

Световое поле, обобщение и выводы

E-mail: SmirnovPA@mpei.ru

сот: 8-910-443-75-52

Подготовил: Смирнов П.А.

Джеймс Клерк М'аксвелл

(3 июня 1831, Эдинбург, Шотландия – 5 ноября 1879, Кембридж, Англия)

- Работы по фотоупругости (пропускание поляризованного излучения через деформированные материалы)
- Теория цветов (развитие идеи о трёх основных цветах, цветовой треугольник)
- Уравнения Максвелла для электромагнетизма
- Работа по устойчивости колец Сатурна
- Кинетическая теория газов (распределение по скоростям)
- Первая цветная фотография



Уравнения Максвелла

Гауссова система единиц

$$\begin{cases} [\nabla, \mathbf{H}] - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ [\nabla, \mathbf{E}] - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0 \\ (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho \\ (\nabla, \mathbf{B}) = 0 \end{cases}$$

Система СИ

$$\begin{cases} [\nabla, \mathbf{H}] - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j} \\ [\nabla, \mathbf{E}] - \dot{\mathbf{B}} = 0 \\ (\nabla, \mathbf{D}) = \rho \\ (\nabla, \mathbf{B}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

H – вектор напряжённости магнитного поля

D – вектор электрического смещения

j – вектор плотности тока

B – вектор магнитной индукции

E – вектор напряжённости электрического поля

ρ – плотность электрического заряда

c – скорость света

Основные соотношения теории поля

Оператор Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \text{grad } f \\ (\nabla, \mathbf{f}) = \text{div } \mathbf{f} \\ [\nabla, \mathbf{f}] = \text{rot } \mathbf{f} \\ \nabla^2 = \Delta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla, \nabla f) = \Delta f = \text{div}(\text{grad } f) \\ [\nabla, \nabla f] = \text{rot}(\text{grad } f) = 0 \\ \nabla(\nabla, \mathbf{f}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{f}) \\ (\nabla, [\nabla, \mathbf{f}]) = \text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = 0 \\ [\nabla, [\nabla, \mathbf{f}]] = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{f}) \\ (\nabla, (\nabla, \mathbf{f})) = \Delta \mathbf{f} + [\nabla, [\nabla, \mathbf{f}]] \end{array} \right.$$

Материальные уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \sigma \quad - \text{удельная проводимость} \\ \varepsilon \quad - \text{диэлектрическая проницаемость} \\ \mu \quad - \text{магнитная проницаемость} \end{array}$$

Следствия из уравнений Максвелла

Дивергенция первого уравнения:

и далее:

$$(\nabla, \mathbf{j}) = -\frac{1}{4\pi}(\nabla, \mathbf{D}) \qquad (\nabla, \mathbf{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Закон сохранения энергии

$$(\mathbf{E}, [\nabla, \mathbf{H}]) - (\mathbf{H}, [\nabla, \mathbf{E}]) = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{E}) + \frac{1}{c}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{D}}) + \frac{1}{c}(\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}})$$

$$\frac{1}{c}(4\pi(\mathbf{j}, \mathbf{E}) + (\mathbf{E}, \dot{\mathbf{D}}) + (\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}})) + (\nabla, [\mathbf{E}, \mathbf{H}]) = 0$$

Закон сохранения энергии

$$(\mathbf{E}, [\nabla, \mathbf{H}]) - (\mathbf{H}, [\nabla, \mathbf{E}]) = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{E}) + \frac{1}{c}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{D}}) + \frac{1}{c}(\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}})$$
$$\frac{1}{c}(4\pi(\mathbf{j}, \mathbf{E}) + (\mathbf{E}, \dot{\mathbf{D}}) + (\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}})) + (\nabla, [\mathbf{E}, \mathbf{H}]) = 0$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right)$$

e – электрический заряд
 \mathbf{v} – вектор скорости заряда

Умножаем на $c/4\pi$ и интегрируем с применением теоремы Гаусса:

$$\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}, \dot{\mathbf{D}}) + (\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}}) dV + \int (\mathbf{j}, \mathbf{E}) dV + \frac{c}{4\pi} \int ([\mathbf{E}, \mathbf{H}], \mathbf{n}) dS = 0$$

\mathbf{n} – вектор внешней нормали

Можно положить:

Полная энергия внутри объёма:

$$w_e = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}, \mathbf{D}), w_m = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}, \mathbf{B}) \quad W = \int (w_e + w_m) dV$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{dW}{dt} + \int (\mathbf{j}, \mathbf{E}) dV + \frac{c}{4\pi} \int ([\mathbf{E}, \mathbf{H}], \mathbf{n}) dS = 0$$

Введём соотношения для вектора плотности тока:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_v$$

$$\mathbf{j}_e = \sigma \mathbf{E} \quad - \text{плотность тока проводимости}$$

$$\mathbf{j}_v = \rho \mathbf{v} \quad - \text{плотность конвекционного тока}$$

Тогда выражение для работы можно представить:

