



Методы и Системы Поддержки Принятия Решений

# Анализ Решений

Methods and Systems for Decision-Making Support

Л-4

**Многокритериальный анализ решений:**

**введение, структурирование  
многокритериальной задачи,  
деревья критериев.**

**Парето-оптимальные решения**



# Принятие Решений (ПР)

- В повседневной жизни
  - На рабочем месте
  - На различных уровнях руководства/  
управления
  - При решении экономических,  
технических, социально-  
политических и др. задач



# Принятие/Анализ Решений

**1-0-критериальные задачи АР**  
*(предыдущие Лекции)*



# Анализ Решений (АР)

В большинстве (нетривиальных) задач решения принимаются *с учетом нескольких критериев.*

- Тех. Изделия: тех характеристики  $\{1, \dots, m\}$ , надежность, эргономичность, внешний вид...
- При выборе кандидата на должность: образование, квалификация, эрудиция, возраст, коммуникабельность,.....
- Экономика: стоимость, прибыль, спрос,...., тех. характеристики...

# МногоКритериальный Анализ Решений (МКАР)

**АЛЬТЕРНАТИВЫ:** варианты действий (выбора),

$$A = \{A_1, \dots, A_n\}$$

**КРИТЕРИИ:** альтернативы характеризуются различными показателями: признаки, факторы, атрибуты, критерии (выбираем этот термин):

$$C = \{C_1, \dots, C_m\}$$

(в ряде работ вводят различия для атрибутов/факторов и критериев: указать направление изменения (лучший — худший) и атрибут становится *критерием*).



# МКАР (MCDA/ MCDM) (Multi-Criteria Decision Analysis/Making)

Многокритериальная задача:

$$A = \{A_1, \dots, A_n\}$$

$$C = \{C_1, \dots, C_m\} \quad a \in A, C(a) = (C_1(a), \dots, C_m(a)).$$

Позитивный критерий (больше – лучше),

Негативный критерий (меньше – лучше).



# МКАР (МСДА)

Три ключевые фазы процесса МКАР:

- Идентификация, осмысление и структурирование;
- Создание модели и использование;
- Разработка плана действий.

(ППР)



# МКАР (MCDA)

## *Типовые задачи МКАР:*

- Упорядочение альтернатив (ranking)
- Выбор лучшей альтернативы (choice)
- Сортировка альтернатив (sorting)
- Формирование портфеля (portfolio problematique)





# МКАР (МСДА)

## Задача структурирования

*"Хорошо структурированная задача - наполовину решенная задача"*

Структурирование задачи представляет собой процесс ее осмысления, выявления целей, заинтересованных сторон и множества их ключевых интересов и предпочтений, возможных действий/альтернатив, неопределенностей.

*Структурирование* - это идентификация тех факторов и возможных решений, которые должны составить список основных положений для последующего обсуждения и анализа.



# МКАР (МСДА)

Подходы/методы структурирования МК задач:

- Системный анализ проблемы;
- Использование стандартизованных/общих подходов к решению задач анализа проблемы:

- SWOT (Strengths, Weaknesses, opportunities, threats);

методы структурирования “Soft OR”:

- SODA (Strategic Options Developments and Analysis; 1989), расширенный до концепции
  - JOURNEY (1998),
  - SSM (Soft Systems Methodology, 1989),
  - Strategic Choice (1989)



## МКАР (МСДА)

Средства структурирования МКЗ:

- *Дерево критериев*

(дерево ценностей: *Value Tree*):

