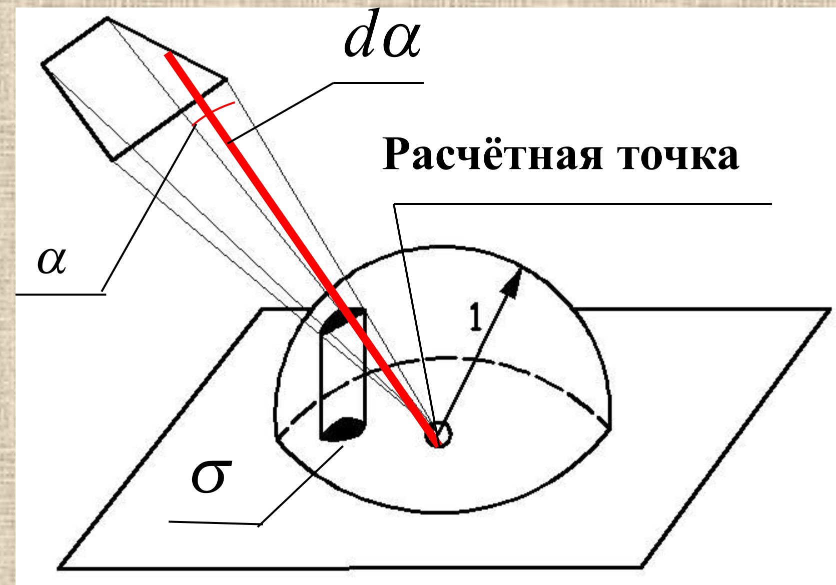
Освещённость:

$$E = \int_{\sigma} L\, d\sigma$$

или

$$E = \frac{L}{2} \oint_{C} \cos\beta\, d\alpha$$

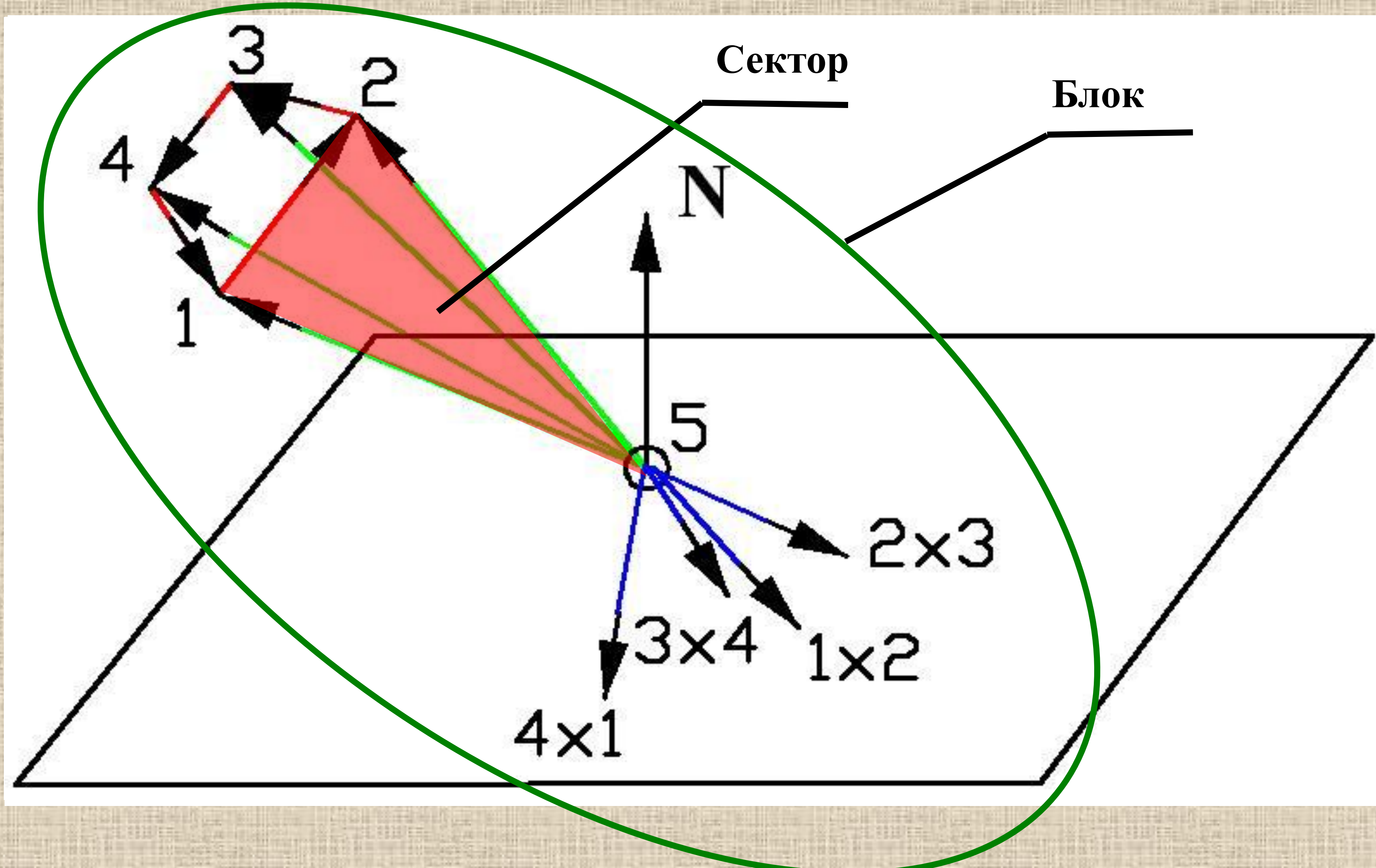
β – угол между внешней стороной образующей конической поверхности и расчётной плоскостью



