

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ №11
ЕГЭ-2016
ПО ИНФОРМАТИКЕ
РЕКУРСИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ**

**Учитель информатики
ГБОУ «Школа №2036»
Федотова Галина Владимировна
fedotovagv@yandex.ru**

УРОВЕНЬ СЛОЖНОСТИ

№	Проверяемые элементы содержания	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Уровень сложности	Макс. балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания (мин.)
Часть 1						
11	Умение исполнить рекурсивный алгоритм	1.5.3	1.1.3	Б	1	5

Индуктивное
определение
объектов

Строить информационные модели
объектов, систем и процессов
в виде алгоритмов

Базовый уровень
сложности

ТИПЫ ЗАДАЧ ЕГЭ

Заданы рекуррентные соотношения. Необходимо определить значение функции для заданного числа n .

Задан рекурсивный алгоритм

Определить значение функции $F(n)$ для заданного числа n .

Определить сколько символов «*» будет напечатано при выполнении вызова $F(n)$ для заданного числа n .

Найти сумму чисел, которые будут выведены при вызове функции $F(n)$ для заданного числа n .

ЗАДАЧА В6 (ИНФ_ДЕМО 2014)

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$,
где n – натуральное число,
задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Чему равно значение функции $F(7)$?

В ответе запишите только натуральное число.

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3)$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3)$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2)$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3)$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2)$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1)$$

$$F(2) = 1; F(1) = 1$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3)$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2)$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$F(2) = 1; F(1) = 1$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n-1) + 2 \times F(n-2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3)$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2) = 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$F(2) = 1; F(1) = 1$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n-1) + 2 \times F(n-2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4)$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3) = 5 + 2 \times 3 = 11$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2) = 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$F(2) = 1; F(1) = 1$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5)$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4) = 11 + 2 \times 5 = 21$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3) = 5 + 2 \times 3 = 11$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2) = 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$F(2) = 1; F(1) = 1$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n-1) + 2 \times F(n-2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5) = 21 + 2 \times 11 = 43$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4) = 11 + 2 \times 5 = 21$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3) = 5 + 2 \times 3 = 11$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2) = 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$F(2) = 1; F(1) = 1$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n-1) + 2 \times F(n-2) \text{ при } n > 2.$$

Нужно найти значение функции $F(7)$.

$$F(7) = F(6) + 2 \times F(5) = 21 + 2 \times 11 = 43$$

$$F(6) = F(5) + 2 \times F(4) = 11 + 2 \times 5 = 21$$

$$F(5) = F(4) + 2 \times F(3) = 5 + 2 \times 3 = 11$$

$$F(4) = F(3) + 2 \times F(2) = 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$F(3) = F(2) + 2 \times F(1) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$F(2) = 1; F(1) = 1$$

Ответ: 43

ЗАДАЧА 30 (С САЙТА К.Ю.ПОЛЯКОВА)

Алгоритм вычисления значений функций $F(n)$ и $G(n)$, где n – натуральное число,

задан следующими соотношениями:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Чему равно значение величины $F(5) - G(5)$?

В ответе запишите только целое число.

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4)$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4)$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4)$$

$$F(4) = 3 * F(3) - 3 * G(3)$$

$$G(4) = F(3) + 2 * G(3)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4)$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4)$$

$$F(4) = 3 * F(3) - 3 * G(3)$$

$$G(4) = F(3) + 2 * G(3)$$

$$F(3) = 3 * F(2) - 3 * G(2)$$

$$G(3) = F(2) + 2 * G(2)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4)$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4)$$

$$F(4) = 3 * F(3) - 3 * G(3)$$

$$G(4) = F(3) + 2 * G(3)$$

$$F(3) = 3 * F(2) - 3 * G(2)$$

$$G(3) = F(2) + 2 * G(2)$$

$$F(2) = 3 * F(1) - 3 * G(1)$$

$$G(2) = F(1) + 2 * G(1)$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4)$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4)$$

$$F(4) = 3 * F(3) - 3 * G(3)$$

$$G(4) = F(3) + 2 * G(3)$$

$$F(3) = 3 * F(2) - 3 * G(2)$$

$$G(3) = F(2) + 2 * G(2)$$

$$F(2) = 3 * F(1) - 3 * G(1) = 3 * 1 - 3 * 1 = 0$$

$$G(2) = F(1) + 2 * G(1) = 1 + 2 * 1 = 3$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4)$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4)$$

$$F(4) = 3 * F(3) - 3 * G(3)$$

$$G(4) = F(3) + 2 * G(3)$$

$$F(3) = 3 * F(2) - 3 * G(2) = 3 * 0 - 3 * 3 = -9$$

$$G(3) = F(2) + 2 * G(2) = 0 + 2 * 3 = 6$$

$$F(2) = 3 * F(1) - 3 * G(1) = 3 * 1 - 3 * 1 = 0$$

$$G(2) = F(1) + 2 * G(1) = 1 + 2 * 1 = 3$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4)$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4)$$

