



Raport I

Wykonał:

Daniil Reznikov

Opiekun:

dr hab. inż. Agnieszka Tomaszewska,
prof. nadz. PG

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska



Spis treści

1. Idea pracy
2. Analizowany implant
3. Funkcja energii sprężystości
4. Procedura w Wolfram Mathematica
5. Procedura w Matlab
6. Modelowanie Abaqus
7. Literatura

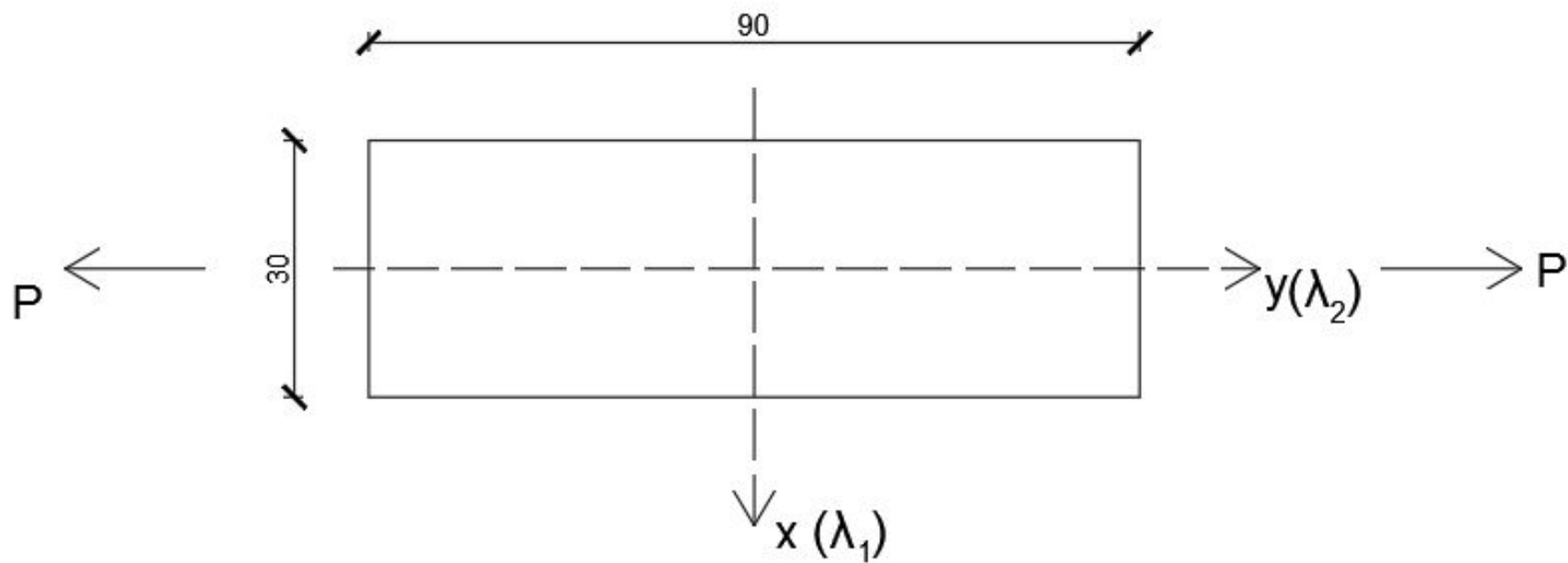


Idea pracy

Zamodelowanie implantu (materiał hipersprężysty) w programie numerycznym jako model membranowy anizotropowy.



Analizowany implant





Funkcja energii sprężystości

Materiałem hipersprężystym nazywamy materiał, dla którego istnieje taka funkcja W , nazywana potencjałem sprężystym, przyjmująca wartości skalarne, a której argumentem jest miara deformacji materiału, że związek konstytutywny można zapisać w postaci:

$$\mathbf{T}_s = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$$

Dodatkowo, można zapisać:

$$W(F) = W(C) = W(E)$$



Funkcja energii sprężystości

Funkcja energii sprężystości:

$$U = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D} \left(\frac{(J^{el})^2 - 1}{2} - \ln J^{el} \right) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \exp \left[k_2 \langle \bar{E}_\alpha \rangle^2 \right] - 1 \right\},$$

with

$$\bar{E}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \kappa (\bar{I}_1 - 3) + (1 - 3\kappa) (\bar{I}_{4(\alpha\alpha)} - 1),$$

Do zbudowania powyższej funkcji potrzebne następujące dane:

$\bar{I}_1(\bar{C})$ - niezmiennik I,

$\bar{I}_4(\bar{C})$ - niezmiennik IV,

J^{el} - współczynnik związany z odkształceniami termicznymi.



