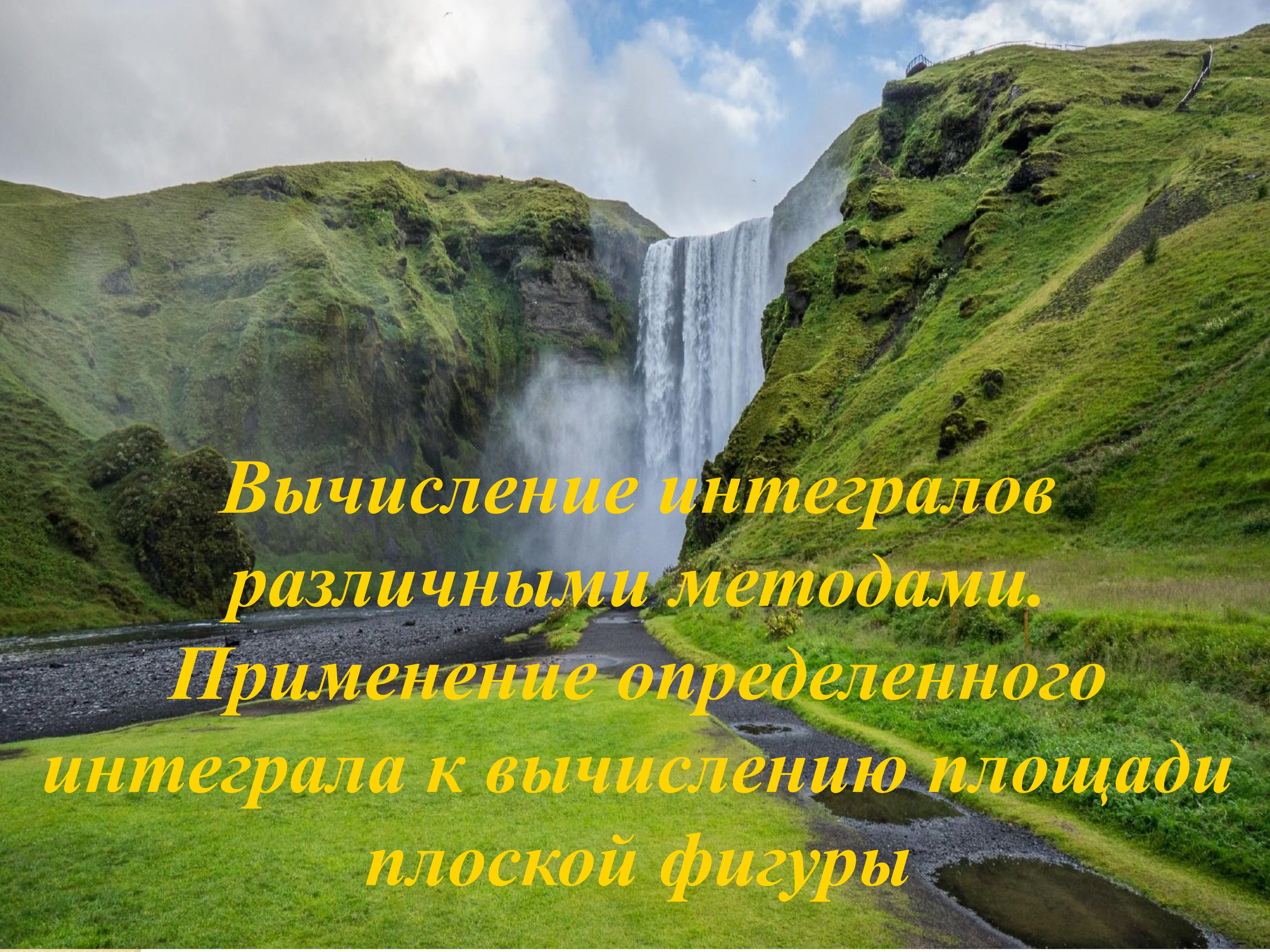


Вычисление интегралов различными методами. Применение определенного интеграла к вычислению площади плоской фигуры

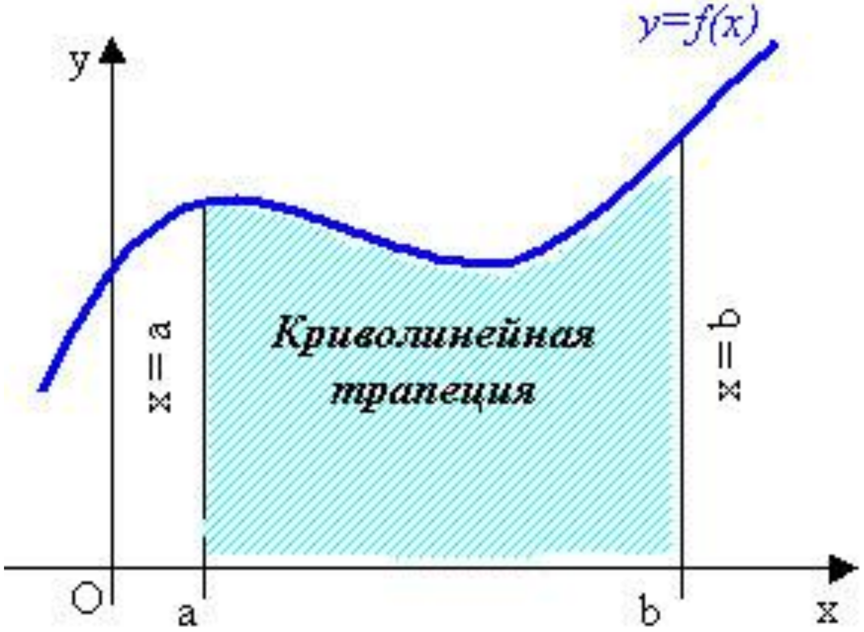
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ называется ***первообразной*** для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является производной для $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, т.е.