$$F(4) = 3 * F(3) - 3 * G(3) = 3 * (-9) - 3 * 6 = -45$$

$$G(4) = F(3) + 2 * G(3) = -9 + 2 * 6 = 3$$

$$F(3) = 3 * F(2) - 3 * G(2) = 3 * 0 - 3 * 3 = -9$$

$$G(3) = F(2) + 2 * G(2) = 0 + 2 * 3 = 6$$

$$F(2) = 3 * F(1) - 3 * G(1) = 3 * 1 - 3 * 1 = 0$$

$$G(2) = F(1) + 2 * G(1) = 1 + 2 * 1 = 3$$

РЕШЕНИЕ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

$$F(5) = 3 * F(4) - 3 * G(4) = 3 * (-45) - 3 * 3 = -144$$

$$G(5) = F(4) + 2 * G(4) = -45 + 2 * 3 = -39$$

$$F(4) = 3 * F(3) - 3 * G(3) = 3 * (-9) - 3 * 6 = -45$$

$$G(4) = F(3) + 2 * G(3) = -9 + 2 * 6 = 3$$

$$F(3) = 3 * F(2) - 3 * G(2) = 3 * 0 - 3 * 3 = -9$$

$$G(3) = F(2) + 2 * G(2) = 0 + 2 * 3 = 6$$

$$F(2) = 3 * F(1) - 3 * G(1) = 3 * 1 - 3 * 1 = 0$$

$$G(2) = F(1) + 2 * G(1) = 1 + 2 * 1 = 3$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения заданы:

$$F(1) = 1 ; G(1) = 1;$$

$$F(n) = 3 * F(n - 1) - 3 * G(n - 1),$$

$$G(n) = F(n - 1) + 2 * G(n - 1), \text{ при } n \geq 2$$

Нужно найти значение величины $F(5) - G(5)$.

Далее находим значение величины $F(5) - G(5)$:

$$F(5) - G(5) = -144 - (-39) = -105$$

Ответ: -105.

ЗАДАЧИ НА ОТРАБОТКУ

№№ 1 – 29, 43, 58 – 59

ИСТОЧНИКИ ЗАДАЧ

**Рекомендованные ФИПИ материалы
К.Ю. Полякова (<http://kpolyakov.spb.ru>)**

ЗАДАЧА 76 (с САЙТА К.Ю.ПОЛЯКОВА)

Ниже записаны две рекурсивные функции, F и G:

```
function F(n: integer): integer;
```

```
begin
```

```
  if n > 2 then
```

```
    F := F(n - 1) + G(n - 2)
```

```
  else
```

```
    F := 1;
```

```
end;
```

```
function G(n: integer): integer;
```

```
begin
```

```
  if n > 2 then
```

```
    G := G(n - 1) + F(n - 2)
```

```
  else
```

```
    G := 1;
```

```
end;
```

Чему будет равно значение, вычисленное при выполнении вызова F(7)?

РЕШЕНИЕ

Сначала составим рекуррентные соотношения:

Для $F(n)$:

$$\text{при } n > 2 \quad F(n) = F(n - 1) + G(n - 2)$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1$$

Для $G(n)$:

$$\text{при } n > 2 \quad G(n) = G(n - 1) + F(n - 2)$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad G(n) = 1$$

Чему будет равно значение, вычисленное при выполнении вызова $F(7)$?

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad F(n) = F(n - 1) + G(n - 2)$$

$$G(n) = G(n - 1) + F(n - 2)$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad F(n) = F(n-1) + G(n-2)$$

$$G(n) = G(n-1) + F(n-2)$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad F(n) = F(n-1) + G(n-2)$$

$$G(n) = G(n-1) + F(n-2)$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

$$F(5) = F(4) + G(3)$$

$$G(4) = G(3) + F(2)$$

$$F(4) = F(3) + G(2)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad \begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

$$F(5) = F(4) + G(3)$$

$$G(4) = G(3) + F(2)$$

$$F(4) = F(3) + G(2)$$

$$G(3) = G(2) + F(1)$$

$$F(3) = F(2) + G(1)$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad \begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

$$F(5) = F(4) + G(3)$$

$$G(4) = G(3) + F(2)$$

$$F(4) = F(3) + G(2)$$

$$G(3) = G(2) + F(1)$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad \begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

$$F(5) = F(4) + G(3)$$

$$G(4) = G(3) + F(2)$$

$$F(4) = F(3) + G(2)$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad F(n) = F(n-1) + G(n-2)$$

