Метрология

Случайные погрешности:

статистические методы оценивания

Определения ГОСТ Р 50779.10:

Случайная величина: переменная, которая может принимать любое значение из заданного множества, при этом с ней связана функция распределения.

Случайная величина может быть дискретной (принимает определённые значения) и непрерывной (любое значение из конечного или бесконечного интервала).

Свойства функции распределения F(x):

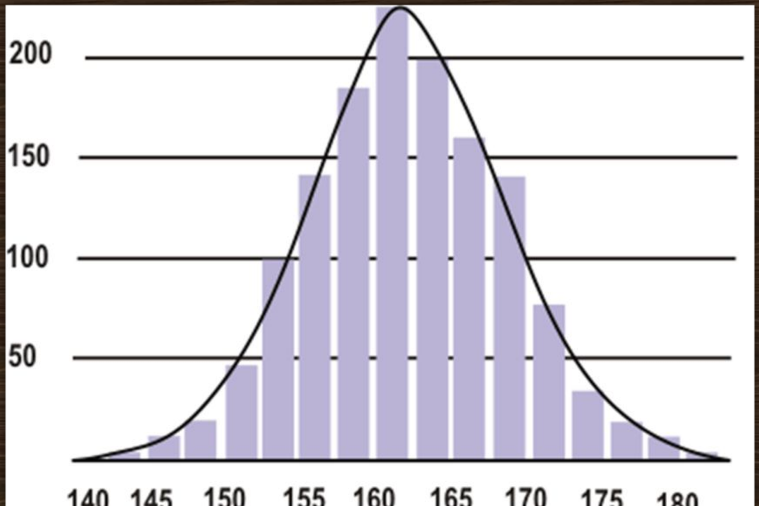
- показывает вероятность (от 0 до 1) того, что значение случайной величины ξ окажется меньше x;
- непрерывная, неубывающая
- $F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$;
- вероятность того, что $a<\xi<b$: $F(a<\xi<b)=F(b)-F(a)$

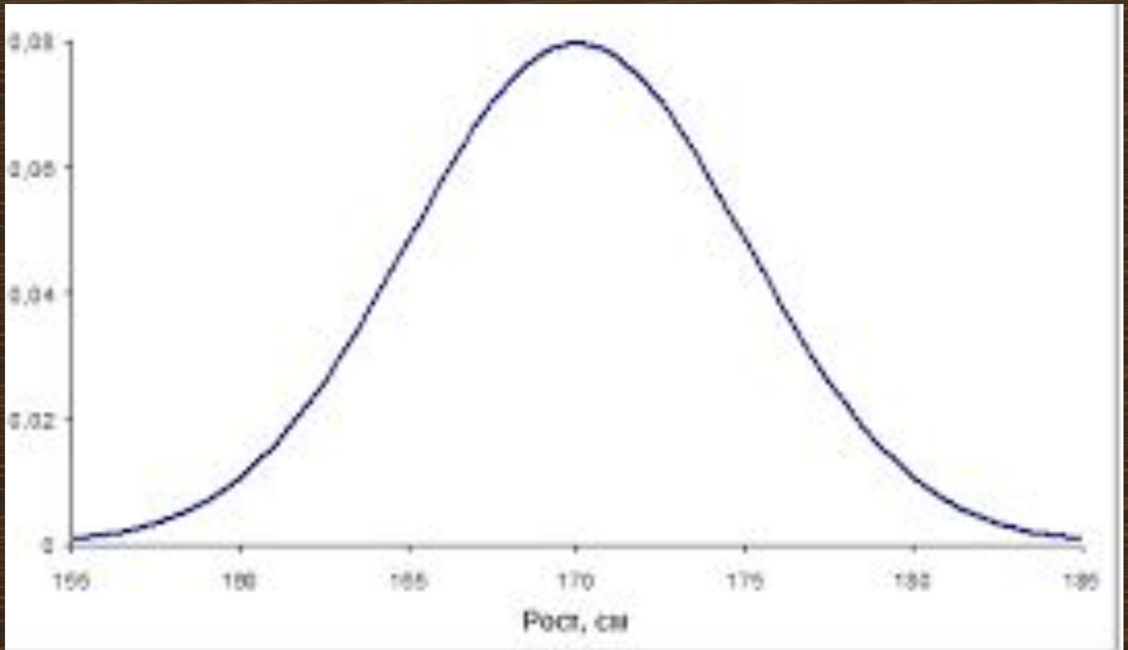
Определения ГОСТ Р 50779.10:

- Функция плотности вероятности случайной величины = производная от функции распределения:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{или} \quad F(x) = \int f(x)dx$$

Часто f(x) удобнее F(x) – похожа на гистограмму.