Funkcja energii sprężystości

Funkcja energii sprężystości:

$$U = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D} \left(\frac{(J^{el})^2 - 1}{2} - \ln J^{el} \right) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \exp \left[k_2 \langle \bar{E}_\alpha \rangle^2 \right] - 1 \right\},$$

with

$$\bar{E}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \kappa (\bar{I}_1 - 3) + (1 - 3\kappa) (\bar{I}_{4(\alpha\alpha)} - 1),$$

Do zbudowania powyższej funkcji potrzebne następujące dane:

C_{10} – parametr opisujący naprężenia ścinające,

D – parametr związany z odkształceniami termicznymi,

k_1 – parametr opisujący naprężenia ($k_1 > 0$),

k_2 – parametr bezwymiarowy ($k_2 > 0$),

k – parametr dyspersji (od 0 do 1/3, jeżeli 0 – anizotropia, jeżeli 1/3 – izotropia).



Funkcja energii sprężystości

Wyznaczenie danych – zmodyfikowany tensor deformacji

Badany materiał jest ściśliwy. Dla materiału ściśliwego przyjmujemy następujące zależności:

$$F = J^{\frac{1}{3}} \bar{F}$$

$$C = J^{\frac{2}{3}} \bar{C}$$

$$\bar{\lambda}_{\alpha} = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_{\alpha}$$

gdzie:

$\bar{\lambda}_{\alpha}$ - zmodyfikowane rozciągnięcia główne,

$\bar{F}$ - zmodyfikowany gradient deformacji,

$\bar{C}$ - zmodyfikowany tensor deformacji.

$\bar{C}$ i $\bar{F}$ odpowiadają części, która jest związana z zachowaniem objętości podczas deformacji.



Funkcja energii sprężystości

Wyznaczenie danych – zmodyfikowany tensor deformacji

W swoim rozwiązaniu dla uproszczenia przyjąłem, że materiał jest nieściśliwy. Z tego wynika:

$$\det F = J = 1$$

$$\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha$$

Uwzględniając powyższe założenia, ostateczna postać tensora deformacji jest następująca:

$$\bar{C} = C = U^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \end{bmatrix}$$



Funkcja energii sprężystości

Niezmienniki

Niezmiennik $\bar{I}_1(\bar{C})$ wygląda następująco:

$$\bar{I}_1(\bar{C}) = \text{tr} \left[\bar{I}_1(\bar{C}) \right] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}$$

Niezmiennik ten ma taką postać, bo materiał jest nieściśliwy (z badań doświadczalnych potrzebujemy rozciągnięcia tylko na kierunku podłużnym i poprzecznym).



Funkcja energii sprężystości

Niezmienniki

Natomiast $\bar{I}_4(\bar{C})$ opisuje zachowanie właściwości rodziny włókien i jego współdziałanie z innymi składnikami materialnymi. Ogólna postać danego niezmiennika wygląda następująco (wektory $\bar{a}_0$ opisują kierunki włókien):

$$\bar{I}_4(\bar{C}) = \bar{a}_0^T \bar{C} \bar{a}_0$$

W naszym przypadku dany niezmiennik ma następującą postać:

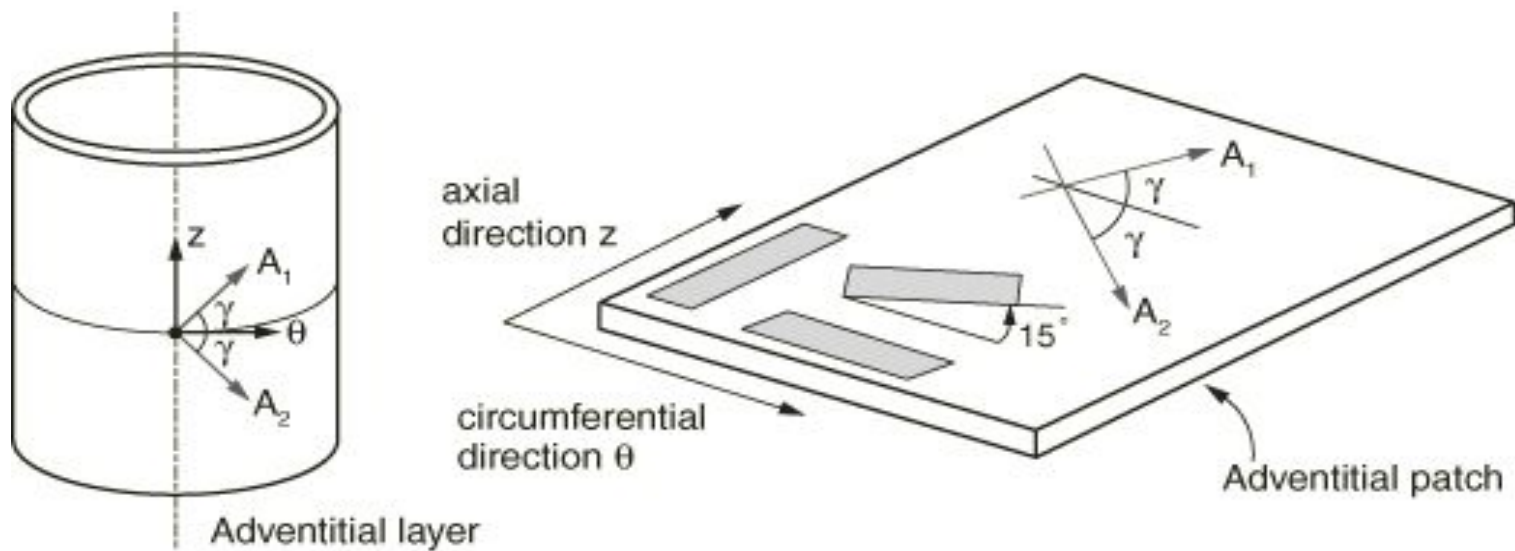
$$\bar{I}_4 = \lambda_2^2 \cos^2 \gamma + \lambda_1^2 \sin^2 \gamma$$

Ważne jest to, że mamy tutaj dodatkowy parametr γ .



Funkcja energii sprężystości

Nieźmienniki





Funkcja energii sprężystości

Współczynnik związany z odkształceniami termicznymi

Wzór na J^{el} jest następujący (podany w Abaqusie):

$$J^{el} = \frac{J}{J^{th}}$$

Natomiast J^{th} ma postać (podana w Abaqusie):

$$J^{th} = (1 + \varepsilon_1^{th})(1 + \varepsilon_2^{th})(1 + \varepsilon_3^{th})$$

gdzie:

ε^{th} - odkształcenie termiczne na kierunku głównym (w naszym przypadku zakładamy, że odkształcenia termiczne są równe 0)

Uwzględniając powyższe założenia ostateczna postać J^{el} jest następująca:

$$J^{el} = \frac{J}{(1 + \varepsilon_1^{th})(1 + \varepsilon_2^{th})(1 + \varepsilon_3^{th})} = \frac{J}{1} = J = 1$$



Funkcja energii sprężystości

Ostatecznie mamy 6 niewiadomych parametrów:

C_{10} – parametr opisujący naprężenia ścinające,

D – parametr związany z odkształceniami termicznymi,

k_1 – parametr opisujący naprężenia ($k_1 > 0$),

k_2 – parametr bezwymiarowy ($k_2 > 0$),

k – parametr dyspersji (od 0 do 1/3, jeżeli 0 – anizotropia, jeżeli 1/3 – izotropia),

γ – kąt pomiędzy włóknem a osią.