$$G(n) = G(n-1) + F(n-2)$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

$$F(5) = F(4) + G(3)$$

$$G(4) = G(3) + F(2)$$

$$F(4) = F(3) + G(2) = 2 + 1 = 3$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; F(2) = 1; F(1) = 1; G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad \begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

$$F(5) = F(4) + G(3)$$

$$G(4) = G(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$$

$$F(4) = F(3) + G(2) = 2 + 1 = 3$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad F(n) = F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) = G(n-1) + F(n-2)$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3)$$

$$F(5) = F(4) + G(3) = 3 + 2 = 5$$

$$G(4) = G(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$$

$$F(4) = F(3) + G(2) = 2 + 1 = 3$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; F(2) = 1; F(1) = 1; G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad \begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4)$$

$$G(5) = G(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$$

$$F(5) = F(4) + G(3) = 3 + 2 = 5$$

$$G(4) = G(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$$

$$F(4) = F(3) + G(2) = 2 + 1 = 3$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \text{при } n > 2 \quad F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5)$$

$$F(6) = F(5) + G(4) = 5 + 3 = 8$$

$$G(5) = G(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$$

$$F(5) = F(4) + G(3) = 3 + 2 = 5$$

$$G(4) = G(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$$

$$F(4) = F(3) + G(2) = 2 + 1 = 3$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad \begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5) = 8 + 5 = 13$$

$$F(6) = F(5) + G(4) = 5 + 3 = 8$$

$$G(5) = G(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$$

$$F(5) = F(4) + G(3) = 3 + 2 = 5$$

$$G(4) = G(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$$

$$F(4) = F(3) + G(2) = 2 + 1 = 3$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$\text{при } n > 2 \quad \begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + G(n-2) \\ G(n) &= G(n-1) + F(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{при } n \leq 2 \quad F(n) = 1; \quad G(n) = 1$$

$$F(7) = F(6) + G(5) = 8 + 5 = 13$$

$$F(6) = F(5) + G(4) = 5 + 3 = 8$$

$$G(5) = G(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$$

$$F(5) = F(4) + G(3) = 3 + 2 = 5$$

$$G(4) = G(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$$

$$F(4) = F(3) + G(2) = 2 + 1 = 3$$

$$G(3) = G(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = F(2) + G(1) = 1 + 1 = 2$$

$$G(2) = 1; \quad F(2) = 1; \quad F(1) = 1; \quad G(1) = 1$$

Ответ: 13

ЗАДАЧИ НА ОТРАБОТКУ

№№ 62 – 69, 74, 77

ИСТОЧНИКИ ЗАДАЧ

**Рекомендованные ФИПИ материалы
К.Ю. Полякова (<http://kpolyakov.spb.ru>)**

ЗАДАЧА 36 (с САЙТА К.Ю.ПОЛЯКОВА)

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);
```

```
begin
```

```
writeln('*');
```

```
  if n > 0 then begin
```

```
    writeln('*');
```

```
    F(n-2);
```

```
    F(n div 2);
```

```
  end
```

```
end;
```

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова F(7)?

РЕШЕНИЕ

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln('*');  
  if n > 0 then begin  
    writeln('*');  
    F(n-2);  
    F(n div 2);  
  end  
end;
```

Сначала составим рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 1 + 1 + F(n - 2) + F(n \text{ div } 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1)$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1)$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1)$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1)$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1)$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0)$$

$$F(-1) = 1; F(0) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1)$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1)$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$F(-1) = 1; F(0) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1)$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1) = 2 + 1 + 4 = 7$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$F(-1) = 1; F(0) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2)$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1) = 2 + 4 + 4 = 10$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1) = 2 + 1 + 4 = 7$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$F(-1) = 1; F(0) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3)$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2) = 2 + 10 + 7 = 19$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1) = 2 + 4 + 4 = 10$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1) = 2 + 1 + 4 = 7$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$F(-1) = 1; F(0) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3) = 2 + 19 + 10 = 31$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2) = 2 + 10 + 7 = 19$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1) = 2 + 4 + 4 = 10$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1) = 2 + 1 + 4 = 7$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$F(-1) = 1; F(0) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = 2 + F(n - 2) + F(n \operatorname{div} 2), \text{ при } n > 0$$

$$F(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(7)**?

$$F(7) = 2 + F(5) + F(3) = 2 + 19 + 10 = 31$$

$$F(5) = 2 + F(3) + F(2) = 2 + 10 + 7 = 19$$

$$F(3) = 2 + F(1) + F(1) = 2 + 4 + 4 = 10$$

$$F(2) = 2 + F(0) + F(1) = 2 + 1 + 4 = 7$$

$$F(1) = 2 + F(-1) + F(0) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$F(-1) = 1; F(0) = 1$$

Ответ: 31

ЗАДАЧА 11 (ИНФ_ДЕМО 2016)

Записаны две рекурсивные функции (процедуры): F и G.

```
procedure F(n: integer); forward;  
procedure G(n: integer); forward;
```

```
procedure F(n: integer);  
begin  
    if n > 0 then  
        G(n - 1);  
end;
```

```
procedure G(n: integer);  
begin  
    writeln('*');  
    if n > 1 then  
        F(n - 3);  
end;
```

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова F(11)?