*графическое представление*

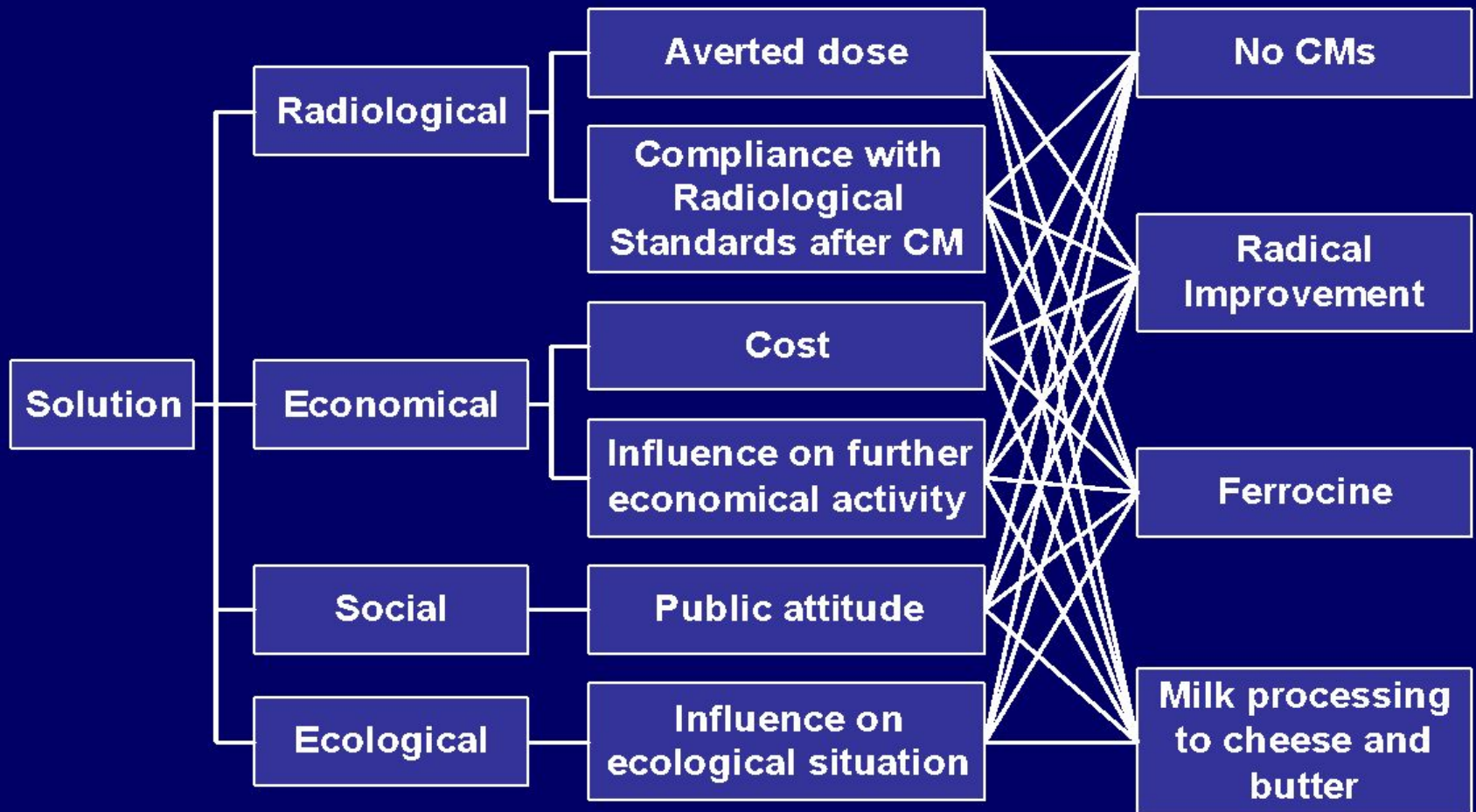
*учитываемых критериев и их*

*связей (иерархии)*



# МКАР/ Деревья критериев

## Value Tree

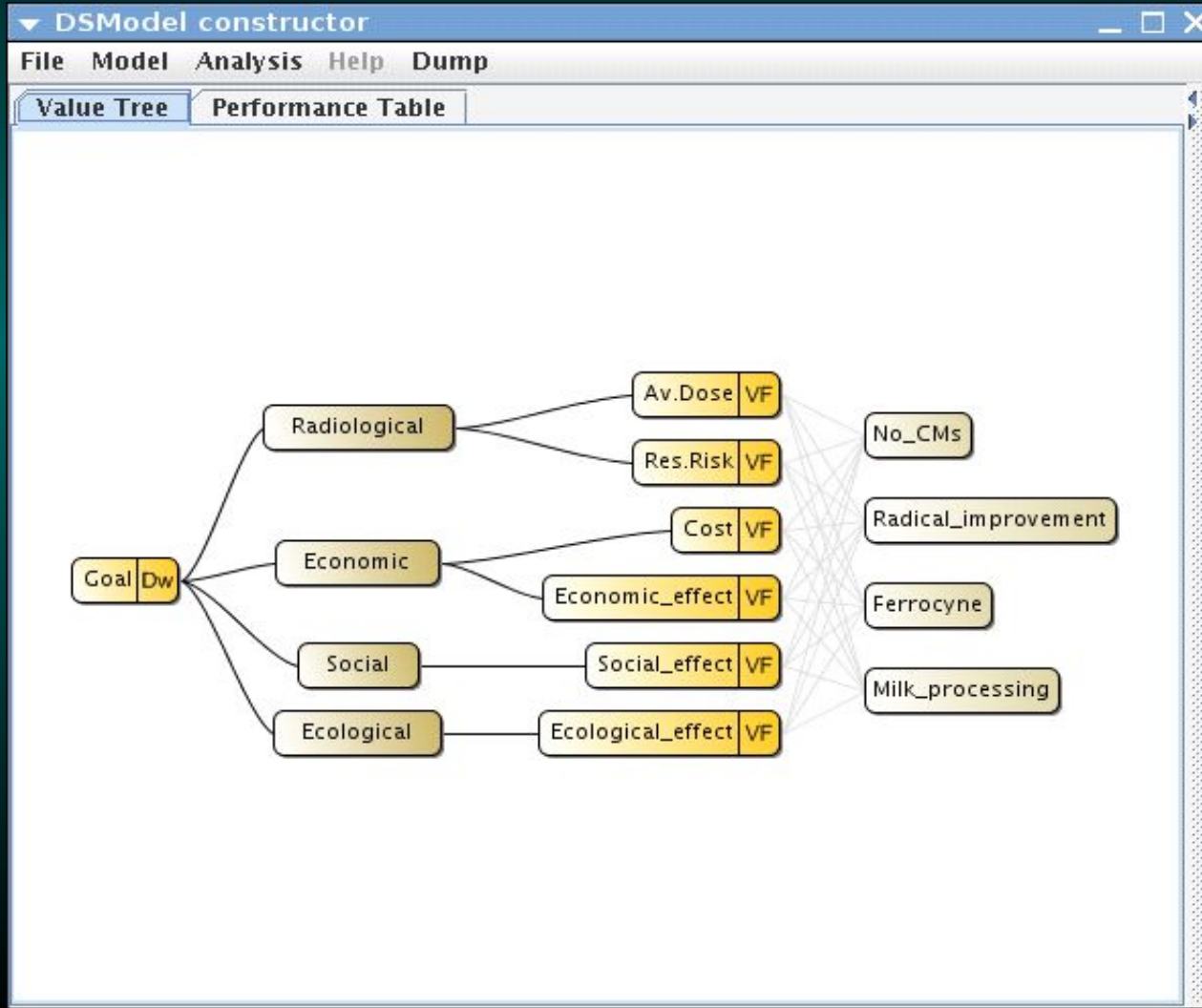




# МКАР/ Деревья критериев

*How to build a value tree:*

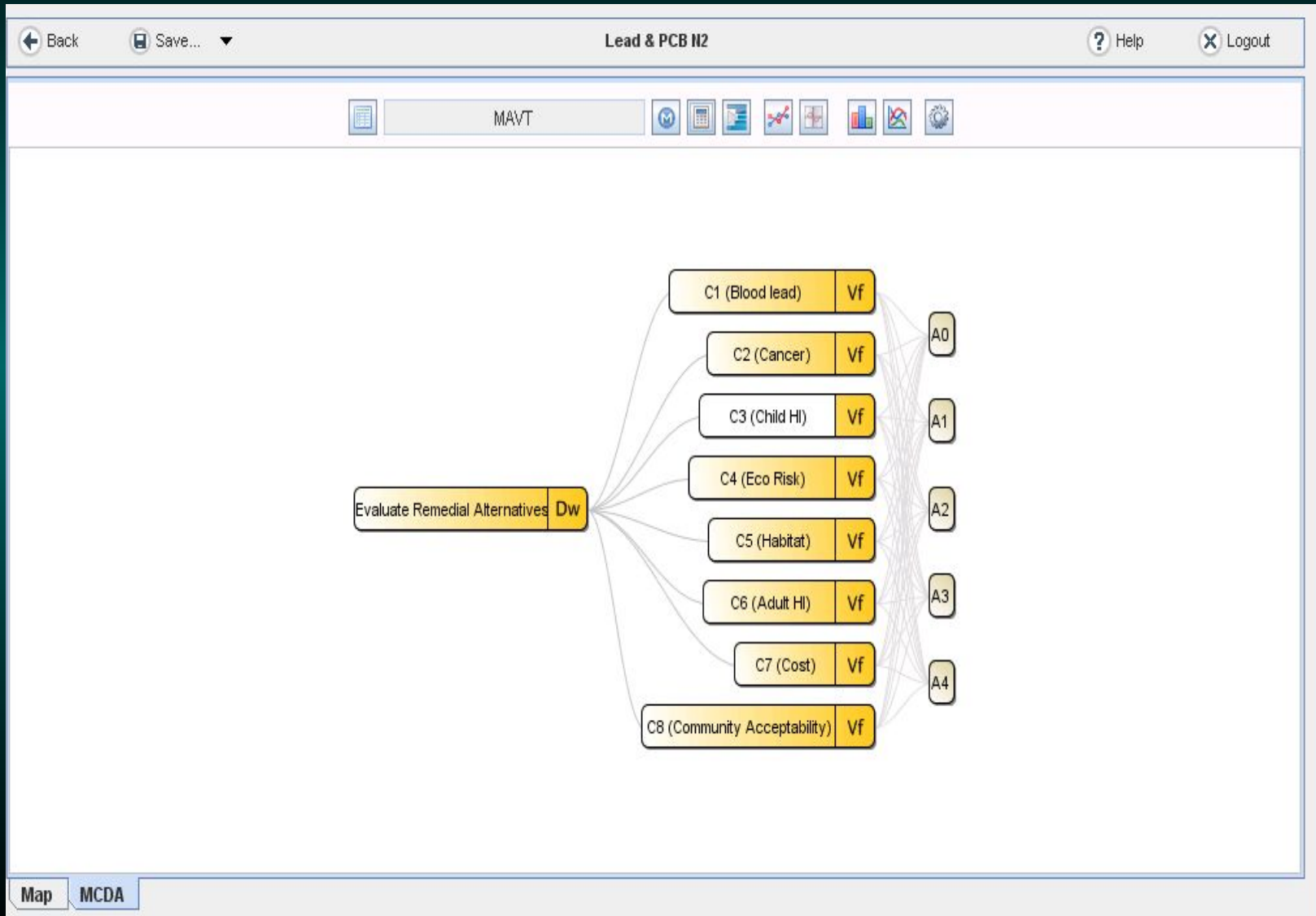
1. top-down approach (= the analytic approach)





# МКАР/ Деревья критериев

## 2. bottom-up approach (or synthetic approach)





# МКАР (МСДА)

## Требования к VTs:

- Полнота (Completeness)
- Практическая применимость (работающий; Operationality)
- Разложимость, независимость (Decomposability)
- Отсутствие избыточности (Absence of redundancy)
- Минимальность (Minimum size)
- Completeness requires that all relevant values be included in the superstructure of the tree and that the substructure completely define the higher level values.
- Operationality - the lowest level values or attributes be meaningful and assessable.
- Decomposability means that the attributes can be analyzed one or two at a time, that is, that they are judgmentally independent.
- Absence of redundancy - no two attributes or values mean the same thing.
- Minimum size requirement refers to the necessity of keeping the number of attributes small enough to manage.

These requirements conflict. Operationality often requires further decomposition, thus increasing the number of attributes. Completeness may lead to redundancy, since true value independence is often an unattainable ideal.