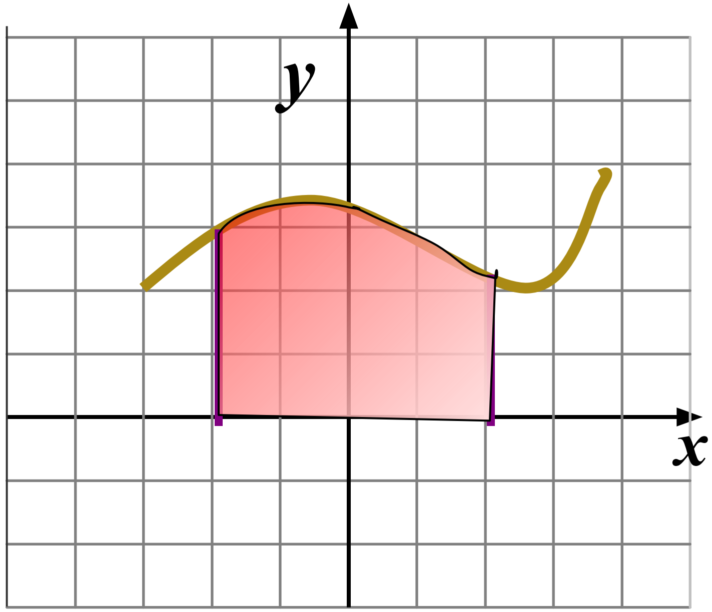
$$F'(x) = f(x)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

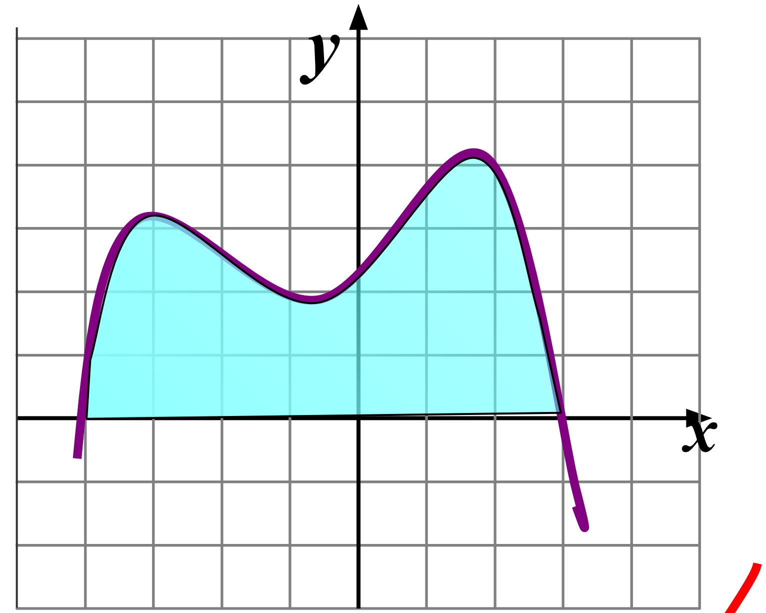
Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$ прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс, называется криволинейной трапецией, ABCD -это криволинейная трапеция.



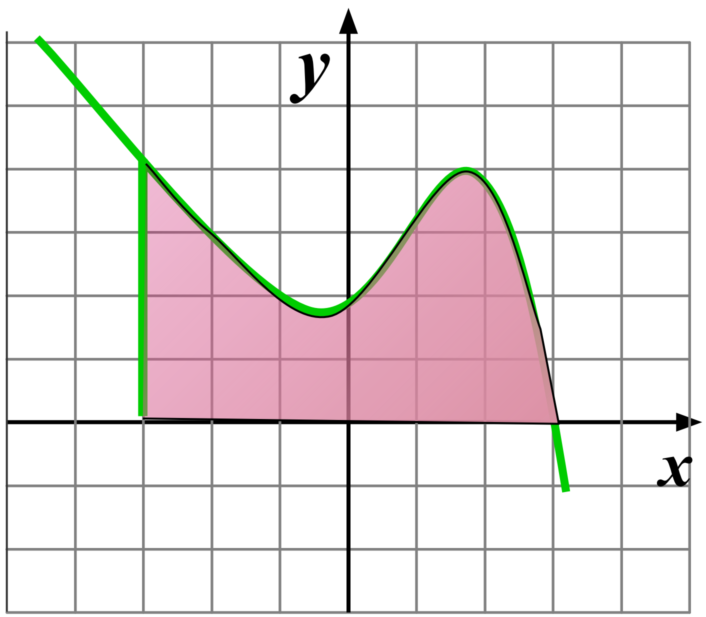
1.



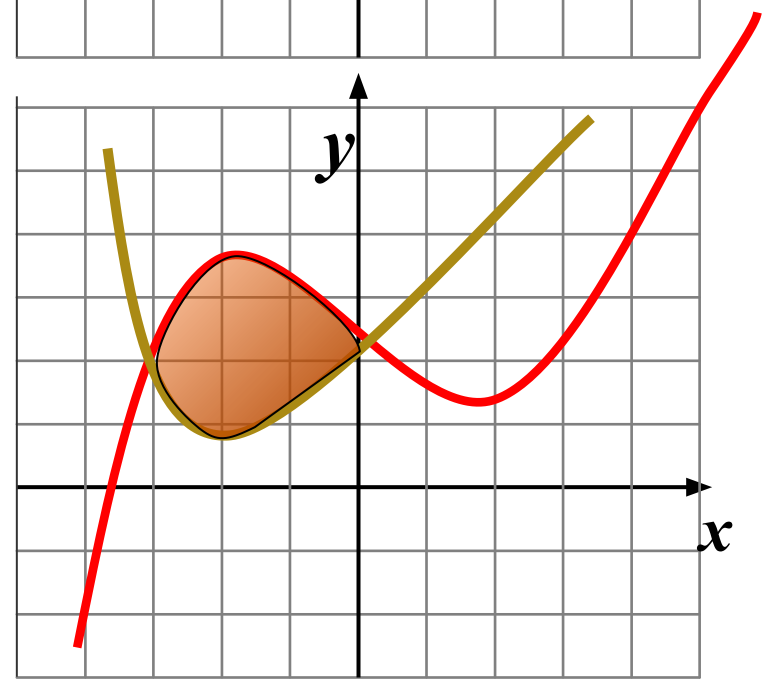
2.



3.



4.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ - это предел, к которому стремится интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$ **при** $n \to \infty$.

Обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Если f (x) на отрезке [a; b] неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади

криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), осью абсцисс и прямыми x = a, x = b, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Если f(x) – непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция , а F(x) – ее первообразная на этом отрезке , то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке [a; b] , т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

5. $\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$;

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C;$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C.$

Примеры:

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \frac{3x^{4/3}}{4}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}(8\sqrt[3]{8} - 0) = 12$$

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1)$$

$$\int_{-1}^3 (x^3 + 1)dx = \int_{-1}^3 x^3 dx + \int_{-1}^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^3 + x\Big|_{-1}^3 = (\frac{x^4}{4} + x)\Big|_{-1}^3 = (\frac{3^4}{4} + 3) - (\frac{1}{4} - 1) = (20\frac{1}{4} + 3) + \frac{3}{4} = 24$$

$$\int_0^{\pi} 2\sin x dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} = -(2\cos\pi - 2\cos 0) = 4$$

Пример

Вычислить $\int\limits_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$.

$$\int\limits_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx = \int\limits_0^3 e^{-\frac{1}{3}\cdot x}dx = -3e^{-\frac{1}{3}\cdot x}\Bigg|_0^3 = -3\left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 3} - e^{-\frac{1}{3}\cdot 0}\right) =$$

$$= -3\left(e^{-1} - 1\right) = -3\left(\frac{1}{e} - 1\right) = -3\,\frac{1-e}{e}$$


Интегрирование
методом
подстановки.

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Пример

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1,\ dx = 2tdt \\ x = 0,\ t = 1 \\ x = 3,\ t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt =$$

$$= \int_1^2 2\left(t^2 - 1\right)dt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = 2\left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{7}{3} - 1\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Интегрирование по частям

Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле).

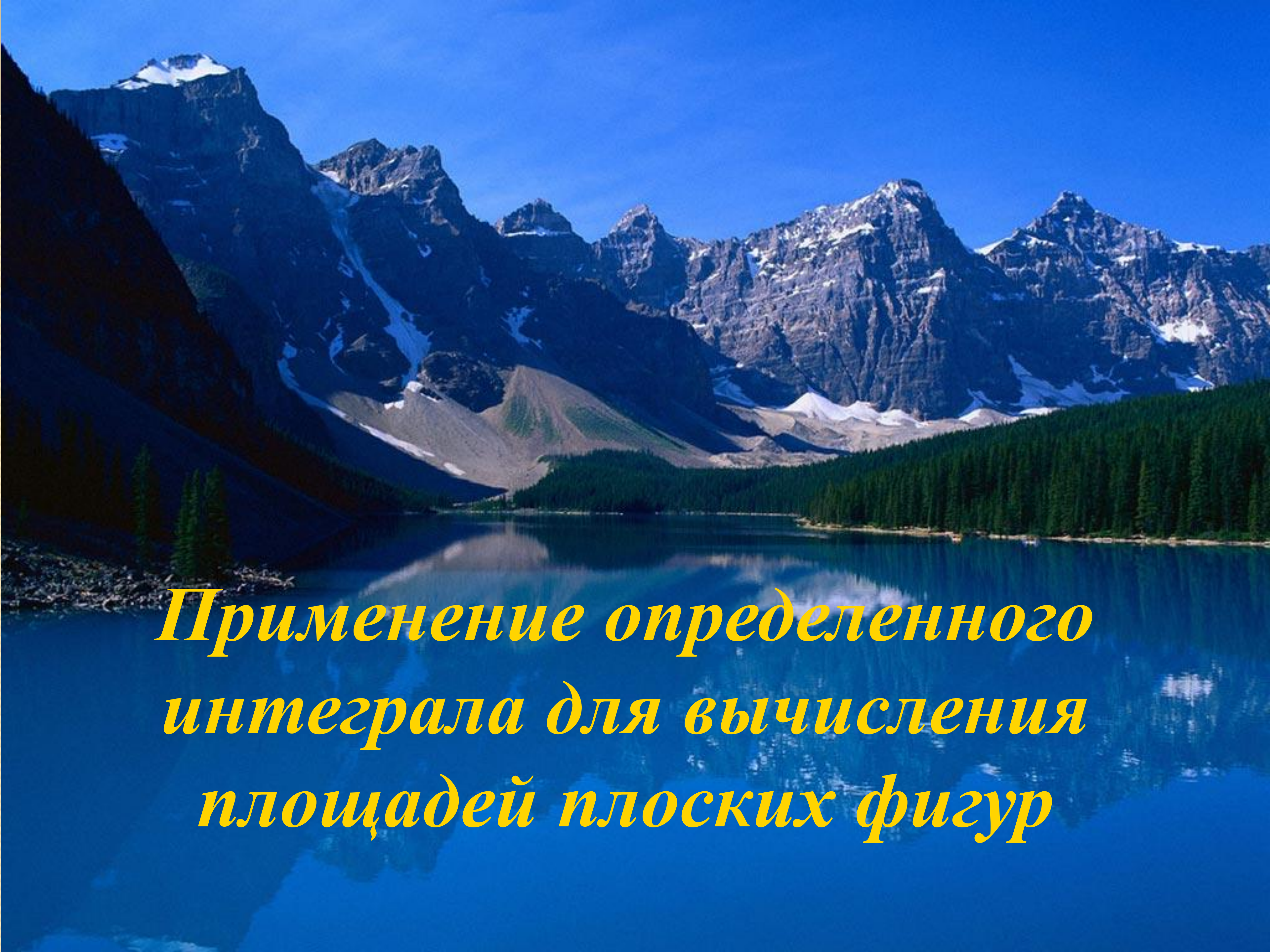
Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\ .$$

