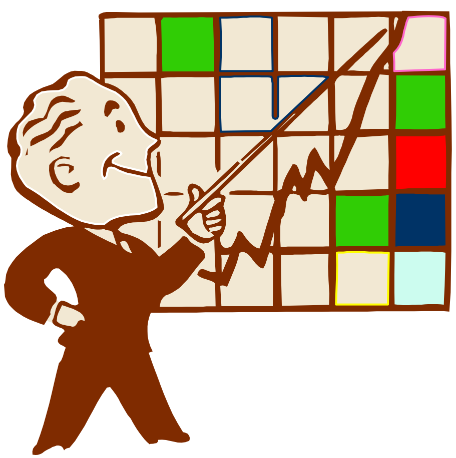
Лекция 3.

ПЛАН ЛЕКЦИИ.

1. Динамика вращательного движения твердого тела:
    - момент импульса относительно центра;
    - момент силы относительно центра;
    - момент импульса относительно оси;
    - момент силы относительно оси;
    - момент инерции тела
2. Закон сохранения момента импульса
3. Силы инерции: центробежная и сила Кориолиса



ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело - это совокупность точек, расстояние между которыми не меняется.

Число независимых координат, однозначно определяющих положение тела или системы тел в пространстве, называется числом степеней свободы тела или системы тел

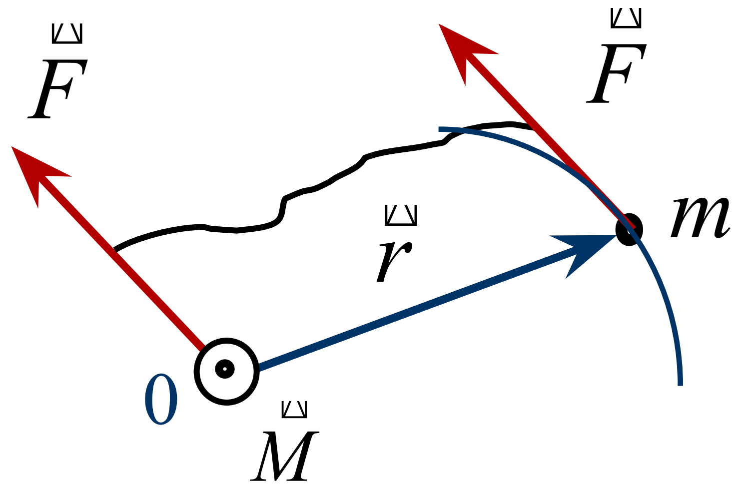
Центр инерции системы движется так, как двигалась бы частица с массой, равной суммарной массе системы, под действием силы, равной суммарной внешней силе.

Движение центра инерции системы можно отождествлять с поступательным движением системы как целого.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим важнейшие динамические характеристики вращательного движения: момент силы $\boldsymbol{M}$, момент импульса $\boldsymbol{L}$.

Различают момент силы и момент импульса относительно центра (точки) и относительно оси.

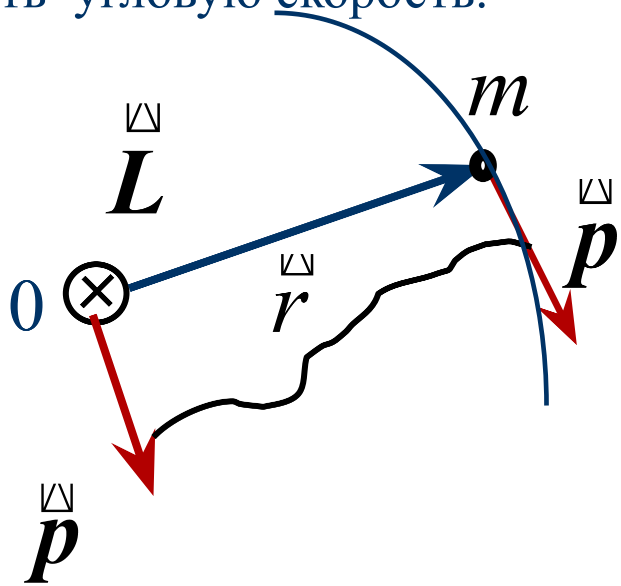


$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

<u>Моментом силы</u> $\vec{F}$ относительно центра «0» называется векторная величина $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки приложения сил, проведенный из центра.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Момент силы характеризует способность силы вызывать вращение тела и изменять угловую скорость.