# МКАР; Матрица решений (таблица характеристик, Performance table; Decision matrix)

Problem Structuring - DecernsSDSS - Mozilla Firefox

Файл Правка Вид Журнал Закладки Инструменты Справка

http://prana.obninsk.ru:8080/DecernsSDSS/faces/ds/applet-starter.jsp

Самые популярные Начальная страница Последние заголовки ИАТЭ DECERNS WebSDSS

ICQ Поиск

Back Save... Help Logout

Topsis

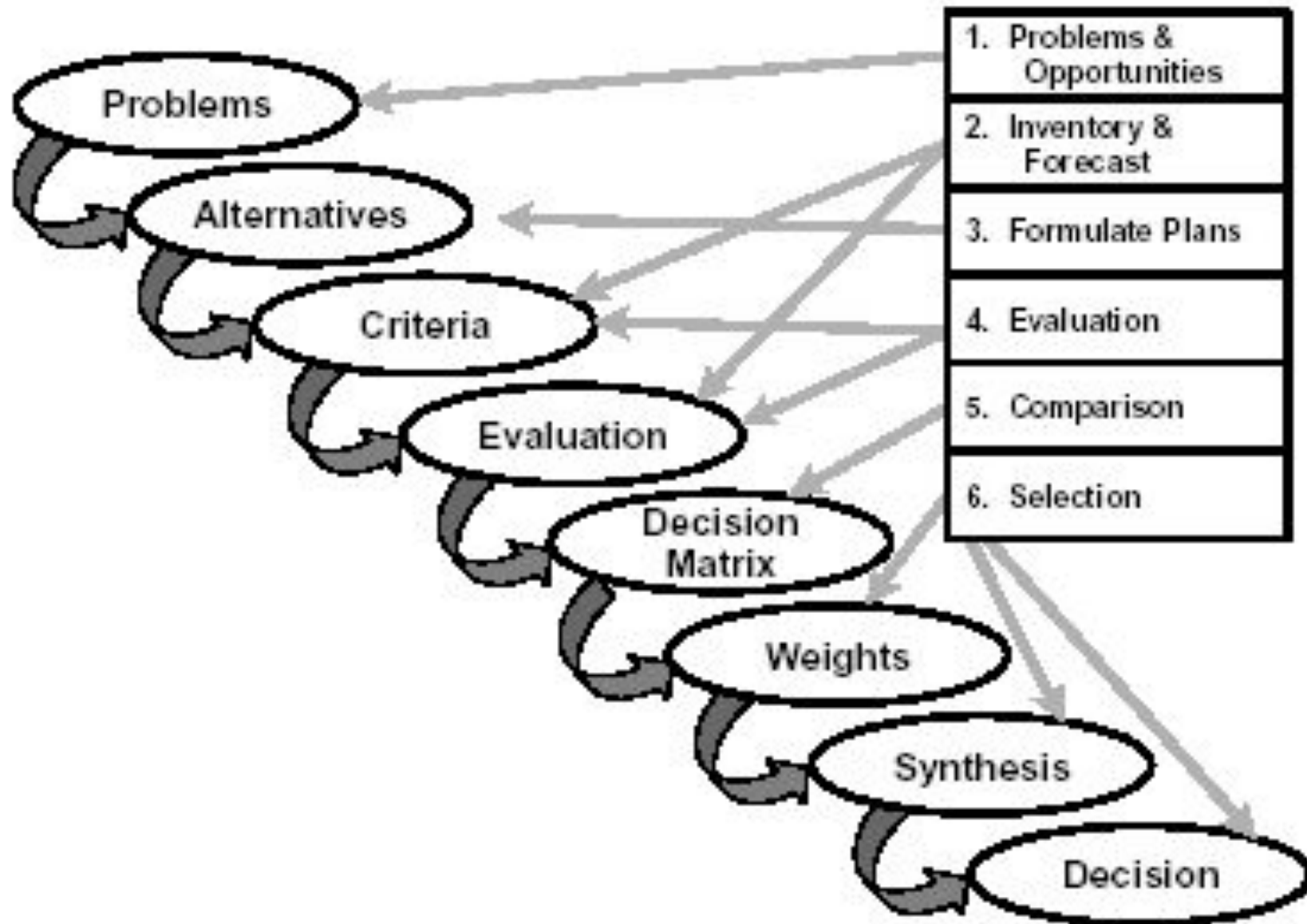
Criteria	C7	C8	C9	C10	C11
Name	C7	C8	C9	C10	C11
Description	Dist from St-Y, Cattle-br farms	Dist from Eco-adverse objects	Radioactive contamination	General qualitative assessm	Cost
Scale	local \ km \ maximize	local \ km \ maximize	local \ Ci/km2 \ minimize	local \ 10 point.Sc \ maximize	local \ \$ \ minimize
Weight	0.05	0.15	0.45	0.15	0.2

Performance Table	C7	C8	C9	C10	C11
A1	2.4	3.2	9.5	6	30
A2	2.7	2.9	4.6	9	50
A3	2.5	3.1	7.5	2	30
A4	2	3	1.2	8	42
A5	1.9	4.6	2.6	6	40



