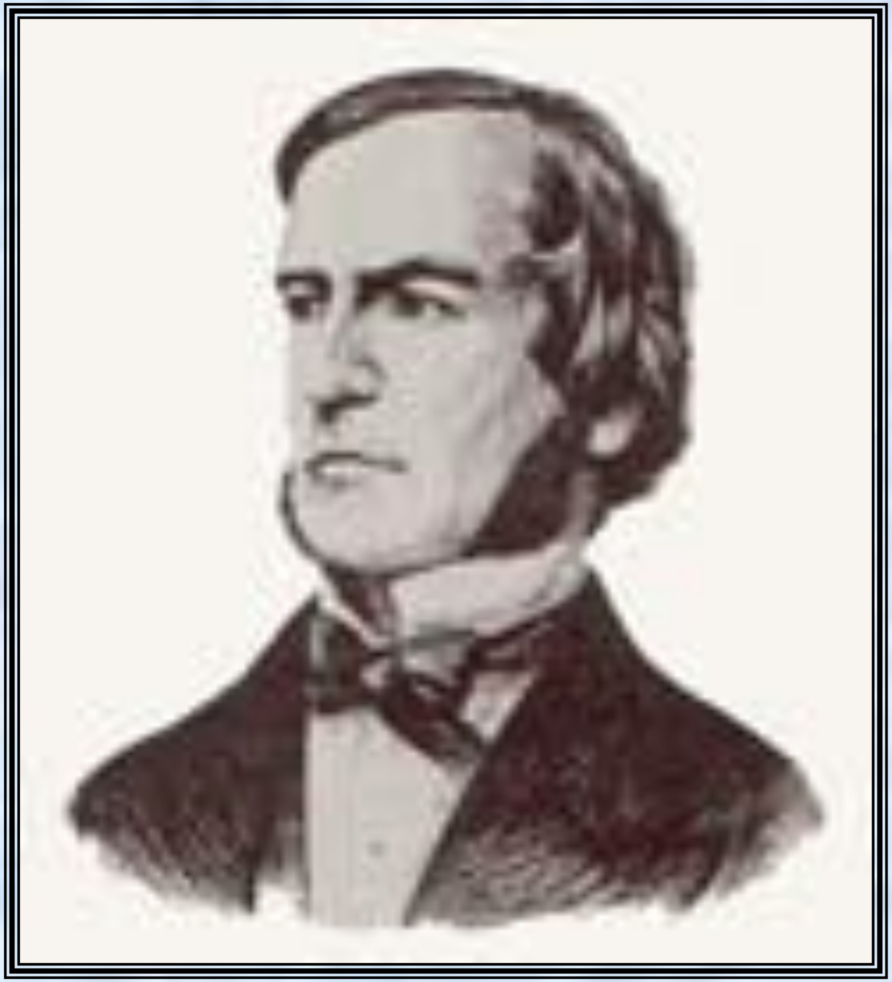
ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Евглевская Елена Сергеевна

Алгебра логики ***(булева алгебра)*** - это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.



Джордж Буль

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение "*Трава зеленая*" следует считать высказыванием, так как оно истинное.

Предложение "*Лев - птица*" тоже высказывание, так как оно ложное.

Не всякое предложение является логическим высказыванием.

Высказываниями не являются, например, предложения "**ученик десятого класса**" и "**информатика** — **интересный предмет**".

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "**не**", "**и**", "**или**", "**если... , то**", "**тогда и только тогда**" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания.

Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются ***составными.***

Высказывания, не являющиеся составными, называются

элементарными.

Так, например, из элементарных высказываний "***Петров — врач***", "***Петров — шахматист***" при помощи связки "***и***" можно получить составное высказывание "***Петров — врач и шахматист***", понимаемое как "***Петров — врач, хорошо играющий в шахматы***".

При помощи связки "***или***" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "***Петров — врач или шахматист***", понимаемое в алгебре логики как "***Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно***".

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена.

Пусть через **А** обозначено высказывание ***"Тимур поедет летом на море"***, а через **В** — высказывание ***"Тимур летом отправится в горы"***.

Тогда составное высказывание ***"Тимур летом побывает и на море, и в горах"*** можно кратко записать как **А и В**. Здесь **"и"** — логическая связка, **А, В** — логические переменные, которые могут принимать только два значения - **"истина"** или **"ложь"**, обозначаемые, соответственно, **"1"** и **"0"**.

Операции над логическими высказываниями

НЕ

Операция, выражаемая словом "не", называется ***<u>инверсией</u>*** или ***отрицанием*** и обозначается чертой над высказыванием.