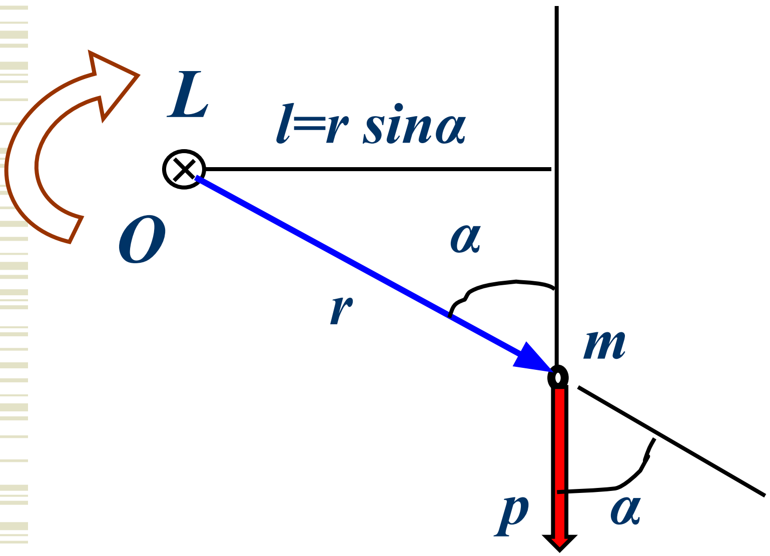
$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

<u>Момент импульса</u> $\vec{L}$ относительно центра «0» - это векторная величина $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$.

Момент импульса в динамике играет ту же роль, что и импульс в поступательном движении.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плечо импульса и силы относительно точки



***l=r sinα.* - плечо импульса относительно точки «О»**

Модуль вектора момента импульса частицы относительно точки ***O*** равен:

$$L = p\,r\sin\alpha = pl$$

По аналогии модуль вектора момента силы частицы относительно точки ***O*** равен:

$$M = F\,r\sin\alpha = Fl$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Суммарный момент импульса $\vec{L}_{\Sigma}$ системы частиц связан с суммарным моментом $\vec{M}_{\Sigma}$ внешних сил, действующих на систему, *уравнением моментов:*

$$\boxed{d\vec{L}_{\Sigma}/dt = \vec{M}_{\Sigma}}$$

⇨ второй закон Ньютона, записанный для моментов импульсов и сил.

$$\left.\begin{aligned} \vec{M}_{\Sigma} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_i = \sum_i \vec{M}_i \\ \vec{L}_{\Sigma} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_i = \sum_i \vec{L}_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \dots n$$

Момент импульса системы, как и импульс, является величиной аддитивной

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Если в $\boxed{d\vec{L}_{\Sigma} / dt = \vec{M}_{\Sigma}}$ положить $\vec{\boldsymbol{M}}_{\Sigma}$ равным нулю, получим:

$$d\vec{L}_{\Sigma} / dt = 0$$

Момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Момент импульса тела относительно оси

$$\boxed{\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}}$$

$\boxed{J_z}$ Момент инерции тела относительно оси (аналог массы)

Момент инерции материальной точки массой **m**, вращающейся относительно оси вращения по окружности радиуса ***R***

$$J_z = mR^2$$

Момент инерции тела массой **m** , вращающейся относительно оси вращения по окружности радиуса ***R***

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \qquad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Формулы для вычисления моментов инерции для стандартных тел

Тело	Ориентация оси	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр с радиусом ***R*** и массой ***m***	По оси цилиндра	mR^2
Сплошной цилиндр с радиусом ***R*** и массой ***m***	По оси цилиндра	$\frac{m}{2}R^2$
Полый тонкостенный цилиндр с радиусом с внутренним радиусом R_1, внешним радиусом R_2 и массой ***m***	По оси цилиндра	$\frac{m}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$
Диск с радиусом ***R*** и массой ***m***	По оси диска	$\frac{m}{2}R^2$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = M_z = 0, \Rightarrow \vec{L} = const. \Rightarrow J_z\vec{\omega} = const.$$

Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется с течением времени.