Пример

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} =$$

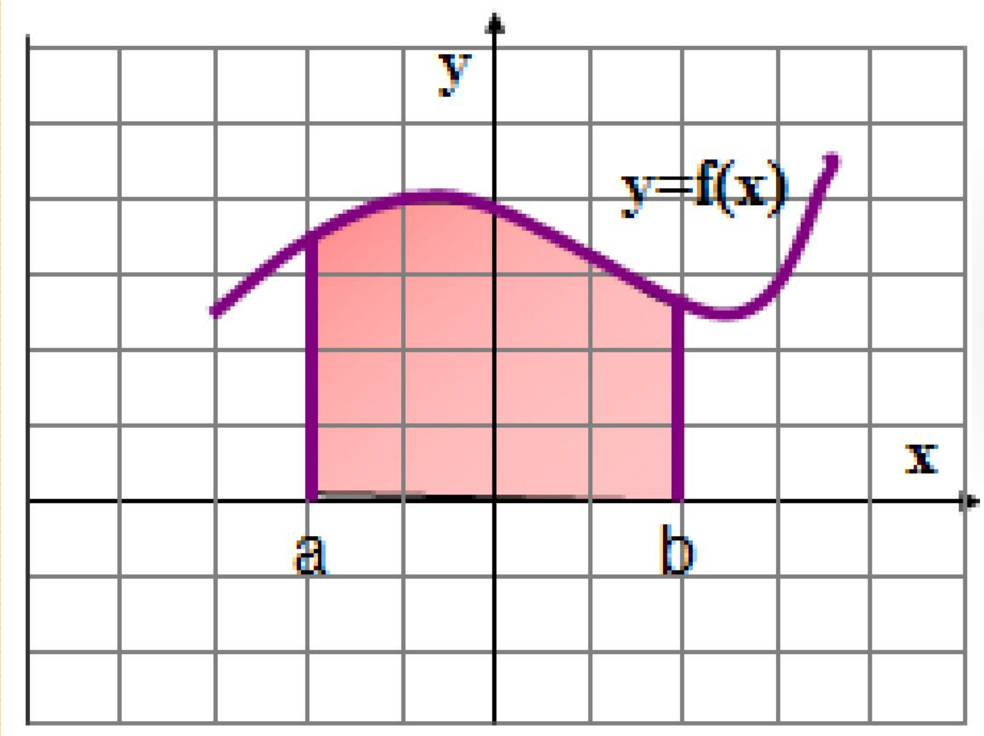
$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$



Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

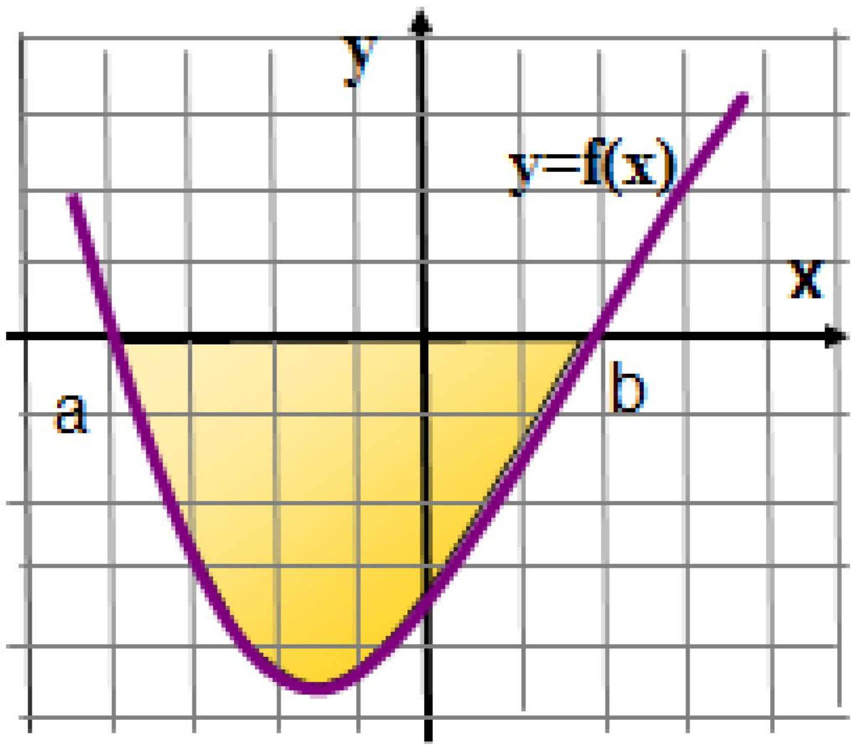
Случай I. **Фигура ограничена осью ОХ, прямыми x=a , x = b и графиком функции y = f(x), причем f(x)>0.**



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Случай II. Фигура ограничена осью OX, прямыми $x=a$, $x = b$ и графиком функции y = f(x), причем $f(x)<0$.