Для многоугольника можно перейти от интеграла к сумме:

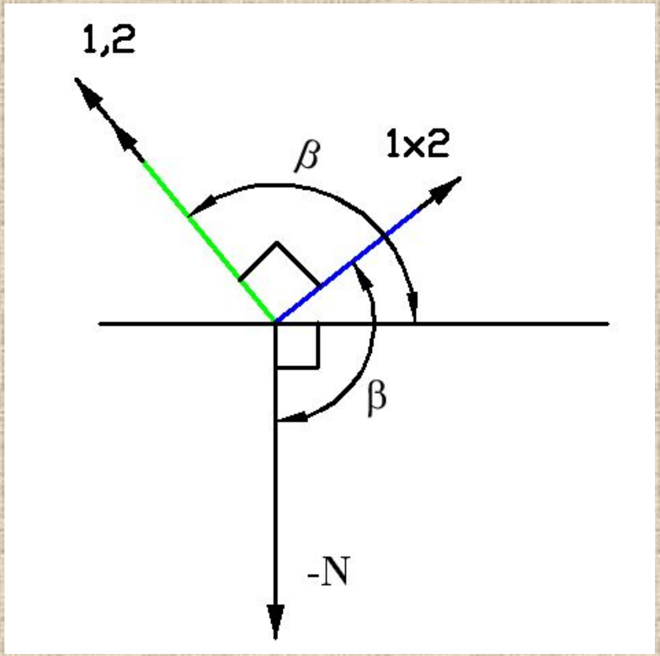
$$E = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{N} \cos\beta_i \alpha_i$$

Векторный метод расчёта освещённости от равнояркого многоугольника



Расчёт веса сектора

Вид с направления где вектора 1 и 2 сливаются в одну линию



Вес сектора:

$$m = \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)}{|\mathbf{V}_1||\mathbf{V}_2|}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)}{|\mathbf{V}_1||\mathbf{V}_2|}\right)$$

$$\cos \beta = \frac{(\mathbf{-N}, \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2)}{|\mathbf{-N}||\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2|}$$

$$m = \frac{(\mathbf{-N}, \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2)}{|\mathbf{-N}||\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2|} \arccos\left(\frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)}{|\mathbf{V}_1||\mathbf{V}_2|}\right)$$

Расчёт проекции телесного угла (форм-фактора) блока

Форм-фактор блока

$$F = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad F = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cos\beta_i$$

$$F = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\left(\mathbf{-N}, \mathbf{V}_i \mathbf{V}_{i+1}\right)}{\left|\mathbf{-N}\right| \left|\mathbf{V}_i \mathbf{V}_{i+1}\right|} \arccos\left(\frac{\left(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}\right)}{\left|\mathbf{V}_i\right| \left|\mathbf{V}_{i+1}\right|} \right) +$$

$$+ \frac{\left(\mathbf{-N}, \mathbf{V}_N \mathbf{V}_1\right)}{\left|\mathbf{-N}\right| \left|\mathbf{V}_N \mathbf{V}_1\right|} \arccos\left(\frac{\left(\mathbf{V}_N, \mathbf{V}_1\right)}{\left|\mathbf{V}_N\right| \left|\mathbf{V}_1\right|} \right)$$

Спасибо за внимание!