Определения ГОСТ Р 50779.10:

Генеральная совокупность – множество всех значений случайной величины.

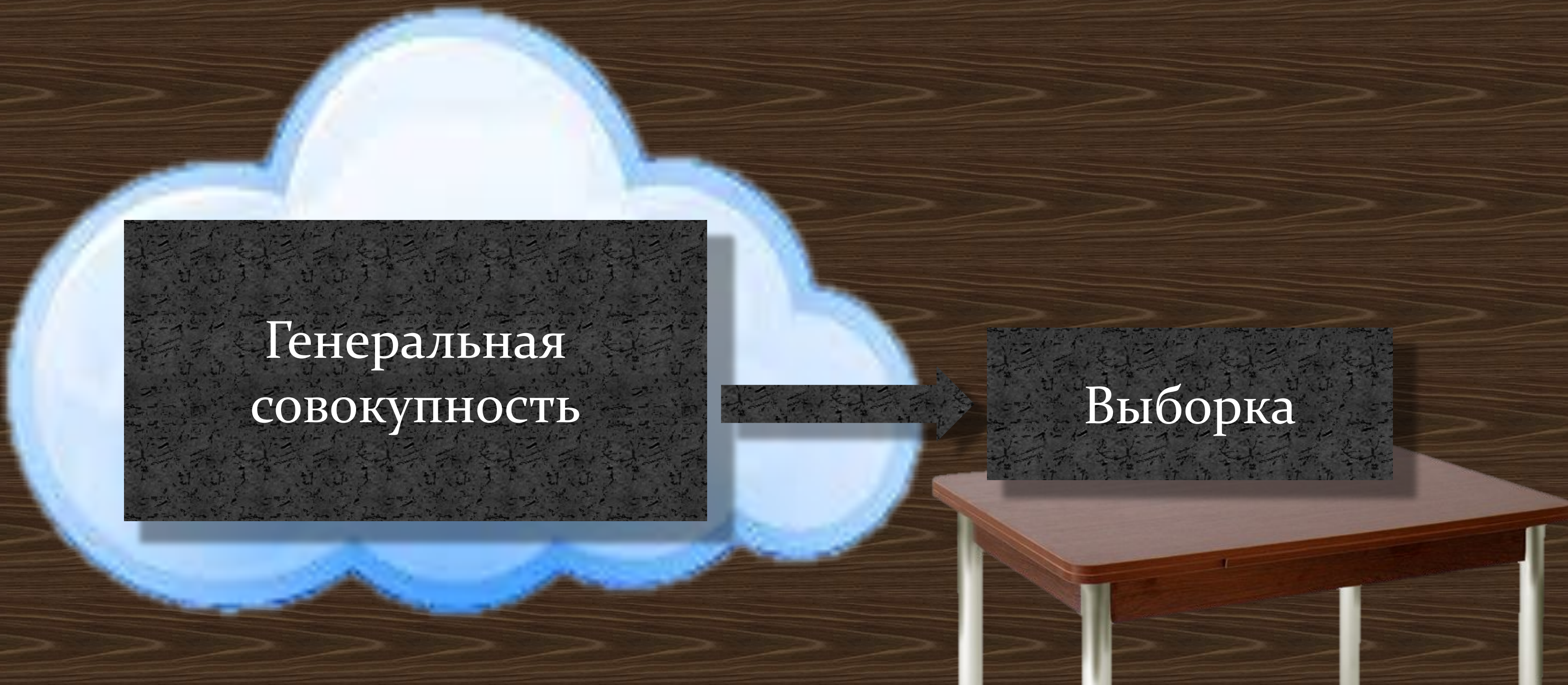
В метрологии – гипотетический объект, например, бесконечное множество всех возможных диаметров деталей (уже изготовленных и тех, которые только будут изготавливаться).

Результаты измерений = выборка из ГС.

Большинство моделей метрологии построены на предположении, что свойства ГС не изменяются в результате выборки. На практике (ГС содержит сравнительно мало элементов) это может быть не верным.

Определения (рабоче-крестьянские):

Результаты измерений представляют собой выборку. Задача – по выборке определить характеристики генеральной совокупности.