РЕШЕНИЕ

```
procedure F(n: integer);
```

```
begin
```

```
if n > 0 then
```

```
begin
```

```
    G(n-1)
```

```
end;
```

```
procedure G(n: integer);
```

```
begin
```

```
writeln('*');
```

```
if n > 1 then
```

```
begin
```

```
    F(n-3)
```

```
end;
```

Сначала составим рекуррентные соотношения:

$F(n) = G(n - 1)$, при $n > 0$; $F(n) = 0$, при $n \leq 0$

$G(n) = 1 + F(n - 3)$, при $n > 1$; $G(n) = 1$, при $n \leq 0$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(11)**?

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = G(n - 1), \text{ при } n > 0; F(n) = 0, \text{ при } n \leq 0$$

$$G(n) = 1 + F(n - 3), \text{ при } n > 1; G(n) = 1, \text{ при } n \leq 0$$

Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова **F(11)**?

$$F(11) = G(10)$$

$$G(10) = 1 + F(7)$$

$$F(7) = G(6)$$

$$G(6) = 1 + F(3)$$

$$F(3) = G(2)$$

$$G(2) = 1 + F(-1)$$

$$F(-1) = 0$$

$$G(2) = 1 + F(-1) = 1 + 0 = 1$$

$$F(3) = G(2) = 1$$

$$G(6) = 1 + F(3) = 1 + 1 = 2$$

$$F(7) = G(6) = 2$$

$$G(10) = 1 + F(7) = 1 + 2 = 3$$

$$F(11) = G(10) = 3$$

Ответ: 3

ЗАДАЧИ НА ОТРАБОТКУ

№№ 32 – 35, 37 – 42, 70 – 73, 75

ИСТОЧНИКИ ЗАДАЧ

**Рекомендованные ФИПИ материалы
К.Ю. Полякова (<http://kpolyakov.spb.ru>)**

ЗАДАЧА 11 (ИНФ_ДЕМО 2015)

Записан рекурсивный алгоритм F:

```
procedure F(n: integer);
begin
  writeln(n);
  if n < 5 then
  begin
    F(n + 1);
    F(n + 3)
  end
end
```

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(1)?

РЕШЕНИЕ

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 5 then  
  begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3);  
  end  
end;
```

Сначала составим рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5)$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5)$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6)$$

$$F(4) = 4 + F(5) + F(7)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5)$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6)$$

$$F(4) = 4 + F(5) + F(7)$$

$$F(5) = 5; F(6) = 6; F(7) = 7$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5)$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6)$$

$$F(4) = 4 + F(5) + F(7) = 4 + 5 + 7 = 16$$

$$F(5) = 5; F(6) = 6; F(7) = 7$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5)$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6) = 3 + 16 + 6 = 25$$

$$F(4) = 4 + F(5) + F(7) = 4 + 5 + 7 = 16$$

$$F(5) = 5; F(6) = 6; F(7) = 7$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4)$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5) = 2 + 25 + 5 = 32$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6) = 3 + 16 + 6 = 25$$

$$F(4) = 4 + F(5) + F(7) = 4 + 5 + 7 = 16$$

$$F(5) = 5; F(6) = 6; F(7) = 7$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4) = 1 + 32 + 16 = 49$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5) = 2 + 25 + 5 = 32$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6) = 3 + 16 + 6 = 25$$

$$F(4) = 4 + F(5) + F(7) = 4 + 5 + 7 = 16$$

$$F(5) = 5; F(6) = 6; F(7) = 7$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения:

$$F(n) = n + F(n + 1) + F(n + 3), \text{ при } n < 5$$

$$F(n) = n, \text{ при } n \geq 5$$

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова **F(1)**?

$$F(1) = 1 + F(2) + F(4) = 1 + 32 + 16 = 49$$

$$F(2) = 2 + F(3) + F(5) = 2 + 25 + 5 = 32$$

$$F(3) = 3 + F(4) + F(6) = 3 + 16 + 6 = 25$$

$$F(4) = 4 + F(5) + F(7) = 4 + 5 + 7 = 16$$

$$F(5) = 5; F(6) = 6; F(7) = 7$$

Ответ: 49

ЗАДАЧИ НА ОТРАБОТКУ

№№ 44 – 57, 60, 61

ИСТОЧНИКИ ЗАДАЧ

**Рекомендованные ФИПИ материалы
К.Ю. Полякова (<http://kpolyakov.spb.ru>)**

Спасибо за внимание!