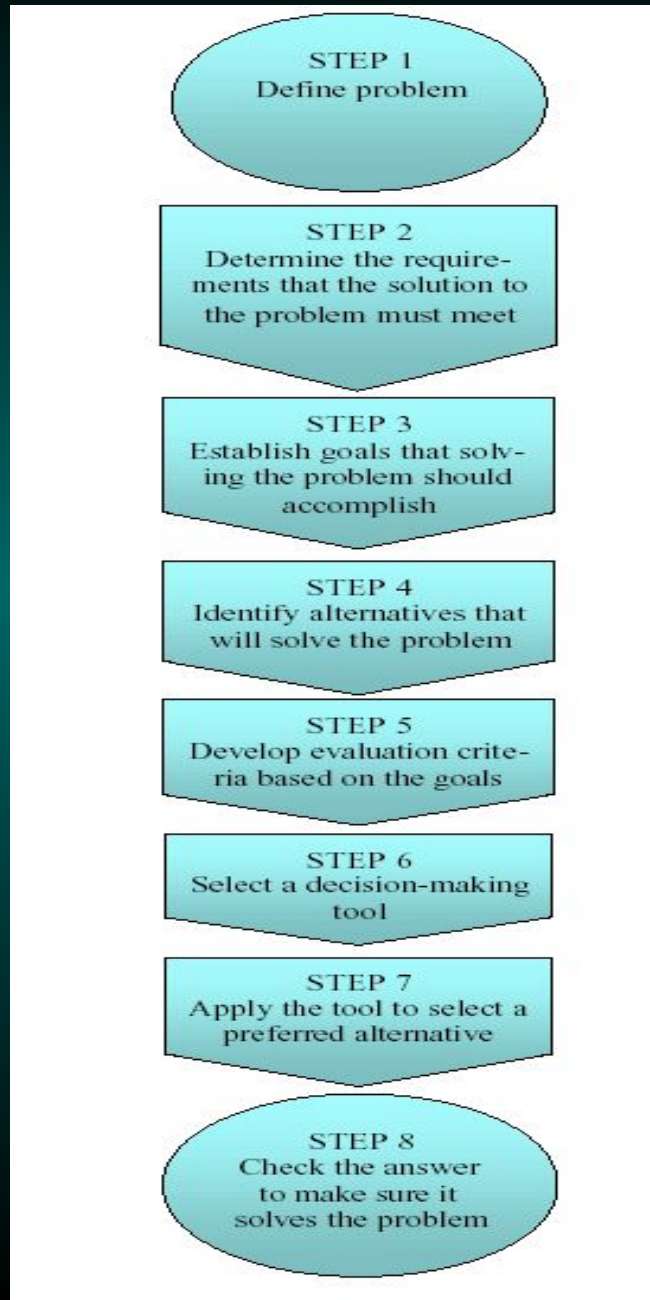


# Последовательность шагов в рамках MCDA



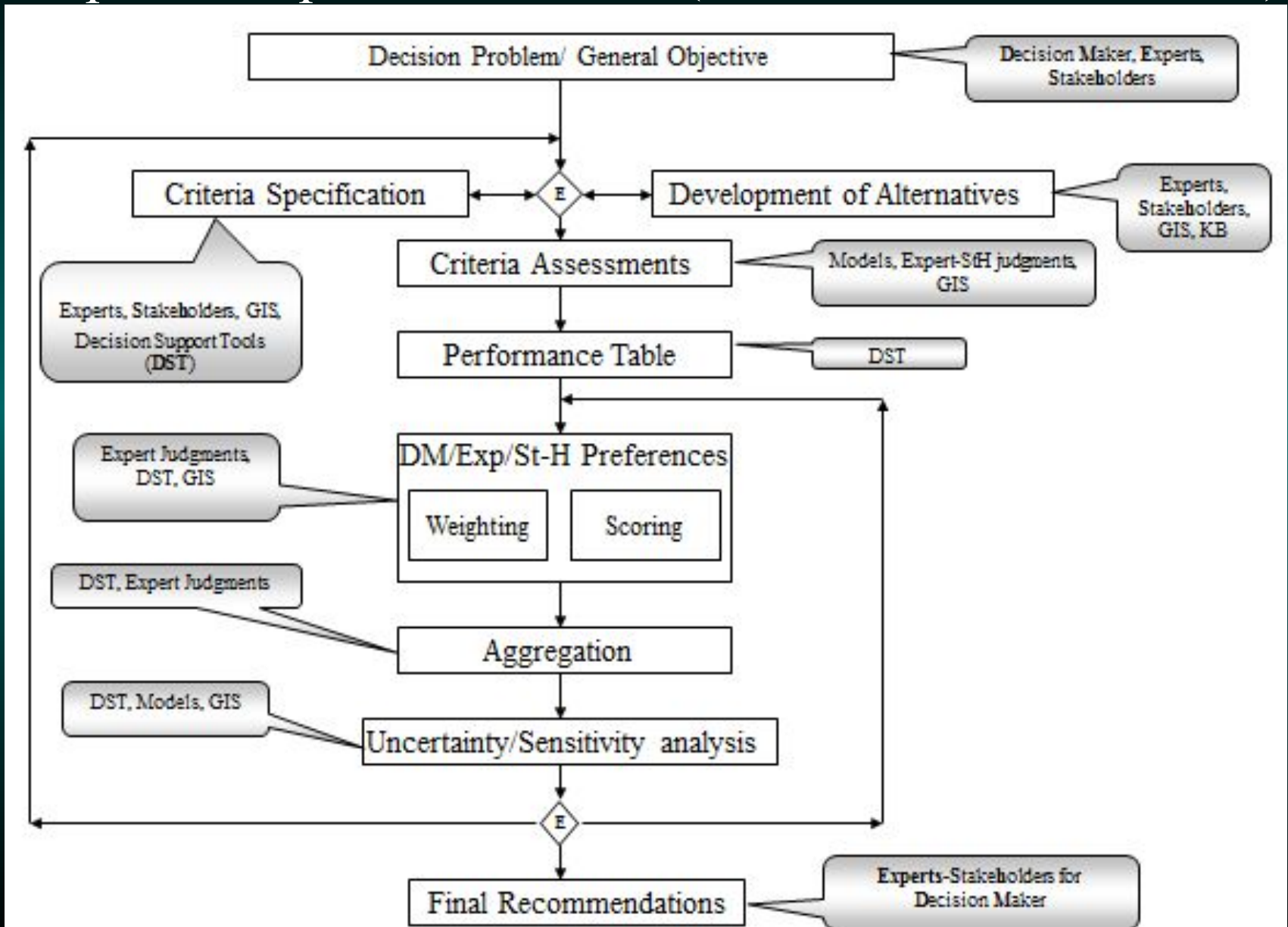


# Последовательность шагов в рамках процесса