Procedura w Wolfram Mathematica

Funkcja energii sprężystości wygląda następująco:

$$\frac{\left(-1 + e^{k_2 \left(k \left(-3 + \lambda_x^2 + \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + \lambda_y^2 \right) + (1-3k) \left(-1 + \sin^2[\phi] \lambda_x^2 + \cos^2[\phi] \lambda_y^2 \right) \right)^2} \right)^{k_1}}{2 k_2} + c_{10} \left(-3 + \lambda_x^2 + \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + \lambda_y^2 \right)$$



Procedura w Wolfram Mathematica

Kolejnym etapem jest obliczenie naprężeń. Żeby ich otrzymać został użyty następujący wzór :

$$\sigma_{\alpha} = J^{-1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_{\alpha}}$$

W naszym przypadku mamy tylko rozciąganie w kierunku podłużnym, więc powyższy wzór można przekształcić w następującą postać:

$$\sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2}$$



Procedura w Wolfram Mathematica

Ostateczna postać naprężeń w programie Wolfram Mathematica wygląda następująco:

$$\lambda_y \left(C_{10} \left(-\frac{2}{\lambda_x^2 \lambda_y^3} + 2 \lambda_y \right) + e^{k_2 \left(-1 + (k + (1-3k) \sin^2[\phi]) \lambda_x^2 + \frac{k}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + (k + (1-3k) \cos^2[\phi]) \lambda_y^2 \right)^2} \right. \\ \left. k_1 \left(-\frac{2k}{\lambda_x^2 \lambda_y^3} + 2 (k + (1-3k) \cos^2[\phi]) \lambda_y \right) \left(-1 + (k + (1-3k) \sin^2[\phi]) \lambda_x^2 + \frac{k}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + (k + (1-3k) \cos^2[\phi]) \lambda_y^2 \right) \right)$$

Po zbudowaniu powyższego równania można zauważyć, że pozbyliśmy się parametru D.

Więc zostało nam 5 parametrów do wyznaczenia: $C_{10}, k_1, k_2, k, \gamma$.



Procedura w Matlab

Do wyznaczenia parametrów została użyta funkcja *lsqnonlin*.
Zostały otrzymane następujące wartości parametrów:

C_{10}	k_2	k_1	k	γ
0.0126	0.0001	0.3644	0	0.2829

Do zbudowania powyższej funkcji potrzebne następujące dane:

C_{10} – parametr opisujący naprężenia ścinające,

γ – kąt początkowy,

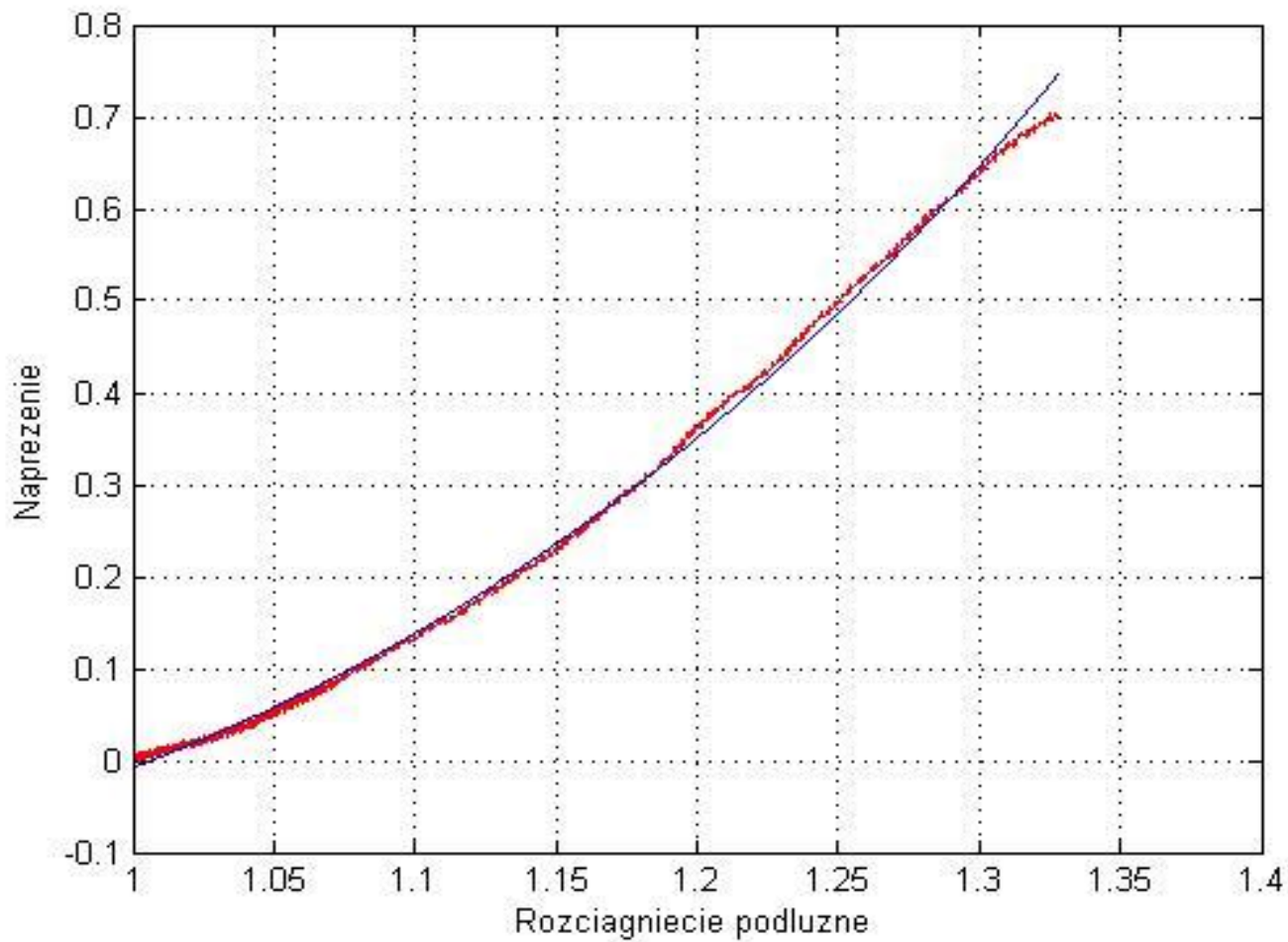
k_1 – parametr opisujący naprężenia ($k_1 > 0$),