Характеристики непрерывного распределения:

- Математическое ожидание:

$$x_{cp} = M = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

- Дисперсия:

$$\mathrm{D} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M)^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

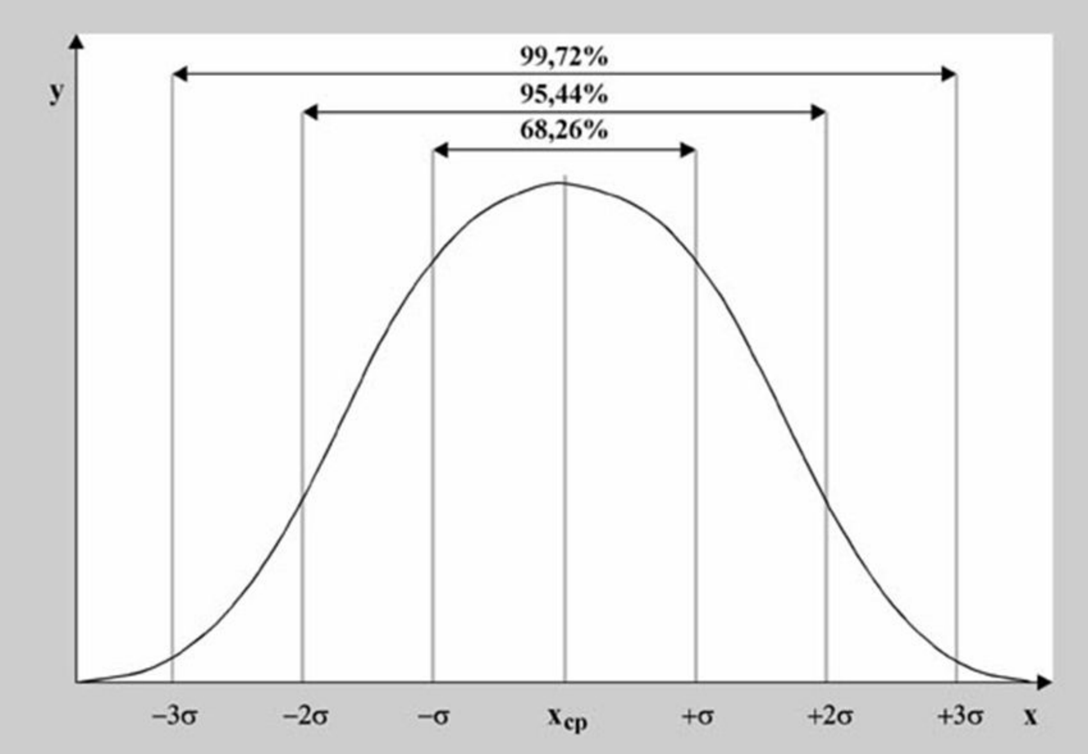
- Стандартное отклонение (математики) = среднеквадратичное отклонение (метрология)

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Нормальное распределение

- График имеет вид симметричного колокола, максимум при $\bar{x}$ ($x_{ср}$).

Ширина графика определяется параметром среднеквадратического отклонения СКО (дисперсии) σ (S).



Модель погрешности измерений:

Простейшая модель:

результат измерения = истинное значение измеряемой величины + случайная величина с M=0 и нормальным распределением.

(систематические погрешности = 0).

Следствие: найдём среднее значение результатов измерений – получим истинное значение величины.

На практике всё сложнее:

- мы можем не знать часть параметров ГС;
- мы можем не знать все параметры ГС;
- мы можем не знать вид распределения ГС.

Наша задача – установить это всё по выборке.

Параметрическое оценивание:

- нахождение параметров ГС по имеющейся выборке.

Точечная оценка – оценка одним числом.
Интервальная оценка – параметр оценивают двумя числами (границами интервала), внутри которого с известной вероятностью находится искомое значение.

Пример:

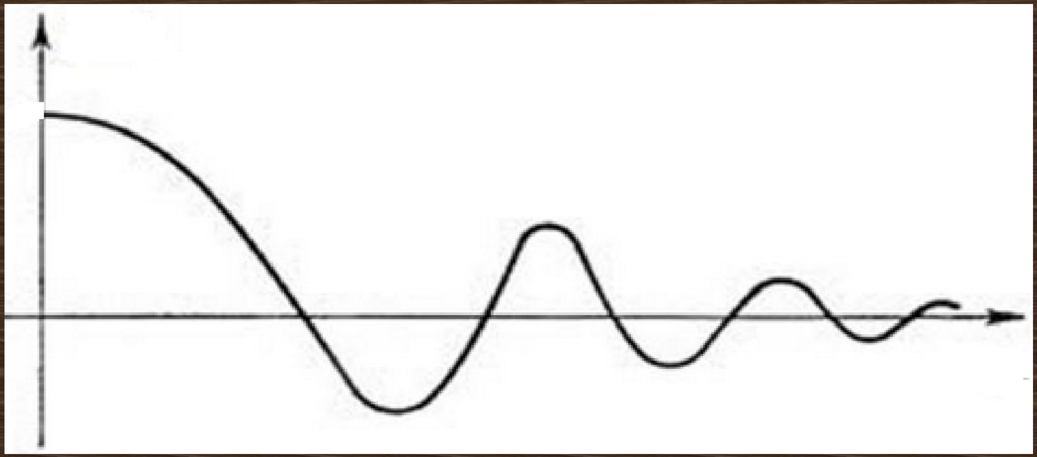
«средний рост жителей Новоуральска равен 174 см» – точечная оценка.

«средний рост жителей Новоуральска с вероятностью 95% находится в интервале от 170 см до 180 см» – интервальная оценка.

Параметрическое оценивание:

Характеристики точечных оценок:

- Состоятельность. Способ (алгоритм) оценивания является состоятельным, если с увеличением объёма выборки оценка асимптотически приближается к истинному значению.
- Несмещённость оценки. Математическое ожидание оценки должно быть равно математическому ожиданию истинного значения.
- Эффективность метода оценивания. Дисперсия оценки минимальна, т.е. график приближается к истинному значению быстрее всего.



по горизонтали – объем выборки, по вертикали – значение параметра, истинное значение равно 0.

Точечное оценивание

1. Нужно обработать выборку из n результатов $(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

2. Определяем среднее значение выборки:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

3. Вычислим СКО выборки:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{(n-1)}}$$

Нормальное распределение

Центральная предельная теорема

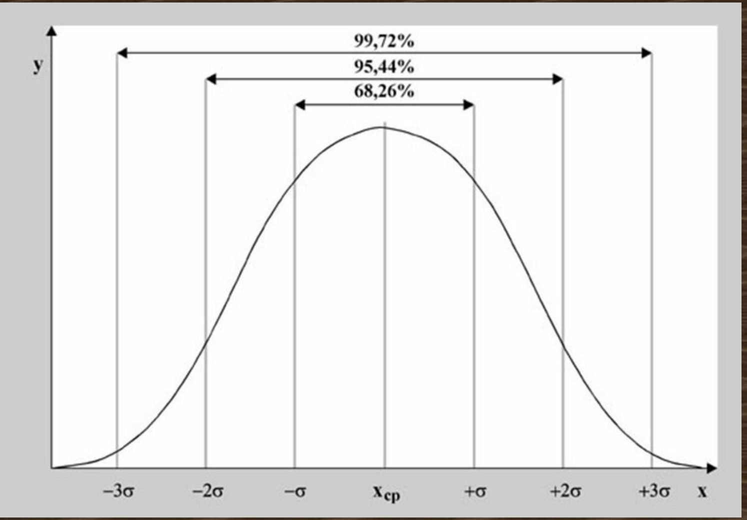
теорема Ляпунова

Случайные величины, являющиеся результатами измерений, могут часто рассматриваться как суммы большого числа независимых между собой слагаемых (влияние отдельных, трудно учитываемых факторов – **влияющих величин**), каждое из которых имеет малое численное значение по сравнению со всей суммой (**нет доминирующих влияний!**).

Гауссово (нормальное) распределение

Случайные погрешности обычно подчиняются нормальному распределению

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = N(\mu, \sigma)$$



Подчиняются ли результаты измерений нормальному закону распределения - в каждом опыте нужно решать отдельно

Часто исследователи приписывают «нормальность» распределению, чтобы использовать более простые формулы