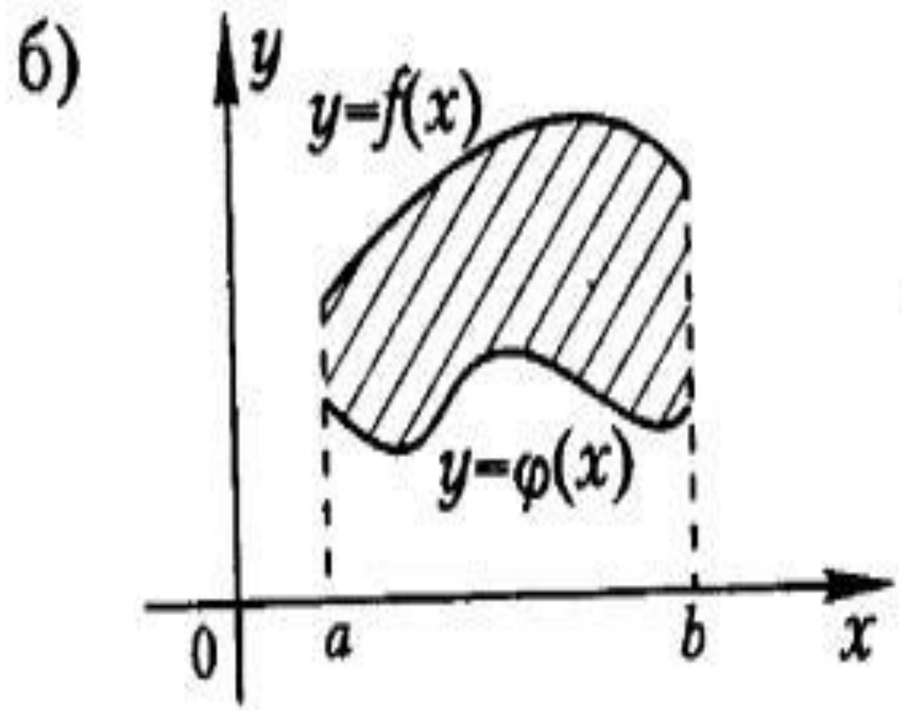


$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|, f(x) > 0$$

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

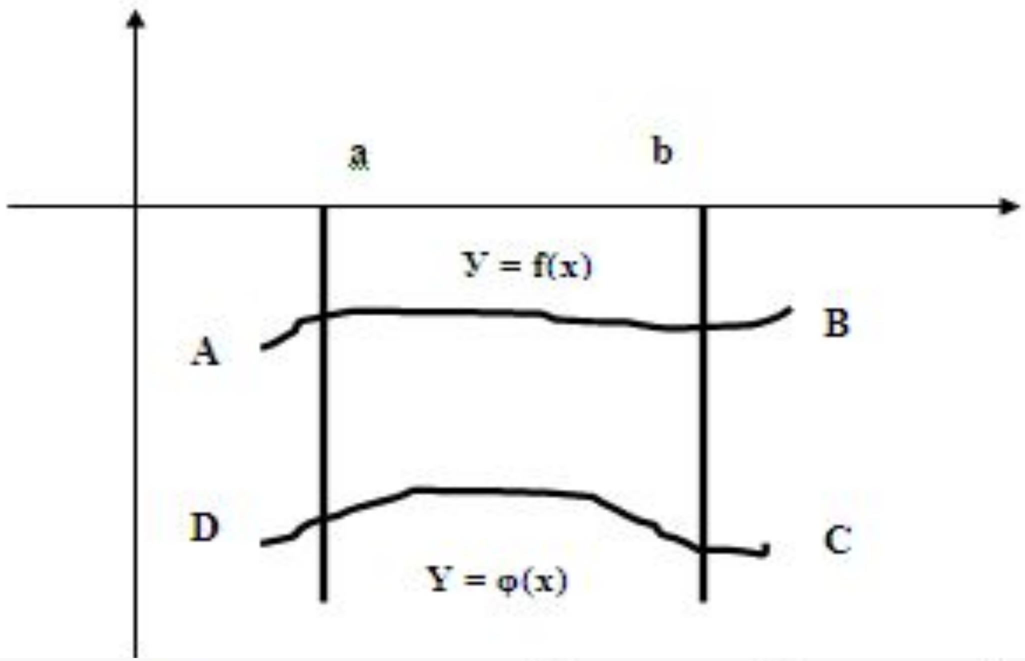
Случай III. **Фигура ограничена осью ОХ, прямыми x=a, x = b и графиками функций y = f(x) и y= φ(x), причем f(x)>0, φ(x)>0.**



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))\,dx\,;$$

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

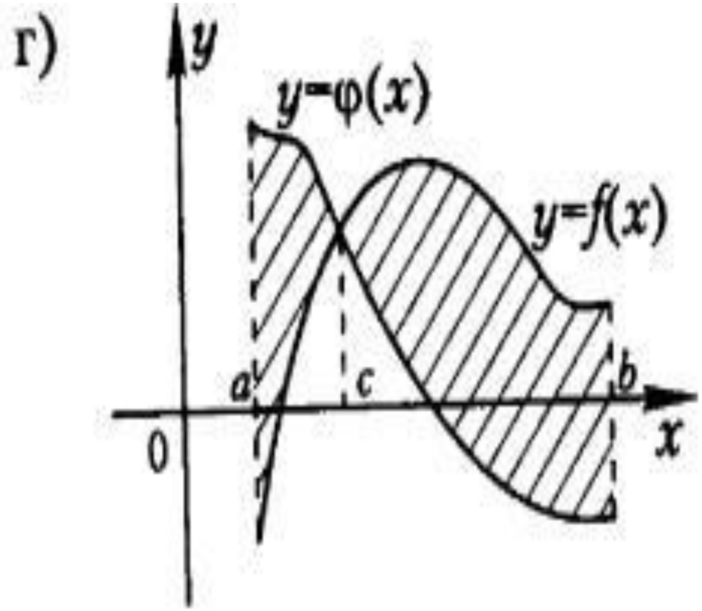
Случай IV. **Если $f(x) \le 0$, $\varphi(x) \le 0$, то графики функций расположены** ***ниже*** **оси абсцисс, а условие $f(x) \ge \varphi(x)$, означает, что график f(x) расположен выше графика $\varphi(x)>0$.**



$$S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = -\int_a^b \varphi(x)dx - \left(-\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$$

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

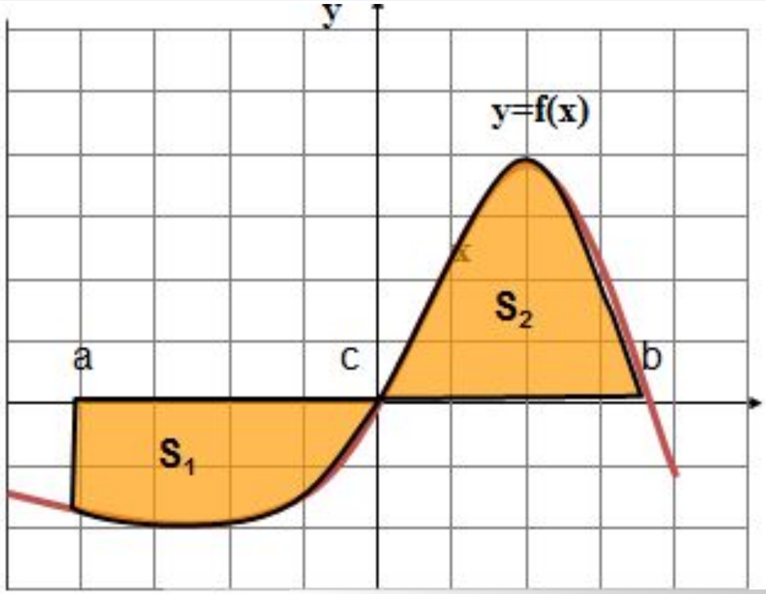
Случай V. Фигура ограничена осью OX, прямыми x=a, x = b, причем на интервале (a,c) φ(x)>0, а на интервале (c,d) φ(x)<0, тогда:



$$S=\int_a^c(\varphi(x)-f(x))dx+\int_c^b(f(x)-\varphi(x))dx;$$

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Случай VI. **Фигура ограничена осью ОХ, прямыми $x=a$, $x = b$, причем на интервале (а,с) $\varphi(x)<0$, а на интервале (c,b) $\varphi(x)>0$, тогда:**



$$S = S_1 + S_2$$

$$S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

АЛГОРИТМ решения задач на вычисление площадей :

1. Сделать чертеж графиков заданных функций, ограничивающих площадь плоских фигур.
2. Найти пределы интегрирования.
3. Выяснить какой формулой площади плоской фигуры удобно пользоваться в данном случае.
4. Вычислить площадь заданной фигуры.