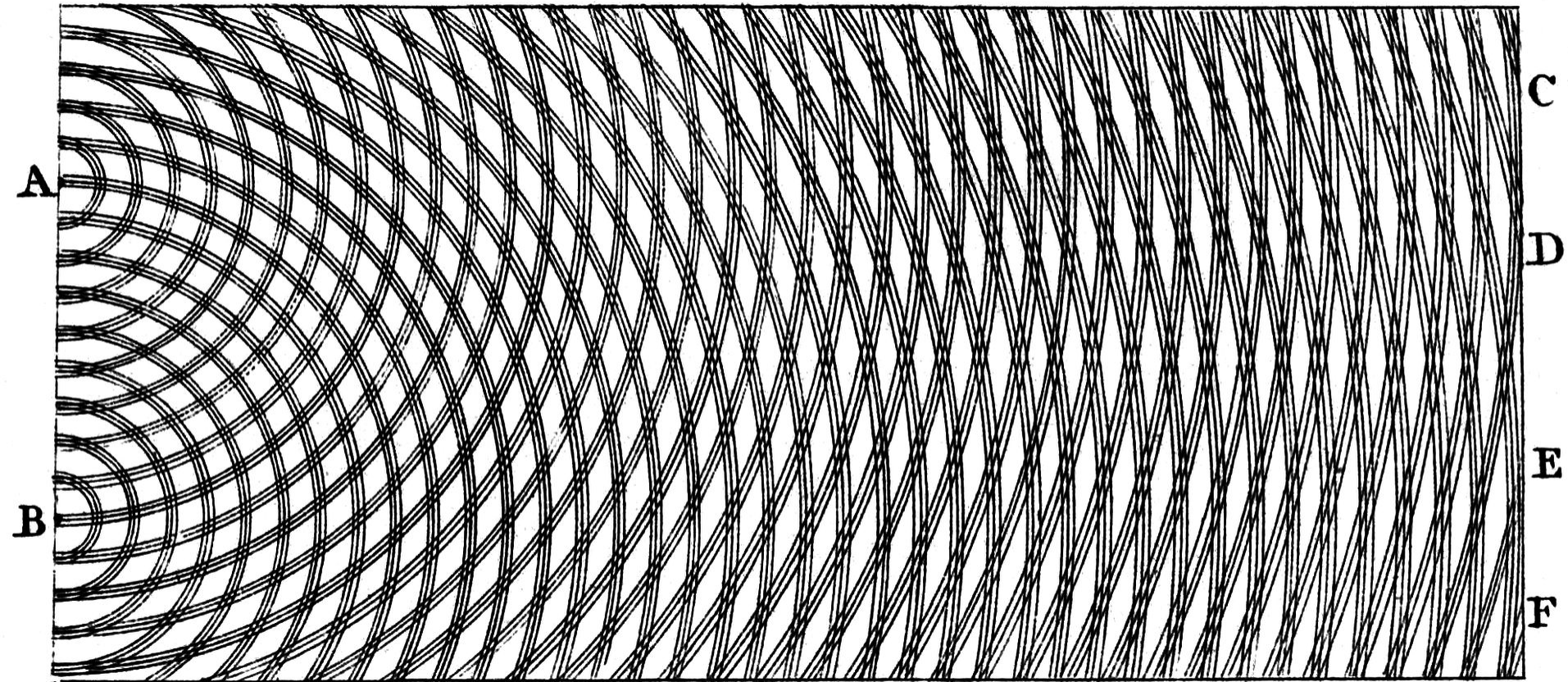
$$\delta A = \sum_k (\mathbf{F}_k, \delta \mathbf{x}_k) = \sum_k (e_k \mathbf{E}_k, \delta \mathbf{x}_k) = \sum_k (e_k \mathbf{E}_k, \mathbf{v}_k) \delta t = \delta t \int (\mathbf{j}_v, \mathbf{E}) dV$$

Дополнительно введём: $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ и $Q = \int (\mathbf{j}_e, \mathbf{E}) dV$

Тогда закон сохранения энергии переписется в виде:

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\delta A}{\delta t} + Q + \int (\mathbf{S}, \mathbf{n}) dS = 0$$

Луч и волновое уравнение



$$\left\{ \begin{array}{l} [\nabla, \mathbf{H}] - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ [\nabla, \mathbf{E}] - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0 \\ (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho \\ (\nabla, \mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{j} = 0, \sigma = 0 \\ \left[\nabla \left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{\mu} \right] \right] - \left[\nabla, \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} \right] = 0 \\ \left[\nabla, \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} \right] = \left[\nabla \left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{\mu} \right] \right] \end{array} \right.$$

Разделим первое уравнение на μc и продифференцируем по времени, получим волновое уравнение для электрического поля:

$$\left[\nabla, \left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{\mu} \right] \right] - \frac{\varepsilon \ddot{\mathbf{E}}}{c^2} = 0$$

Спасибо за внимание!