Равномерное (прямоугольное) распределение

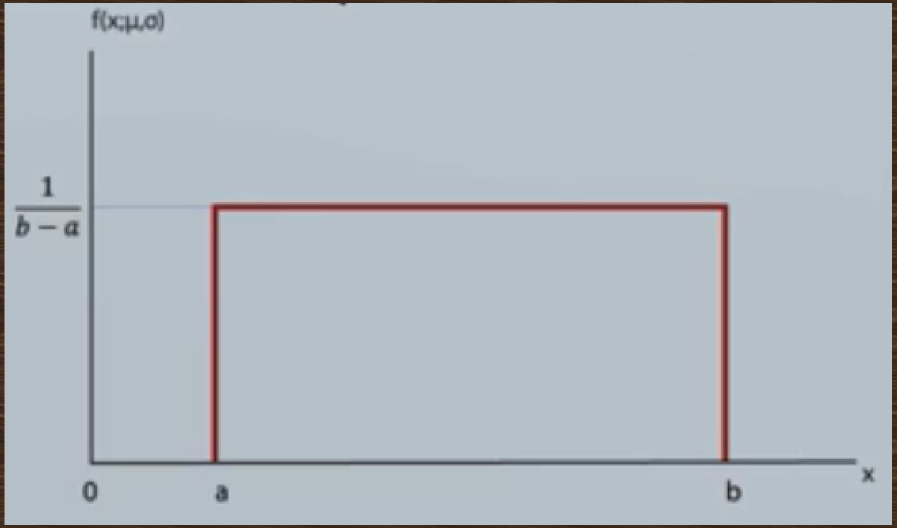
Математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

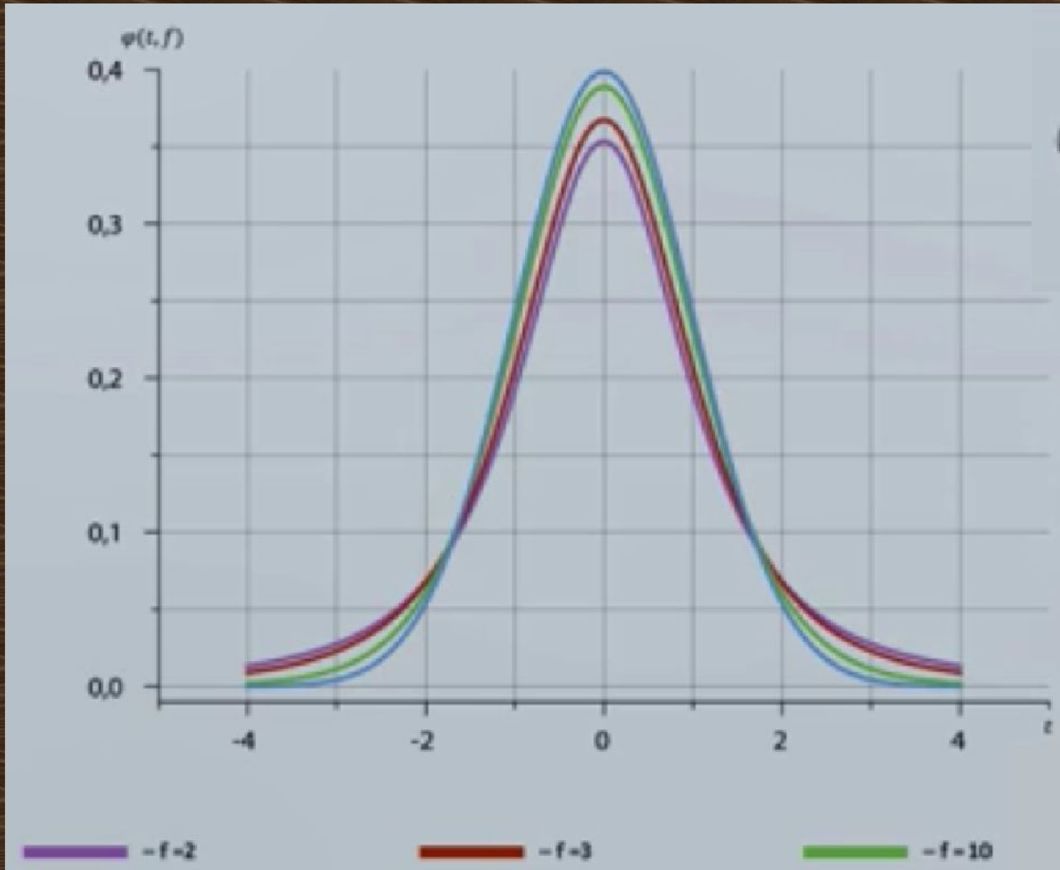
Дисперсия

$$M(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x \le a, x \ge b \end{cases}$$



t-распределение (Стьюдента)



$$\varphi(t,f) = \frac{\Gamma\frac{f+1}{2}}{\sqrt{\pi f}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{f}\right)^{\frac{f+1}{2}}}$$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \exp(-x)dx$$

$s > 0$

Используют для вычисления доверительных границ при интервальном оценивании с малым числом измерений

Доверительные интервалы погрешности

<u>Вариант 1</u>: ГС имеет нормальное распределение, известно его СКО.

Оценить результат n многократных измерений и определить доверительные интервалы погрешности.

