ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

События **А** и **В** называются ***несовместными,*** если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого

(испытание: стрельба по мишени

А-выбивание четного числа очков;

В- не четного).

События **А** и **В** называются ***совместными***, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого

(А- в аудиторию вошел учитель; В- вошел студент).

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 1. Вероятность появления одного из двух ***несовместных*** событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие. Сумма вероятностей ***противоположных*** событий равна 1

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из двух ***совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Сумма вероятностей ***противоположных*** событий равна 1

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

События **A** и **B** называются ***совместными***, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого (A- в аудиторию вошел учитель; B- вошел студент).

Вероятность появления хотя бы одного из двух ***совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

ЗАДАЧА 1

В лотерее участвуют 100 билетов, из которых на 5 билетов падает выигрыш 20 рублей, на 10 билетов – 15 руб., на 15 билетов – 10 руб., на 25 билетов – 2 рубля.

Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10 рублей.

Решение.

Пусть А,В,С – события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20,15 и 10 руб.

Т.к. события А,В и С несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0{,}3$$

ЗАДАЧА 2

В коробке 250 лампочек, из них
100 по 100 Вт, 50 – по 60 Вт, 50 - по 25 Вт,
50 - по 15 Вт.
Вычислить вероятность того, что мощность
любой взятой наугад лампочки
не превысит 60 Вт.

РЕШЕНИЕ

Пусть А – событие, состоящее в том, что мощность лампочки равна 60 Вт, В – 25 Вт, С – 15 Вт, D – 100 Вт. События А,В,С,D образуют полную систему, т.к.все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном испытании (выборе лампочки), т.е.

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1.$$

События «мощность лампочки не более 60 Вт» и

«мощность лампочки более 60 Вт» – противоположные.

По свойству противоположных событий

$$P(A)+P(B)+P(C) = 1- P(D),$$

$$P(A+B+C) = 1- \frac{100}{250} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$$

ЗАДАЧА 3

В коробке лежат 30 галстуков, причем 12 из них красные, остальные белые. Определить вероятность того, что из 4 наудачу вынутых галстуков все они окажутся одного цвета.

Решение

- Пусть А – событие, состоящее в том, что все 4 галстука будут красные,
- В – все 4 галстука будут белыми

4 галстука из 30 можно выбрать

$$C_{30}^4 = \frac{30!}{4!26!} = \frac{27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{2\cdot 3\cdot 4} = 27405$$ способами

4 галстука из 12 красных можно выбрать

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4} = 495$$ способами, аналогично

4 белых - $C_{18}^4 = \frac{18!}{4!14!} = \frac{15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4} = 3060$ способами.

Вероятность того, что все 4 галстука будут красные, равна

$$P = P(A) + P(B) = \frac{495}{27405} + \frac{3060}{27405} = \frac{79}{609} = 0,13$$

Два события называются ***независимыми***, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого

(в противном случае - зависимыми).

Условной вероятностью ***P(B/A)*** называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Для независимых событий **P(A)=P(A/B) или P(B)=P(B/A)**

ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Теорема 1. ***Вероятность совместного появления двух событий*** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$\mathbf{P(AB)=P(A)\ P(B/A)}$$

Теорема 2. ***Вероятность совместного появления двух независимых*** событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Задача 4

В первой урне находятся
6 черных и 4 белых шара,
во второй – 5 черных и 7 белых.
Из каждой урны извлекают
по одному шару.
Какова вероятность того,
что оба шара окажутся
белыми?

РЕШЕНИЕ

Пусть A_1 – из первой урны извлечен белый шар;