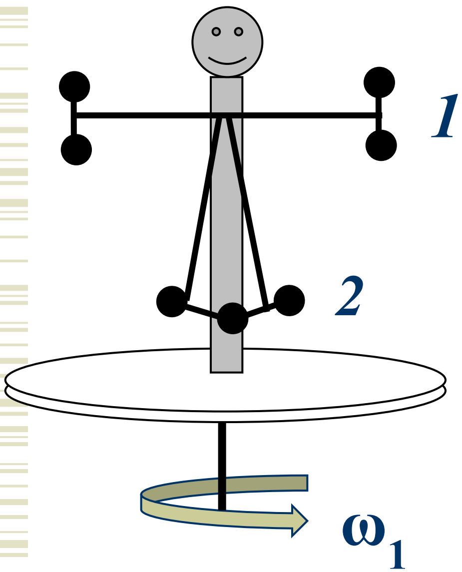
$$J\vec{\omega} = const. \Rightarrow \vec{\omega} - \text{вектор.}$$

Пусть J_0 – момент инерции человека и скамьи.

$$2mr_1^2 \Leftrightarrow 2mr_2^2$$

– моменты инерции гантелей в первом и втором положения.

r_1 и r_2 – расстояния от гантелей до оси вращения в первом и во втором положении.



$$\left(J_0 + 2mr_1^2\right)\cdot\omega_1 = \left(J_0 + 2mr_2^2\right)\cdot\omega_2 .$$

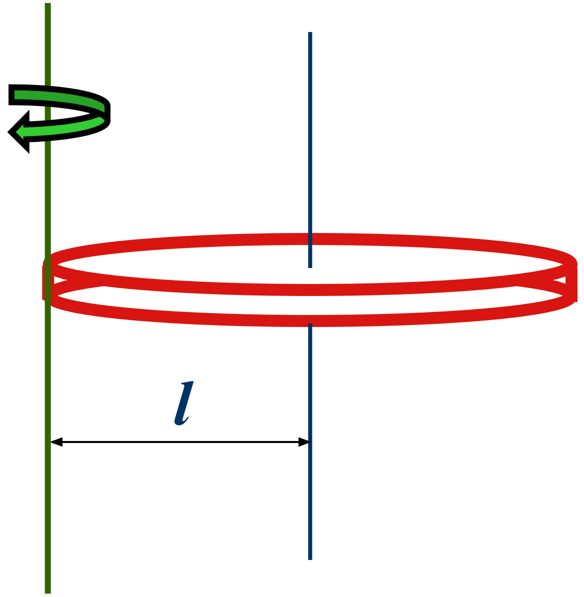
J_1 J_2

$$J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2 .$$

Теорема Штейнера

Момент инерции тела J_{z0} относительно произвольной оси равен сумме его момента инерции J_{zc} относительно оси, проходящей через центр инерции тела, параллельной рассматриваемой, и произведения массы тела M на квадрат расстояния между осями.

$$\boxed{J_{z0} = J_{zc} + Ml^2}$$



$$J_{z0} = J_{zc} + Ml^2$$

$$\boxed{J_{zc} = \frac{m}{2}R^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2}$$

АНАЛОГИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНО ДВИЖЕНИЙ

Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение dS	Угол $d\varphi$
Линейная скорость v	Угловая скорость ω
Линейное ускорение a	Угловое ускорение ε
Масса m	Момент инерции J
Импульс $p=mv$	Момент импульса $L=J\omega$
Сила F	Момент сил M
Уравнение движения $F=dp/dt$	Уравнение движения $M=dL/dt$
Уравнение движения $a=F/m$	Уравнение движения $\varepsilon=M_z/J$
Кинетическая энергия $E=mv^2/2$	Кинетическая энергия $E=J\omega^2/2$
Работа $dA=FdS$	Работа $dA=Md\varphi$
Мощность $P=Fv$	Мощность $P=M\omega$

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Пусть тело движется в инерциальной системе отсчета с ускорением $\vec{a}$.

Ускорение этого тела в неинерциальной системе отсчета будет $\vec{a}^{*} \neq \vec{a}$

$$\vec{a} - \vec{a}^{*} = a_{\Delta}$$

$\boxed{a_{\Delta} = const}$ ⇒ для всех точек пространства поступательно движущейся неинерциальной системы

$\boxed{a_{\Delta} = a_{\Delta}(r^{*})}$ ⇒ для вращающейся неинерциальной системы

(r^{*} - радиус-вектор, определяющий положение точки относительно неинерциальной системы отсчета).

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Пусть на тело в неинерционной системе отсчета действуют силы с результирующей $\vec{F}$.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}}$$

- второй закон Ньютона для инерциальной системы

Ускорение тела в неинерциальной системе можно записать в виде

$$\vec{a}^{*} = \vec{a} - \vec{a}_{\Delta} = \frac{1}{m}\vec{F} - \vec{a}_{\Delta}$$

Пусть $\vec{F} = 0$. Тогда $\vec{a}^{*} = -\vec{a}_{\Delta}$.