Например: серийное производство, действительное значение СКО ГС используется для наладки процессов.

<u>Вариант 2</u>: ГС имеет нормальное распределение, неизвестны его МО и СКО. Чаще всего встречается в практике.

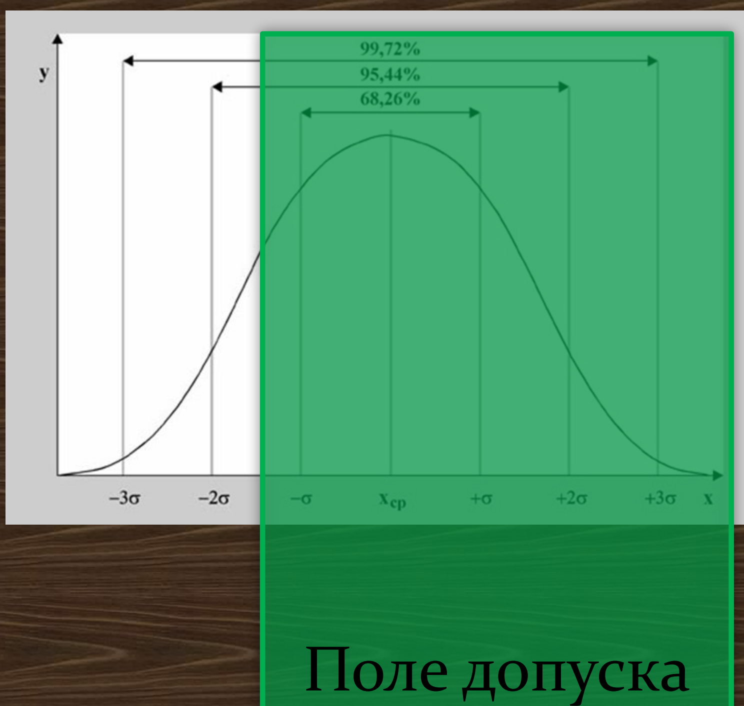
Например: определяем характеристики партии закупленных комплектующих, статистика производителя отсутствует.

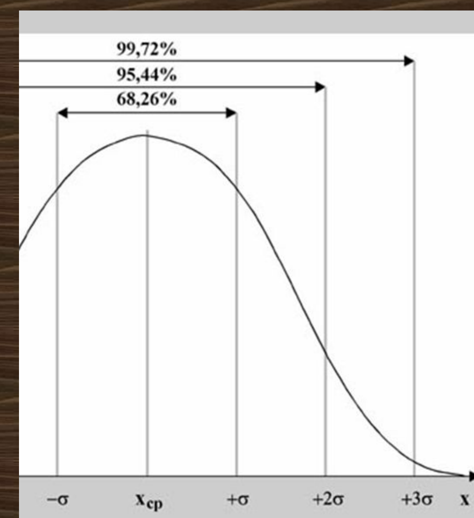
Если ГС имеет нормальное распределение, то такая задача решается до конца, поэтому часто не задумываясь считают распределение ГС нормальным. Это не всегда так!

Доверительные интервалы погрешности

Вариант 3: вид распределения ГС не известен, его МО и СКО не известны, но они существуют.

Пример: производитель осуществляет сплошной контроль с отбраковкой:





Доверительные интервалы погрешности

- <u>МО и СКО выборки и ГС могут различаться!</u>

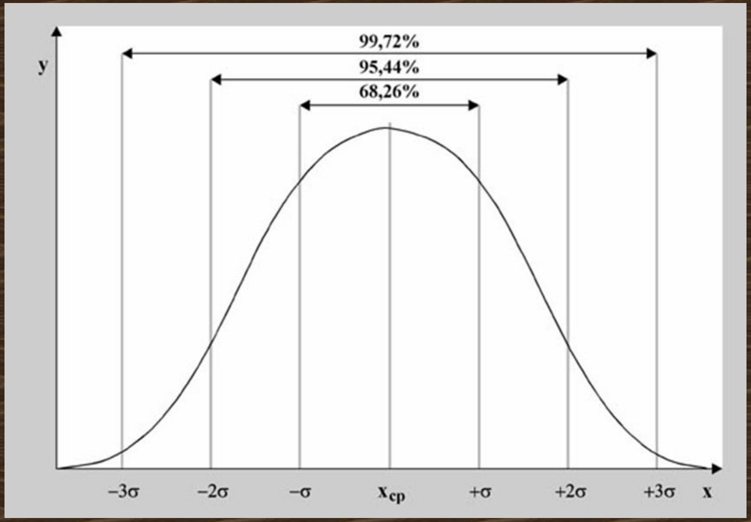
Пусть нам известны МО и СКО ГС, а также у нас есть выборка.