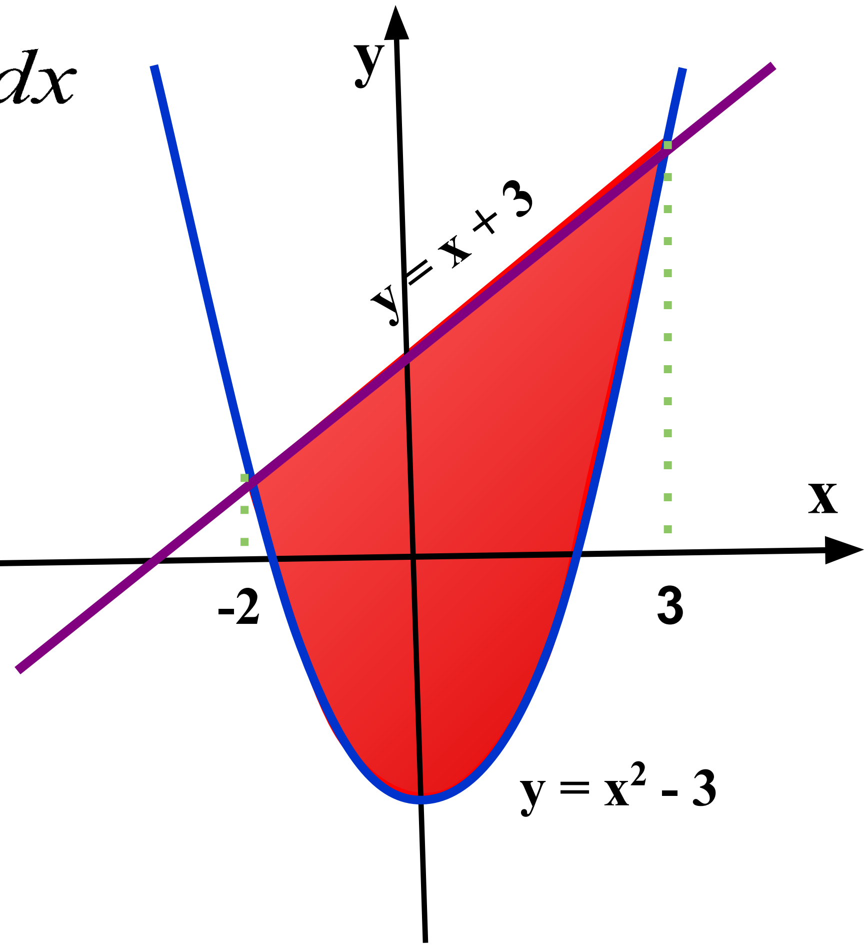
Пример. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x - 3$, $y = x^2 - 3$

$$S = \int_{-2}^{3} (x + 3 - (x^2 - 3))dx$$

$$S = \int_{-2}^{3} (x - x^2 + 6))dx$$

$$S = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 6x)\Big|_{-2}^{3}$$

$$S = 11\frac{5}{6}$$

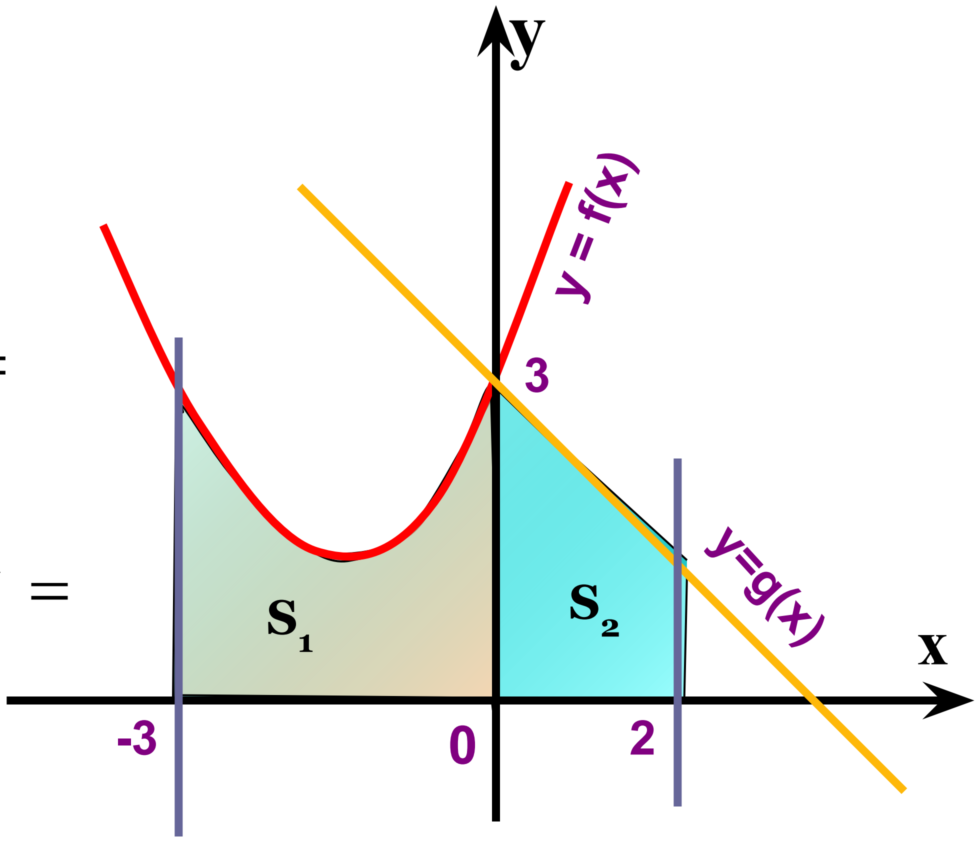


Пример. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $g(x) = 3 - x$, $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 3$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$