Даже при отсутствии внешних сил тело будет двигаться по отношению к неинерциальной системе отсчета с ускорением a_{Δ} - так, как если бы на него действовала сила $-m\vec{a}_{\Delta}$.

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Таким образом, при описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться уравнениями Ньютона с учетом ***сил инерции*** $\vec{F}_{ин}$.

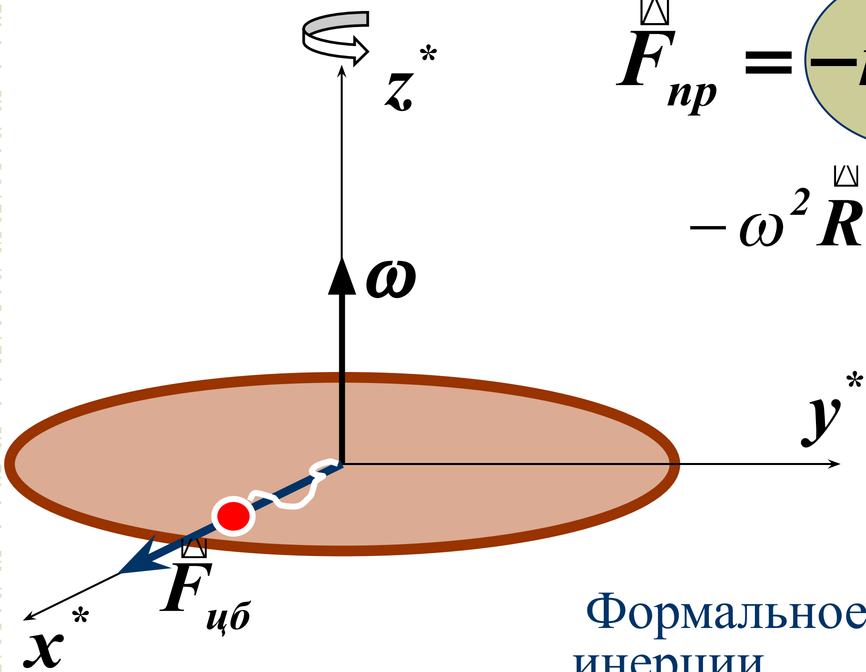
$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_{\Delta}$$

$$m\vec{a}^{*} = \vec{F} + \vec{F}_{ин}$$

уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Центробежные силы инерции.



$$\vec{F}_{пр} = -m\omega^2\vec{R}$$ - сила натяжения пружины

$$-\omega^2\vec{R} = \vec{a}_n$$

$\vec{R}$ - радиус-вектор, проведенный к шарику из центра диска.

Относительно вращающейся системы отсчета (диск) шарик покоится.

Формальное объяснение - на шарик действует сила инерции

$$\boxed{\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R}}$$

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Центробежные силы инерции.

Приведенная модельная задача сходна с другой модельной задачей – изучение взаимодействия и движения тел в системе отсчета, связанной с Землей, вращающейся вокруг своей оси.

Наблюдаемое относительно Земли ускорение свободного падения тела $\vec{g}$ обусловлено действием силы $\vec{F}_g$, с которой тело притягивается Землей, и центробежной силой $\vec{F}_{цб}$. Результирующая этих сил