Рассчитаем МО и СКО выборки (как показано выше).

Отклонение МО выборки от МО ГС, и отклонение СКО выборки от СКО ГС также подчиняется нормальному закону распределения.

Дисперсия СКО:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Доверительные интервалы погрешности

- Все три варианта отличаются только методом, по которому рассчитывают доверительный интервал.

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
Функция Лапласа	Критерий Стьюдента	Неравенство Чебышева
для 95% вероятности 1,96	для 95% вероятности 4,3 (3 измерения) 2,26 (10 измерений)	для 95% вероятности 4,472

Результат измерения:

$$x = \bar{x} \pm \beta \cdot \sigma,\ \text{P=xx\%}$$

Обработка многократных измерений

ГОСТ Р 8.736-2011. ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения

Дано: результаты измерений (выборка) $x_i = x_1, x_2 \ldots x_n$

Последовательность действий:

- исключить известные систематические погрешности;
- вычислить оценку измеряемой величины и среднее квадратическое отклонение результатов измерений;
- проверить на отсутствие грубых погрешностей (при необходимости исключить их);
- проверить гипотезу о принадлежности результатов измерений нормальному распределению;
- вычислить доверительные границы случайной погрешности оценки измеряемой величины;
- вычислить доверительные границы неисключенной систематической погрешности оценки измеряемой величины;
- вычислить доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины.

Обработка многократных измерений

Среднее арифметическое исправленных результатов:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

СКО результатов измерений

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Дальнейшие расчёты носят вероятностный характер. Обычно принимаем q=5% (все результаты верны с вероятностью 95%), в ответственных случаях (здоровье людей) допускается q=1% и ниже.

Исключение грубых погрешностей

Критерий Граббса

$$G_1 = \frac{|x_{max} - \bar{x}|}{S} \qquad G_2 = \frac{|\bar{x} - x_{min}|}{S}$$

n	Критические значения $G_т$	
	Свыше 1%	Свыше 5%
3	1,155	1,155
4	1,496	1,481
5	1,764	1,715
6	1,973	1,887
7	2,139	2,020
8	2,274	2,126
9	2,387	2,215
10	2,482	2,290
11	2,564	2,355
12	2,636	2,412
13	2,699	2,462
14	2,755	2,507
15	2,806	2,549
20	3,001	2,709
25	3,135	2,822
30	3,236	2,908
40	3,381	3,036

Обработка многократных измерений

Проверяем, что результаты измерений подчиняются нормальному распределению:

- при n больше 50 – критерий Пирсона или Мизеса-Смирнова
- при n больше 15 – составной критерий (см. ниже). Результаты считаются распределёнными по нормальному закону, если выполняются обе части составного критерия.;
- при n = 15 и меньше – проверить невозможно, принадлежность нормальному распределению должна быть обоснована (обеспечена) методикой измерений.

Проверка выборки на нормальность

Критерий 1. Результаты измерений распределены по нормальному закону, если:

$$d_{1-q/2} < \tilde{d} \le d_{q/2}$$

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{nS^*}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

n	$q_1/2$ 100 %		$(1 - q_1/2)$ 100 %	
	1 %	5 %	95 %	99 %
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Проверка выборки на нормальность

Критерий 2. Результаты измерений распределены по нормальному закону, если не больше m разностей $(x_i - \bar{x})$ превзошли произведение $z_{P/2} \cdot S$

P	$z_{P/2}$
0,96	2,06
0,97	2,17
0,98	2,33
0,99	2,58

n	m	$q_2 \cdot 100\%$		
		1%	2%	5%
10	1	0,98	0,98	0,96
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,98
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

Доверительные границы случайной погрешности

находят в виде $\varepsilon = tS_{\overline{X}}$ $S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

=СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х (1-P;n-1)

$n-1$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$
3	3,182	5,841
4	2,776	4,604
5	2,571	4,032
6	2,447	3,707
7	2,365	3,499
8	2,306	3,355
9	2,262	3,250
10	2,228	3,169
12	2,179	3,055
14	2,145	2,977

$n-1$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$
16	2,120	2,921
18	2,101	2,878
20	2,086	2,845
22	2,074	2,819
24	2,064	2,797
26	2,056	2,779
28	2,048	2,763
30	2,043	2,750
∞	1,960	2,576

*Если распределение результатов измерений не является нормальным – этот и дальнейшие расчёты делать нельзя, действуем по методике измерений.