Высказывание $\overline{A}$ истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно.

Пример. "*Луна — спутник Земли*" (А); "*Луна — не спутник Земли*" ($\overline{A}$).

И

Операция, выражаемая связкой *"и"*, называется ***<u>конъюнкцией</u>*** (лат. conjunctio — соединение) или ***логическим умножением*** и обозначается точкой " · " (может также обозначаться знаками ∧ или **&**).

Высказывание А · В истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В истинны.

Например, высказывание *"10 делится на 2 и 5 больше 3"* истинно, а высказывания *"10 делится на 2 и 5 не больше 3"*, *"10 не делится на 2 и 5 больше 3"*, *"10 не делится на 2 и 5 не больше 3"* — ложны.

ИЛИ

Операция, выражаемая связкой *"или"* (в неисключающем смысле этого слова), называется ***<u>дизъюнкцией</u>*** (лат. disjunctio — разделение) или ***логическим сложением*** и обозначается знаком **v** (или **плюсом**).

Высказывание А v В ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В ложны.

Например, высказывание ***"10 не делится на 2 или 5 не больше 3"*** ложно, а высказывания ***"10 делится на 2 или 5 больше 3", "10 делится на 2 или 5 не больше 3", "10 не делится на 2 или 5 больше 3"*** — истинны.

ЕСЛИ-ТО

Операция, выражаемая связками *"если ..., то"*, *"из ... следует"*, *"... влечет ..."*, называется ***импликацией*** (лат. *implico* — тесно связаны) и обозначается знаком . Высказывание **A** **B** ложно тогда и только тогда, когда **A** истинно, а **B** ложно.

РАВНОСИЛЬНО

Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "*... равносильно ...*", называется ***<u>эквиваленцией</u>*** или ***двойной импликацией*** и обозначается знаком $\leftrightarrow$ или ~. Высказывание **A** $\leftrightarrow$ **B** истинно тогда и только тогда, когда значения **A** и **B** совпадают.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить ***логической формулой.***

Определение ***логической формулы***:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") - формулы.

2. Если A и B - формулы, то $\overline{A}$, $A \cdot B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ - формулы.

3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

Логический элемент компьютера — это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.

Логическими элементами компьютеров являются электронные схемы И, ИЛИ, НЕ, И—НЕ, ИЛИ—НЕ и другие.

Каждый логический элемент имеет свое условное обозначение, которое выражает его логическую функцию, но не указывает на то, какая именно электронная схема в нем реализована. Это упрощает запись и понимание сложных логических схем.

Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

Схема И

Схема И реализует конъюнкцию двух или более логических значений.

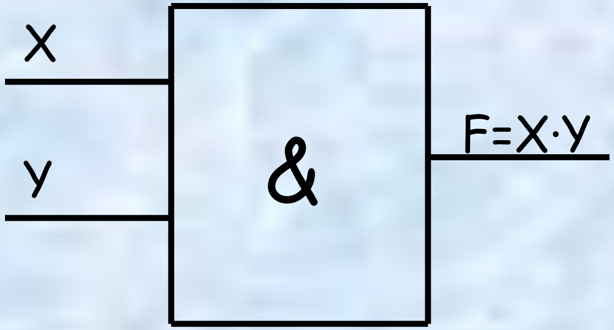


Таблица истинности схемы И

X	Y	X*Y
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Единица на выходе схемы И будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы. Когда хотя бы на одном входе будет ноль, на выходе также будет ноль.

С х е м а ИЛИ

Схема ИЛИ реализует дизъюнкцию двух или более логических значений.

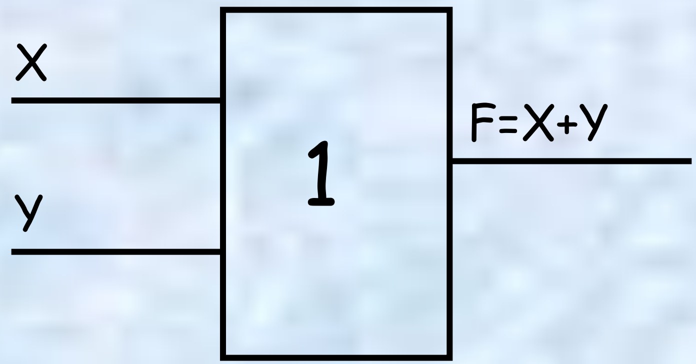


Таблица истинности схемы ИЛИ

x	y	x v y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Когда хотя бы на одном входе схемы ИЛИ будет единица, на её выходе также будет единица.