MCDA:





# Последовательность шагов в рамках процесса MCDA (Decision Process Flow Chart)



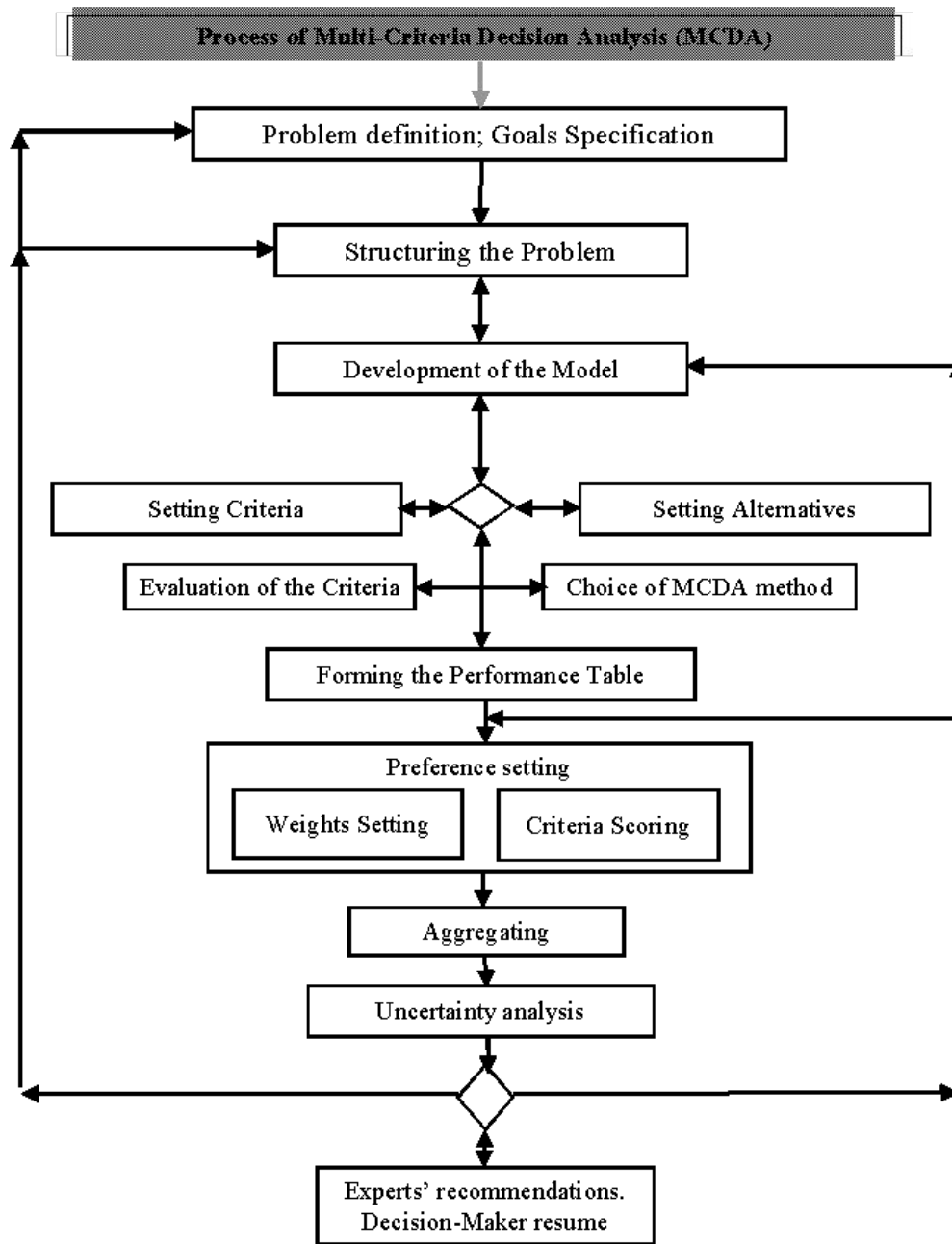
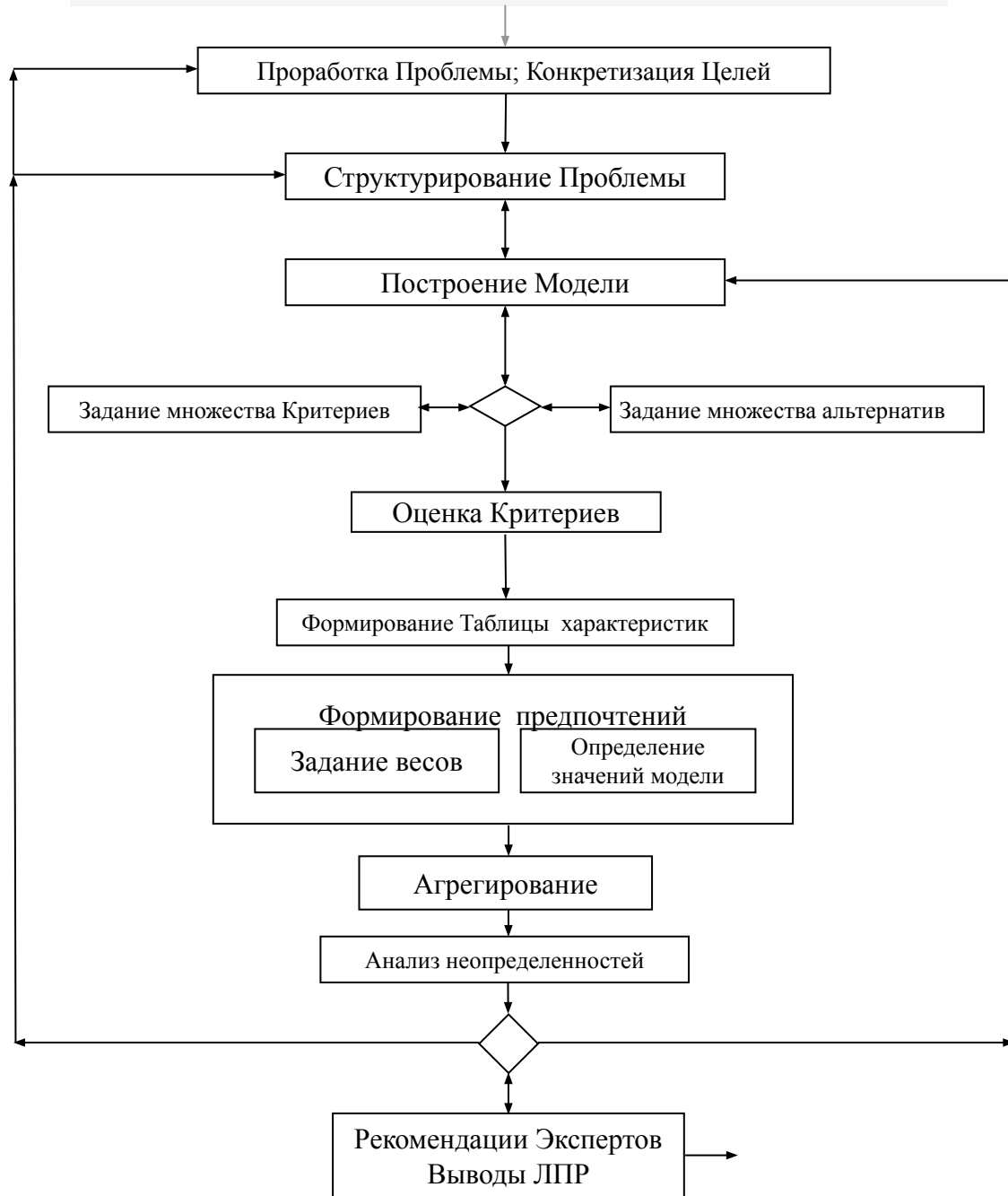