$S_ф = S_1 + S_2$

$$S_1 = \int_{-3}^{0} (0{,}5x^2 + 2x + 3)dx =$$

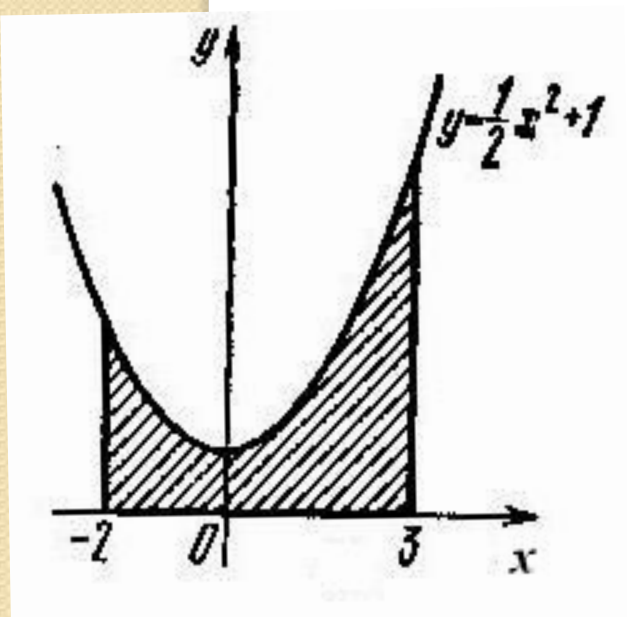
$$S_2 = \int_{0}^{2} (3 - x)dx = (3x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^2 =$$



$S_ф = 4{,}5$

<u>Пример.</u> **Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями** $y = 0{,}5x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 3$.

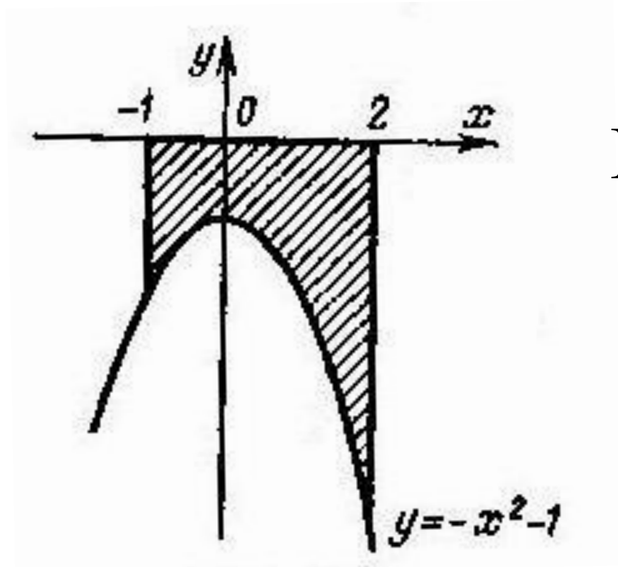
Применив формулу (1), найдем площадь криволинейной трапеции:



$$S = \int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx = \left(\frac{1}{6}x^3 + x\right)\Bigg|_{-2}^{3} =$$

$$= \left(\frac{1}{6}\cdot 3^3 + 3\right) - \left(\frac{1}{6}(-2)^3 - 2\right) = 10\frac{5}{6}(кв.ед)$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

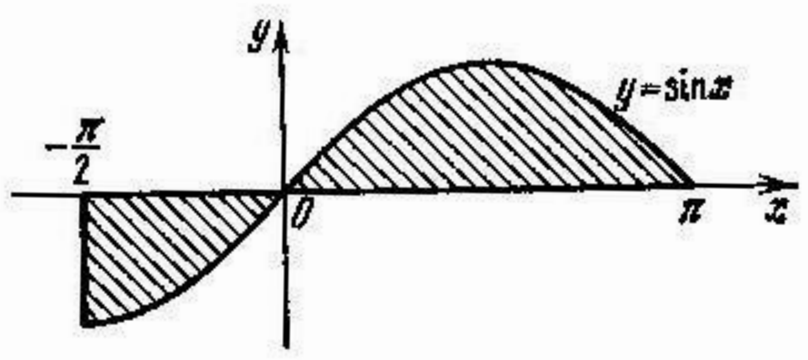


По формуле (2) находим

$$S = -\int_{-1}^{2}\left(-x^2 - 1\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(x^2 + 1\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - 1\right) = 6(кв.ед)$$

Пример . **Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями** $y = \sin x$**,** $y = 0$**,** $x = -\pi/2$**,** $x = \pi$ **.**



Очевидно, что $\sin x \le 0$ для всех $x \in [-\pi/2; 0]$ и $\sin x \ge 0$ для всех $x \in [0; \pi]$.

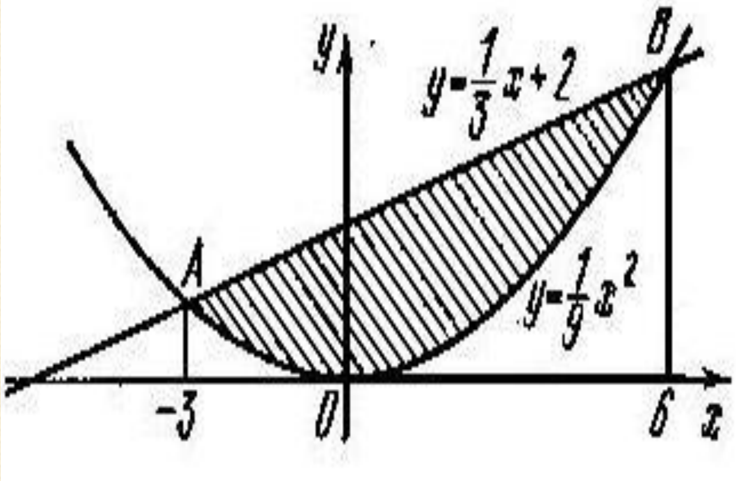
Поэтому

$$S = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \cos x \Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \left(\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - (\cos\pi - \cos 0) = (1-0) - (-1-1) = 3(\text{кв.ед})$$

Пример . Вычислить площадь фигуры,ограниченной линиями $y=\frac{1}{3}x+2 \quad и \quad y=\frac{1}{9}x^2.$

Пределы интегрирования *a* и *b* находим из системы уравнений:



$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+2, \\ y=\frac{1}{9}x^2. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{1}{3}x+2=\frac{1}{9}x^2$, т. е. x^2 - $3x$ - $18 = 0$, откуда x = - 3 и x = 6. Следовательно, a = - 3 и b = 6 . Так как на отрезке [- 3; 6] для $f(x)=\frac{1}{3}x+2,\ g(x)=\frac{1}{9}x^2.$

имеем $f(x) \geq g(x)$, то по формуле (3) находим

$$S=\int_{-3}^{6}\left(\left(\frac{1}{3}x+2\right)-\frac{1}{9}x^2\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^2+2x-\frac{1}{27}x^3\right)\Bigg|_{-3}^{6}=$$

$$=\left(\frac{1}{6}\cdot 6^2+2\cdot 6-\frac{1}{27}\cdot 6^3\right)-\left(\frac{1}{6}\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)-\frac{1}{27}\cdot(-3)^3\right)=13{,}5(кв.ед)$$

Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями (работа в группах)

1) $y = x^2 + 1$, $y = 5$
2) $y = x^2$, $y = 2x$
3) $y = -x^2 + 4x – 4$ и осями координат
4) $y = x$, $y = x – 6$, $y = 0$
5) * $y = x$, $y = (x + 2)3$, $y = 1$, $y = 0$

ОТВЕТ

РЕШЕНИЯ

4) y = √x, y = (x+2)³, y = 1, y = 0

$$S_{ф} = S_{ABC} + S_{CBDO} + S_{ODE}$$

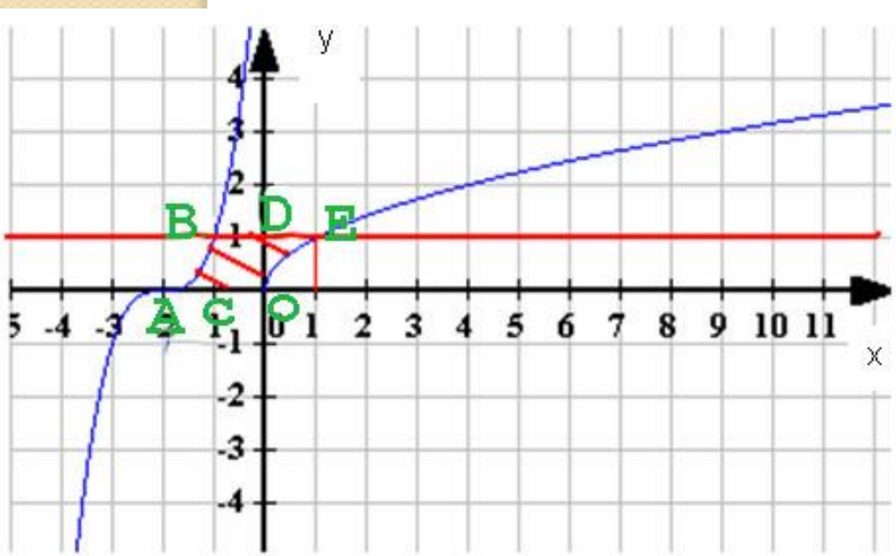
$$S_{ABC} = \int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,dx = \left.\frac{(x+2)^4}{4}\right|^{-1} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$S_{CBD} = CO \times OD = 1$$

$$S_{ODE} = \int_{0}^{1} 1dx - \int_{0}^{1} \sqrt{x}dx = x \quad - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \quad =$$

$$= (1-0) - \frac{2}{3}(1-0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$S_{ф} = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{7}{12}$$



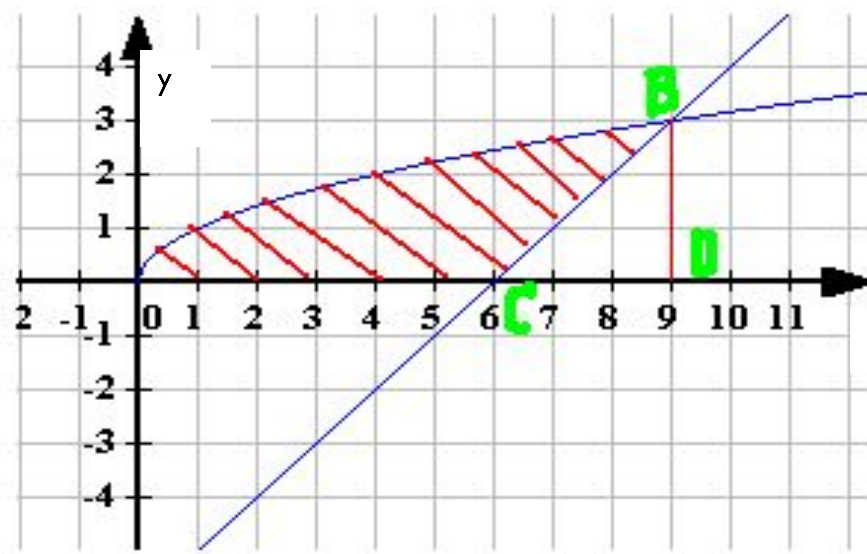
5) y = √x, y = x-6, y = 0

$$S = S_{OBD} - S_{CBD} = 18 - 4.5 = 13.5$$

$$S_{OBD} = \int_{0}^{9} \quad xdx = \frac{2}{3}x \cdot x \quad = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 - 0 = 18$$

$$S_{CBD} = \frac{1}{2}CD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4.5$$

Ответ : 13,5



Итоговый контроль

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

1) $y = 5 - x^2, y = 3 - x$

а) 3 б) 4,5 в) 6 г) 6,5

2) $y = 4x – x^2, y = 0$

а) 3 2/3 б) 11 в) 9 ½ г) 10 2/3

3) $y = x^3, y = x$

а) 1 ¼ б) ½ в) ¼ г) 1 ½

4) $y = 1/(x – 1)^2, y = 0, x = -1, x = 0$

а) 0,75 б) 1 в) 0,5 г) 1,25

ОТВЕТ

Ответы

- 1 – б
- 2 – г
- 3 – в
- 4 – в

Назад к заданиям

Самостоятельная работа.

Самостоятельная работа.

ВАРИАНТ 1.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = \sqrt{x+1}$ и $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = -x^2 + 4x + 3$ и $y = x^2 - 2x = 3$.

ВАРИАНТ 2.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = \sqrt{x-1}$ и $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = -x^2 - 2x + 5$ и $y = x^2 + 4x + 5$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!