k_2 – parametr bezwymiarowy ($k_2 > 0$),

k – parametr dyspersji (od 0 do 1/3, jeżeli 0 – anizotropia, jeżeli 1/3 – izotropia).



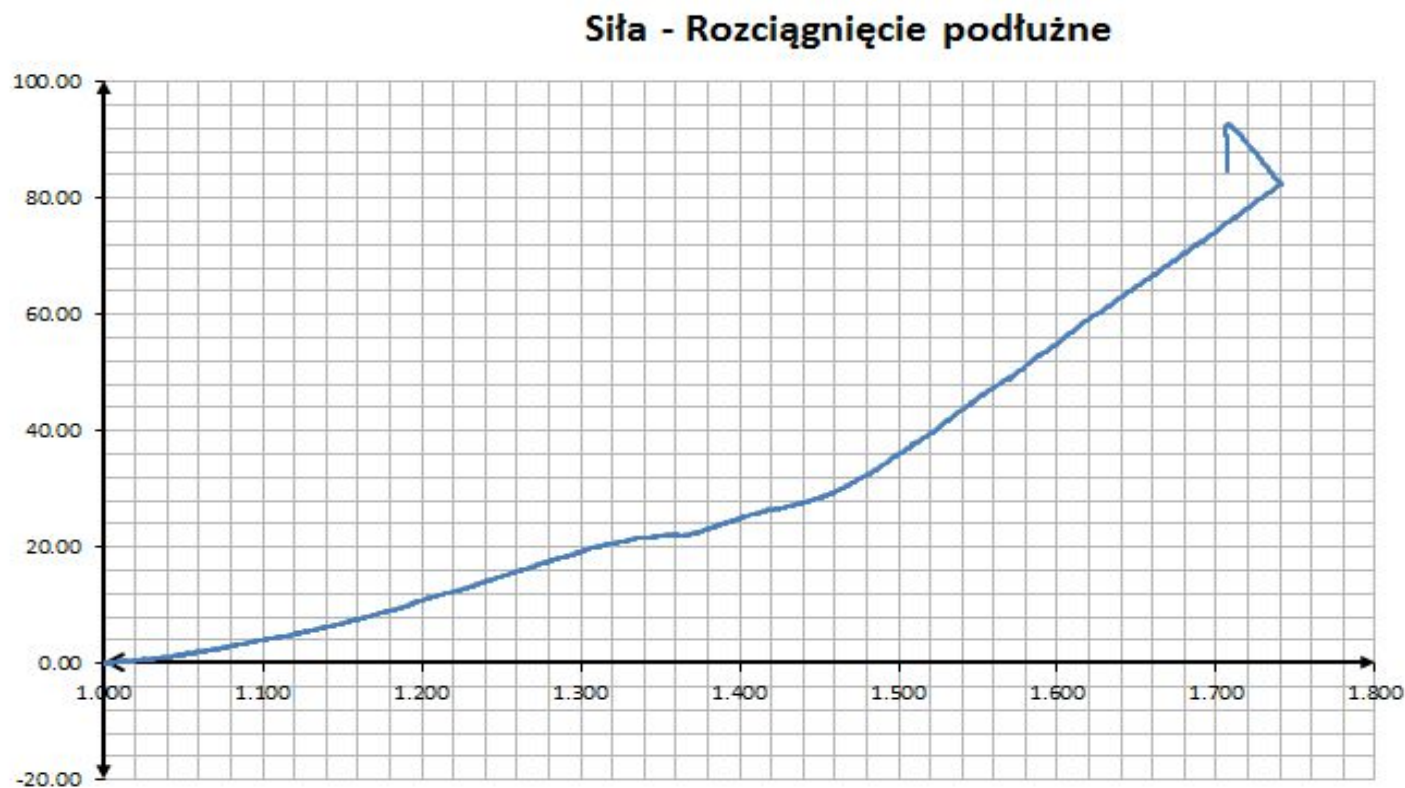
Procedura w Matlab





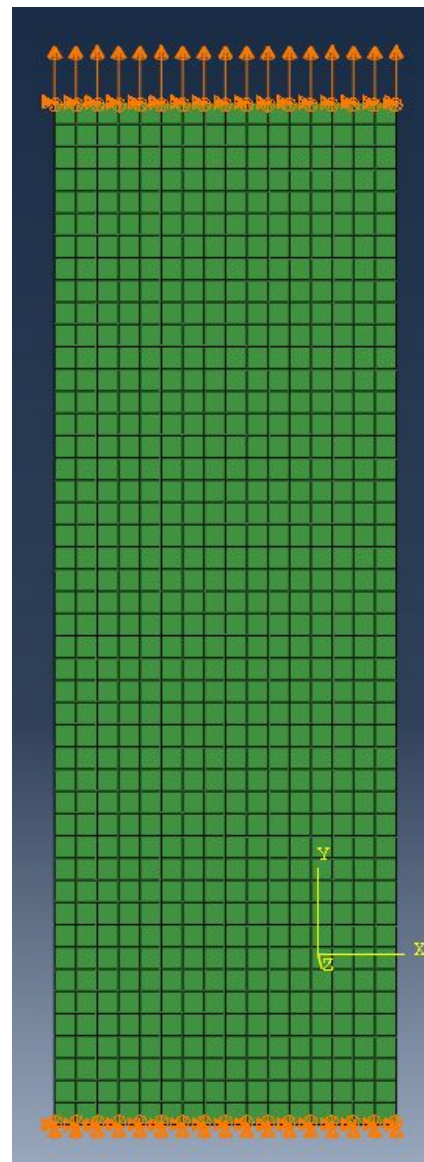
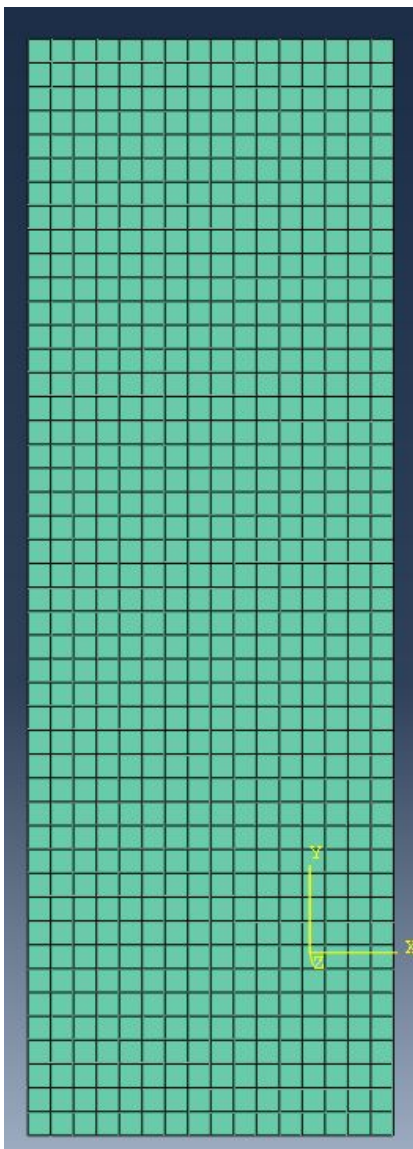
Procedura w Matlab