Fig.1. Aggregated scheme of the MCDA process.



# Процесс Многокритериального Анализа Решений (МКАР)





# МКАР (MCDA)

**Многокритериальная задача:**

$$A = \{A_1, \dots, A_n\}$$

$$C = \{C_1, \dots, C_m\}$$

$$a, b \in A,$$

$$C(a) = (C_1(a), \dots, C_m(a)),$$

$$C(b) = (C_1(b), \dots, C_m(b))$$



# МКАР / Парето

**Доминирование векторных оценок по Парето:**

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \subset \mathbf{R}^m,$$

$$\mathbf{x} > \mathbf{y}, \text{ if } x_i \geq y_i, i = 1, \dots, m; x_{i_0} > y_{i_0}$$

*Def:* Векторная оценка  $\mathbf{x}^*$  назыв. Парето-оптимальной в  $X \subset \mathbf{R}^m$ , если не существует другого элемента в  $X$ , превосходящего  $\mathbf{x}^*$  по Парето.

*Def:* Доминирование альтернатив по Парето:

Альтернатива  $a$  превосходит/Доминирует

альтернативу  $b$ ,  $a > b$ , если  $\mathbf{C}(a) > \mathbf{C}(b)$  как вектор в  $\mathbf{R}^m$

*Def-1:* Парето-Граница/Фронт - множество

недоминируемых альтернатив (= множество Парето-оптимальных альтернатив)



# МКАР (MCDA)

**Доминирование векторных оценок:**

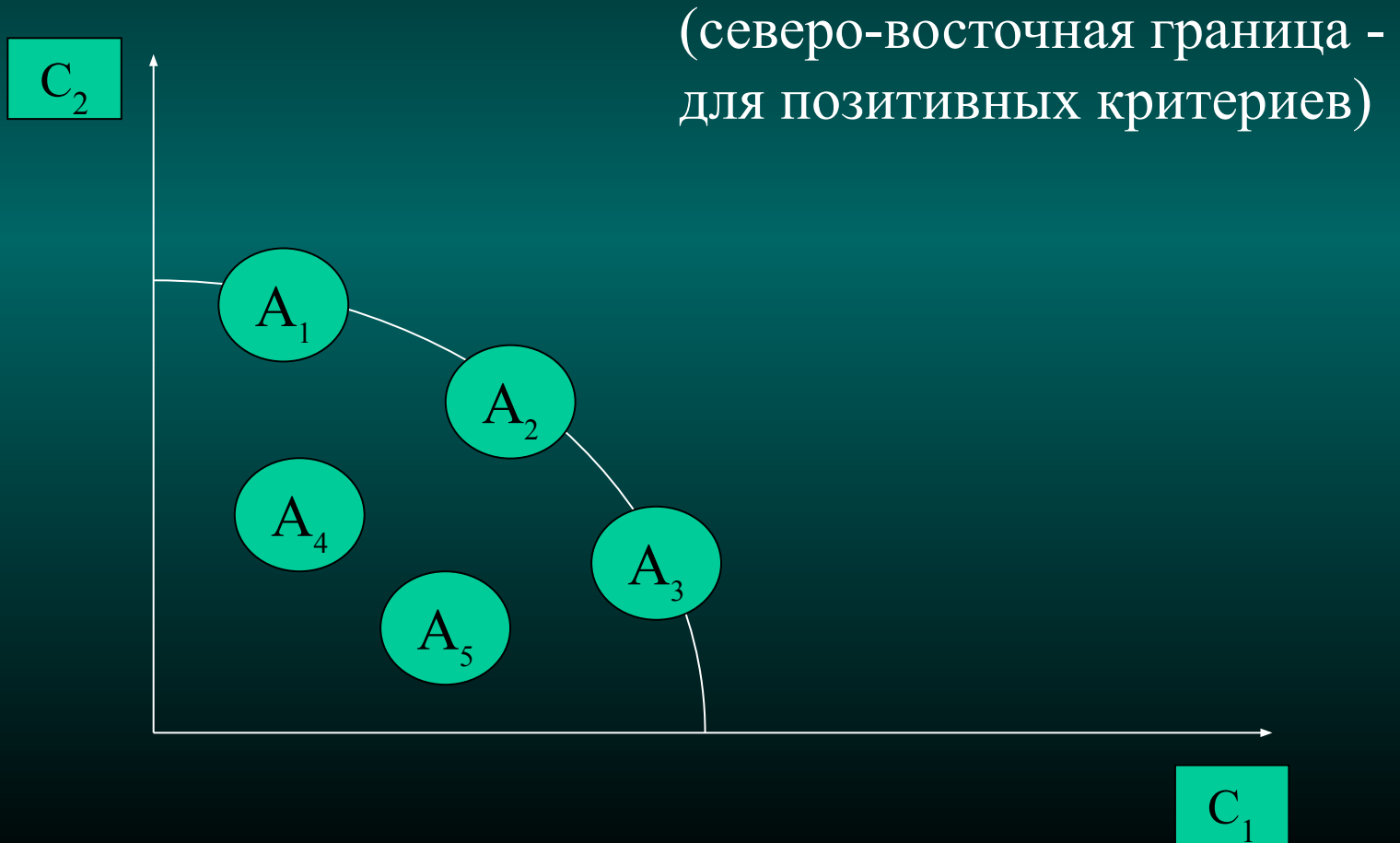
$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \subset \mathbf{R}^n,$$