$$\boxed{\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб} = m\vec{g}}$$

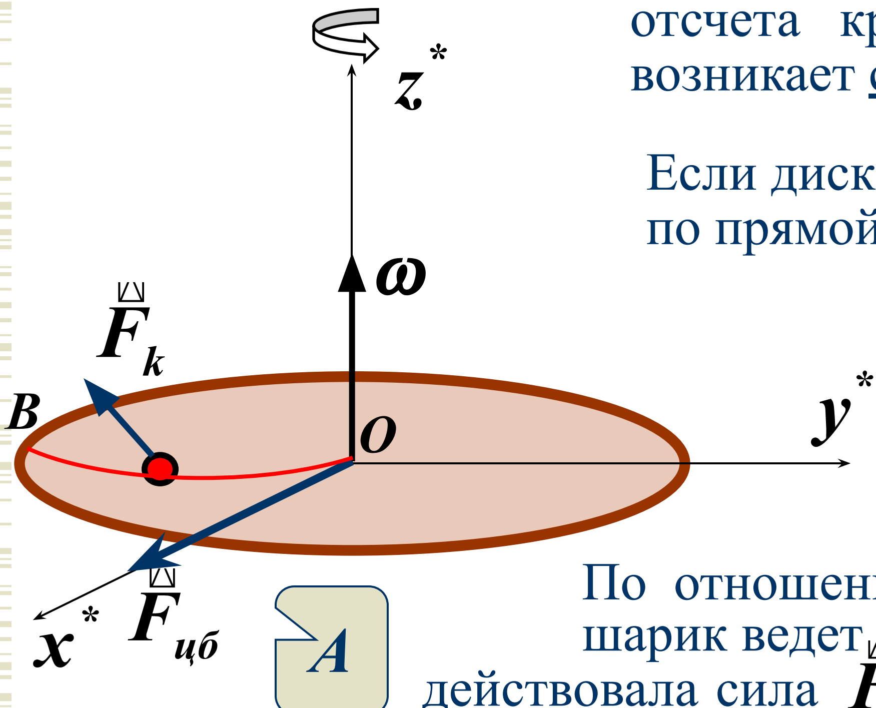
Поскольку $\vec{F}_g >> \vec{F}_{цб}$, $\quad P \approx F_g \approx mg$

Для массы 1 кг (на экваторе) $\vec{F}_{цб\ max}$ равно 0.035 Н, в то время, как $\vec{F}_g \approx 9.8H$, т.е. почти в 300 раз больше.

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Центробежные силы инерции. Сила Кориолиса

При движении тел во вращающейся системе отсчета кроме центробежной силы инерции возникает сила Кориолиса



Если диск не вращается, шарик будет катиться по прямой ***OA*** со скоростью $\vec{v}^*$.

Если привести диск во вращение, траектория движения шарика - кривая ***OB***.

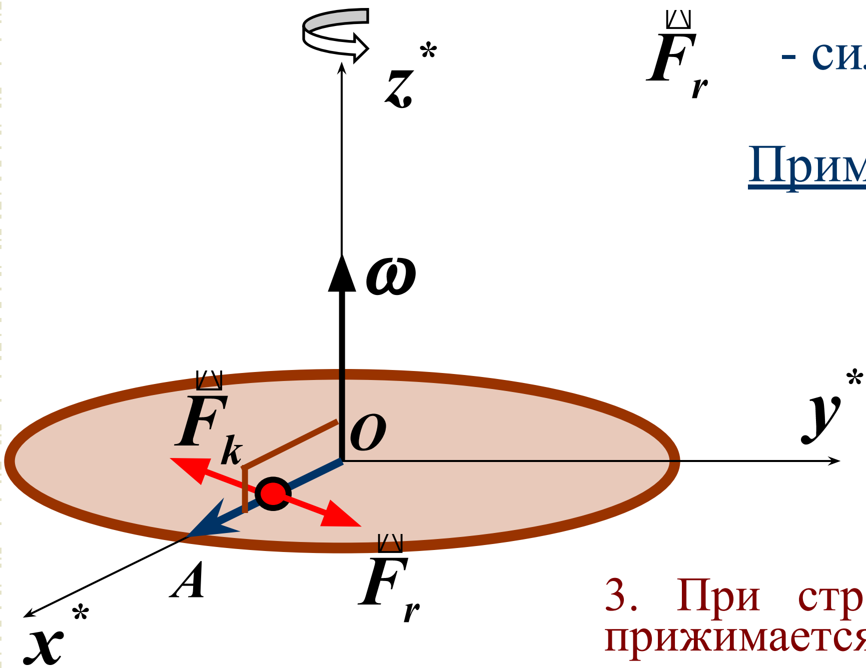
По отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него дейст-действовала сила $\vec{F}_k$, перпендикулярная направлению скорости $\vec{v}^*$.

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Центробежные силы инерции. Сила Кориолиса

$\vec{F}_k$ - сила Кориолиса

$\vec{F}_r$ - сила действия ребра на шарик



Примеры проявлений силы Кориолиса:

1. Свободное падение на Землю тел – отклоняются к востоку от линии отвеса;

2. При выстреле из орудия на север, снаряд отклоняется к востоку в северном полушарии и к западу а южном;

3. При стрельбе вдоль экватора на запад снаряд прижимается к Земле, на восток - поднимается кверху;

3. У рек всегда подмывается правый берег в северном полушарии и левый - в южном полушарии.

Лекция 3

Лекция окончена.

До следующей встречи.

Желаю успехов в учебе!