С х е м а НЕ

Схема **НЕ** (инвертор) реализует операцию отрицания. Связь между входом **x** этой схемы и выходом **F** можно записать соотношением $\mathbf{F = \overline{x}}$ где $\mathbf{\overline{x}}$ читается как **"не x"** или **"инверсия x"**.

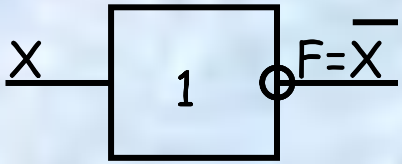


Таблица истинности схемы НЕ

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Если на входе схемы **0**, то на выходе **1**. Когда на входе **1**, на выходе **0**.

С х е м а И—НЕ

Схема **И—НЕ** состоит из элемента **И** и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы **И.** Связь между выходом **F** и входами **x** и **y** схемы записывают следующим образом:

$F=\overline{x \cdot y}$, где $\overline{x \cdot y}$ читается как **"инверсия x и y".**

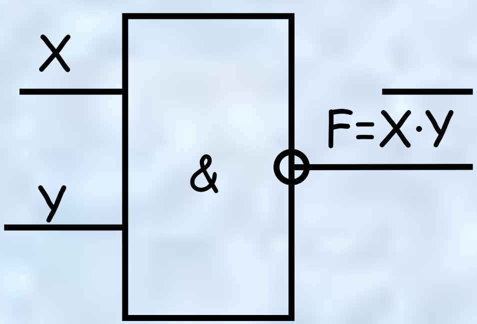


Таблица истинности схемы И—НЕ

x	y	$\overline{x*y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Схема ИЛИ—НЕ

Схема **ИЛИ—НЕ** состоит из элемента **ИЛИ** и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы **ИЛИ.** Связь между выходом **F** и входами **x** и **y** схемы записывают следующим образом: $F=\overline{x+y}$, где $\overline{x+y}$, читается как **"инверсия x или y ".**

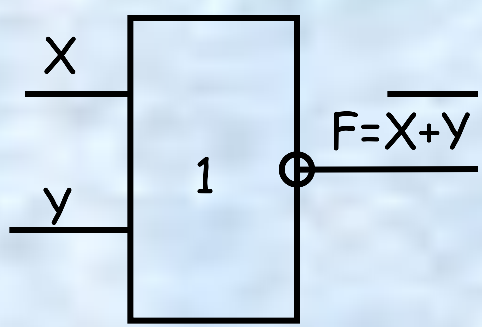
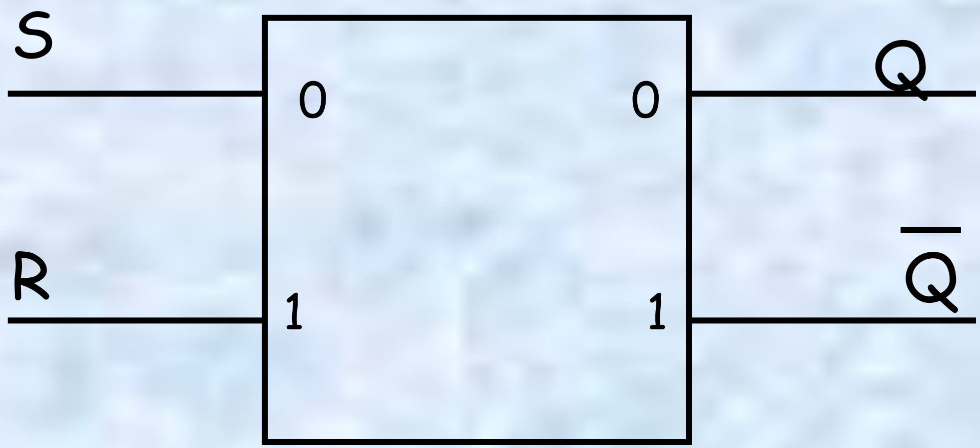


Таблица истинности схемы ИЛИ—НЕ

x	y	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Триггер — это электронная схема, широко применяемая в регистрах компьютера для надёжного запоминания одного разряда двоичного кода. Триггер имеет два устойчивых состояния, одно из которых соответствует двоичной единице, а другое — двоичному нулю.

Самый распространённый тип триггера — так называемый RS-триггер (S и R, соответственно, от английских *set* — установка, и *reset* — сброс).



Сумматор — это электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел.

Сумматор служит, прежде всего, центральным узлом арифметико-логического устройства компьютера, однако он находит применение также и в других устройствах машины.

Многоразрядный двоичный сумматор