*Def:* Векторная оценка  $\mathbf{x}$  назыв. Оптимальной по Слейтеру (слабо оптимальной по Парето) в  $X \subset \mathbf{R}^n$ , если для любого  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$  из  $X$ :  $x_i > y_i$  для всех  $i$ .





*Criteria:  $C_1, C_2$*   
*Alternatives:  $A_i$*





# МКАР /Парето оптимальность

Проблема оптимальности для многокритериальных задач: - понятие векторного оптимума (*априори*) не определено в общем случае...

Для любых 2ух Парето-оптим. альтернатив  $a_1, a_2$

всегда найдутся 2 критерия,  $C_1, C_2$ , такие, что

$$C_1(a_1) > C_1(a_2) \text{ и } C_2(a_1) < C_2(a_2)$$

(Общие рассуждения, лучше по 1ому критерию, хуже по 2ти, и наоборот)..

Пока не проведена работа по оценке относительной важности критериев, альтернативы на Парето-границе остаются несравнимыми.



# МКАР /Парето оптимальность

Общая методика решения МЗПР включает 2 общих подхода:

1. Для рассматриваемой МЗПР находят множество Парето-оптимальных альтернатив. Выбор лучшего решения предоставляется ЛПР/ экспертам.
2. Проводят сужение мно-ва Парето (до 1ой альтернативы в идеале) с помощью разработанных методов (моделей) МКАР (Базируясь на дополнительной информации)



# МКАР /Парето оптимальность

Пример подхода 1-2:

А) подход к сужению на основе задания нижних границ (для позитивных критериев):  $C_i \geq C_{i,min}$

С увеличением границ – множество Парето-оптим решений уменьшается.

Б) субоптимизация: выделяется 1 из критериев (напр.  $C_1$  - наиболее значимый в данных исследованиях), по оставшимся критериям вводятся нижние границы  $C_{i,min}$ . Оптимальным считается критерий с наибольшим значением выделенного критерия, удовлетворяющий всем доп. ограничениям.

Данный подход – сведение к скалярной оптимизации с использованием выявленных доп. Ограничений.



# МКАР / Парето оптимальность

Рассмотрим  $a = x \in A \subset \mathbb{R}^n$

$$C(x) = (C_1(x), \dots, C_m(x))$$

Обозначим через  $P(A, C)$  –множество всех оптимальных по Парето альтернатив  $a$ .

*Th.* Если множество  $A$  - компакт, а критерии  $C_i(x)$  непрерывны, тогда множество  $P(A, C)$  не пусто.



# МКАР /Парето оптимальность

Пусть  $A$  - конечное множество. Приведем алгоритм построения мно-ва  $P(A, C)$ .  $A = \{a_i, i=1, \dots, n\}$ . Пусть  $P$  – переменное множ-во, состоящее из несравнимых альтернатив.

Ш1. Положим  $P = \{a_1\}$ . Пусть сделано  $k$  шагов.

Ш( $k+1$ ). Берем очередную альтернативу,  $a_{k+1}$ , сравниваем ее с остальными из  $P$ . Возможны след. случаи:

а) найдется альтернатива, которая лучше по Парето, чем  $a_{k+1}$ . В этом случ. альтернатива  $a_{k+1}$  отбрасывается. Множ-во  $P$  не меняется, переходим к след шагу;

б) альтернатива  $a_{k+1}$  лучше некотор альтернатив из  $P$ . Все такие худшие альтернативы отбрасываются, получаем  $P_0$ , множ-во  $P$  переопределяется:  $P := P_0 \cup \{a_{k+1}\}$   
переходим к след шагу.



# МКАР /Парето оптимальность

в) альтернатива  $a_{k+1}$  несравнима с альтернативами из  $P$ , тогда переопределяем:

$$P := P \cup \{a_{k+1}\}$$

и переходим к след. шагу.

После  $n$  шагов получаем  $P = P(A, C)$ .



# МКАР /Парето оптимальность

Отбор оптимальных по Парето стратегий на основе экспертной информации. Пример:

Ученик	Оценка	
	Математика	Литература
$a_1$	3	5
$a_2$	5	4
$a_3$	4	5





# МКАР / Парето оптимальность

а) предметы равноценны: тогда  $a_2$  и (гипотетический)  $a_3$  – учатся одинаково (эквивалентны), но  $a_3$  лучше  $a_1$ , тогда, предполагая транзитивность, утверждаем, что ученик/альтернатива  $a_2$  предпочтительнее  $a_1$ .

б) математика важнее литер. Тогда  $a_2$  учится лучше  $a_3$  (набор оценок, одинаковый, но 5 по более важному предмету), а  $a_3$  учится лучше  $a_1$ .; тогда  $a_2$  учится лучше  $a_1$ .

в) если литер важнее мат, тогда  $a_3$  учится лучше  $a_2$ , но  $a_2$  и  $a_1$  - несравнимы....

Ученик	Оценка	
	Математика	Литература
$a_1$	3	5
$a_2$	5	4
$a_3$	4	5