Доверит. границы систематической погрешности

Неисключённая систематическая погрешность (НСП) образуется из составляющих НСП:

- метода;
- средства измерений;
- других источников.

1. При хорошем методе измерений НСП Θ_Σ = пределам допускаемых основных (дополнительных) погрешностей средств измерений.

2. Если НСП имеет две составляющие, то $\Theta_\Sigma = \pm\sum_{i=1}^{m}|\Theta_i|$

3. Если НСП состоит из трёх и более составляющих – см. ГОСТ р 8.376, п. 8.3 и 8.4.

Доверительные границы погрешности оценки

Доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины:

$$\Delta = KS_{\Sigma} \qquad S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\Theta}^2 + S_{\bar{x}}^2}$$

В случаях (1) и (2) – см. предыдущий слайд $S_{\Theta} = \frac{\Theta_{\Sigma}}{\sqrt{3}}$,

иначе – см. ГОСТ р 8.376, формула (15).

$$K = \frac{\varepsilon + \Theta_{\Sigma}}{S_{\bar{x}} + S_{\Theta}}$$

Итоговый результат

- записываем в форме:

$$\bar{x} \pm \Delta, P$$

- Числовое значение оценки измеряемой величины должно оканчиваться цифрой того разряда, что и значение погрешности Δ.
- Погрешность оценки измеряемой величины Δ следует выражать не более чем двумя значащими цифрами.
- Две значащие цифры в погрешности оценки измеряемой величины сохраняют:

  - при точных измерениях;

  - если первая значащая цифра не более трёх.
- Число цифр в промежуточных вычислениях при обработке результатов измерений должно быть на две больше, чем в окончательном результате.
- Погрешность при промежуточных вычислениях должна быть выражена не более чем тремя значащими цифрами.
- Сохраняемую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины при округлении увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра неуказываемого младшего разряда больше либо равна пяти, и не изменяют, если она меньше пяти.

Пример:

Результаты измерения диаметра вала (30 значений)

8.736 измерения пример.xlsx

Измерения проведены микрометром, погрешность средства измерения = 0,01 мм.

Ожидаю погрешности во втором десятичном знаке, записываю промежуточные данные с четыремя десятичными знаками.

1) среднее арифметическое =СРЗНАЧ(A1:A30)

=20,0057

2) СКО =СТАНДОТКЛОН.В(A1:A30)

=0,2027

Пример:

3) найдём максимальное и минимальное измеренные значения =МАКС(A1:A30) =МИН(A1:A30)

=20,81   =19,62

4) Вычислим критерии Граббса:

$G1=3{,}9681$ $G2=1{,}9026$

5) Для $n=30$ и 95% вероятности допустимо $G=2{,}908$, поэтому максимальное значение x нужно удалить. После этого пересчитываем всё сначала:

1*) среднее арифметическое =19,9779

2*) СКО =0,1366

3*) $x_{МАКС}=20{,}24$ $x_{МИН}=19{,}62$

4*) $G1=1{,}9189$ $G2=2{,}6208$

5*) Для $n=29$ и 95% вероятности допустимо $G=2{,}893$ – всё ок

Пример:

- 7) n=29 – используем составной критерий

7.1) S* = СТАНДОТКЛОН.Г(A1:A30)

=0,1342

посчитаем d(с волной). В отдельном столбике вычислим $|x_i - \bar{x}|$, сотрём формулу в той строке, где нет значения x.

=0,7425

для уточнения квантилей (n=29 в таблице нет) можно воспользоваться функцией =ПРЕДСКАЗ

Критерий выполняется!

Пример:

- 7.2) q2=0,98, $Z_{P/2} = 2{,}33$

=0,3182

для подсчёта $|x_i - \bar{x}| > Z_{P/2}$ можно использовать функцию =СЧЁТЕСЛИ(G1:G30;">"&E21)

=1

Поскольку предельное значение m=2, критерий выполняется!

Оба критерия выполняются, распределение результатов измерений подчиняется нормальному закону.

Пример:

- 8) Критерий Стьюдента для n=29 $t_{0,95}$=2,048 доверительные границы случайной погрешности =0,0519

9) НСП Θ_Σ = 0,01

10) S_Θ =0,0058

11) К =1,9895

12) S_Σ =0,0260

13) Δ =0,0517

14) округления: Δ =0,05

15) итог: 19,98±0,05