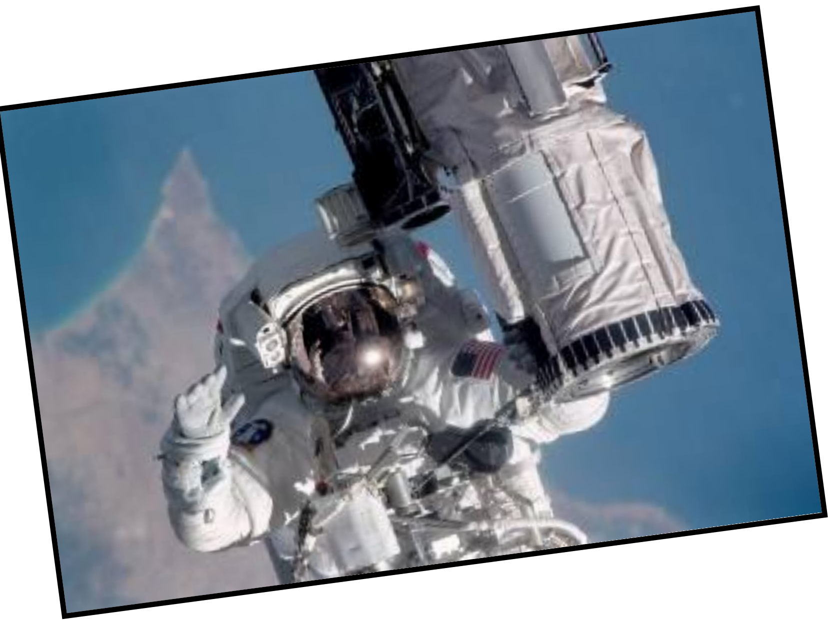
A_2 – из второй урны извлечен белый шар.

События A_1 и A_2 независимы.

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; P(A_2) = \frac{7}{12};$$

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{30}$$

Задача 5



Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо.

Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2;

Вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3.

Найти вероятность того, что:

а) оба элемента выйдут из строя;

б) оба элемента будут работать.

Решение

Пусть событие А – выход из строя первого элемента,

событие Е – выход из строя второго элемента.

Эти события независимы (по условию).

а) одновременно появление А и Е есть событие АЕ

$P(AE) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

б) если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию А – выходу этого элемента из строя);

Если работает второй элемент – событие $\bar{E}$, противоположное событию Е

$P(\bar{A}) = 1 - 0,2 = 0,8$ и $P(\bar{E}) = 1 - 0,3 = 0,7$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{E}$.

$P(\bar{A}\bar{E}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{E}) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$

ЗАДАЧА 6

В ящике 6 белых и 8 красных шаров. Из ящика вынули 2 шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

РЕШЕНИЕ

Пусть событие А – появление белого шара при первом вынимании; событие В – появление белого шара при втором вынимании. События зависимы, поэтому

P(AB)=P(A) P(B/A)

P(A)= $\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

P(B/A)= $\frac{6-1}{14-1}=\frac{5}{13}$

$$P(AB)=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{13}=\frac{15}{91}$$

$$Ответ:\frac{15}{91}$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ, ФОРМУЛА БАЙЕСА

Требуется вычислить вероятность события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу.

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема. Пусть события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них событие А может наступить с некоторой условной вероятностью, тогда вероятность наступления события А равна сумме произведений вероятности каждого события из полной группы на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)P(A/B_n)$$

ЗАДАЧА 7

На трех станках различной марки изготавливается определенная деталь. Производительность первого станка за смену 40 деталей, второго – 35, третьего – 25. Установлено, что 2%,3% и 5% продукции этих станков соответственно имеют скрытые дефекты. В конце смены взята одна деталь. Какова вероятность, что она имеет дефект?

Решение. А – деталь имеет дефект;

В1 – деталь изготовлена на первом станке;

В2 – деталь изготовлена на втором станке;

В3 – деталь изготовлена на третьем станке.

$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)=$

$P(B_1)=$ $P(A/B_1)=$

$P(B_2)=$ $P(A/B_2)=$

$P(B_3)=$ $P(A/B_3)=$

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть событие A уже наступило.
Как изменятся при этом условии вероятности событий Bi ?

Так как событие A и Bi совместны, то по теореме умножения:

$$P(A \cdot B_i) = P(A) \cdot P(B_i / A) = P(B_i) \cdot P(A / B_i),$$

$$\textit{отсюда}\ P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)}$$

ЗАДАЧА 8

Электронный прибор содержит две микросхемы. Вероятность выхода из строя первой в течении достаточно длительного времени – 0,2, второй – 0,1. Известно, что **прибор вышел из строя**. Какова вероятность, что вышла из строя 1-я микросхема?

Решение. А – из строя вышел прибор;

В1 – отказала первая;

В2 – отказала вторая;

В3 – отказали обе.

$P(B_1)=0,2*0,9=0,18$ $\quad$ $P(A/B_2)=1$

$P(B_2)=0,8*0,1=0,08$ $\quad$ $P(A/B_3)=1$

$P(B_3)=0,2*0,1=0,02$ $\quad$ $P(A/B_4)=1$

$$P(B_1 / A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A / B_1)}{P(A)}=\frac{0,18\cdot 1}{0,18\cdot 1+0,02\cdot 1+0,08*1}=9/14$$