Parametry wyznaczone dla zakresu rozciągnięcia od 1 do 1,33. Widać z wykresu, że po wartości 1,33 jest mały spadek, dlatego moim zdaniem równanie, które było opisane wyżej nie jest w stanie obliczyć parametry dla zakresu całkowitego. Ten spadek na wykresie może być związany z tym, że próbka podczas badania jednoosiowego rozciągania zaczyna się zwijać.



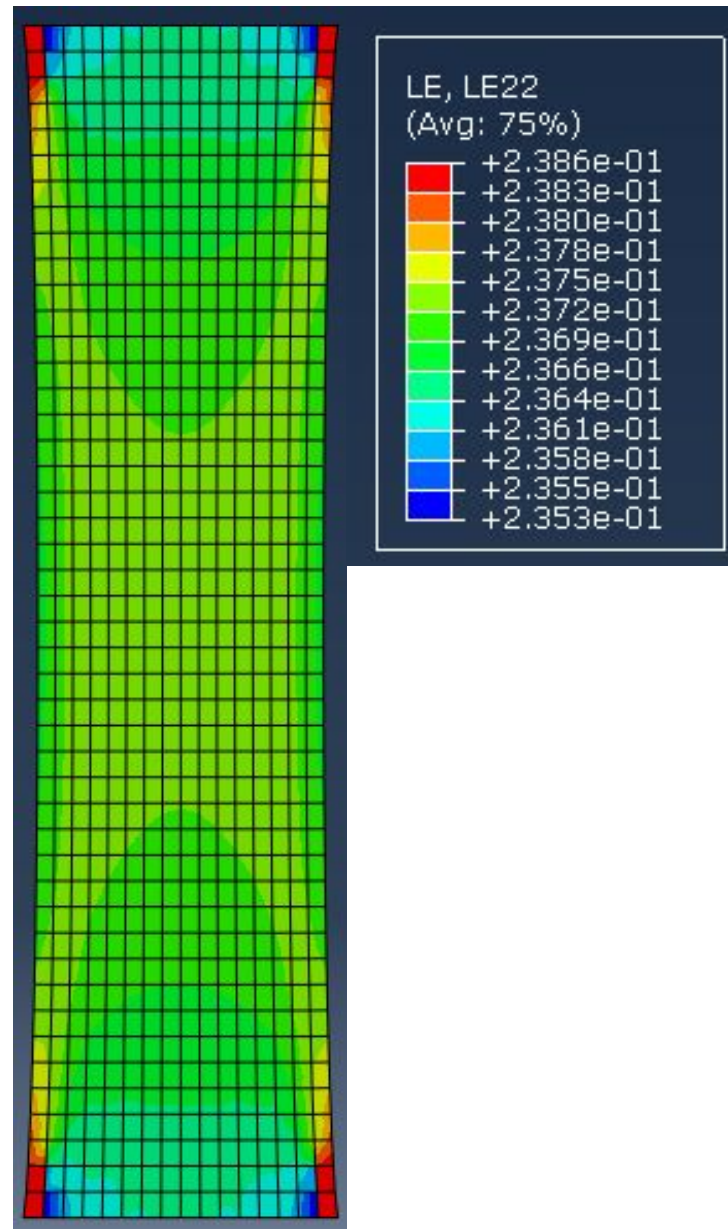
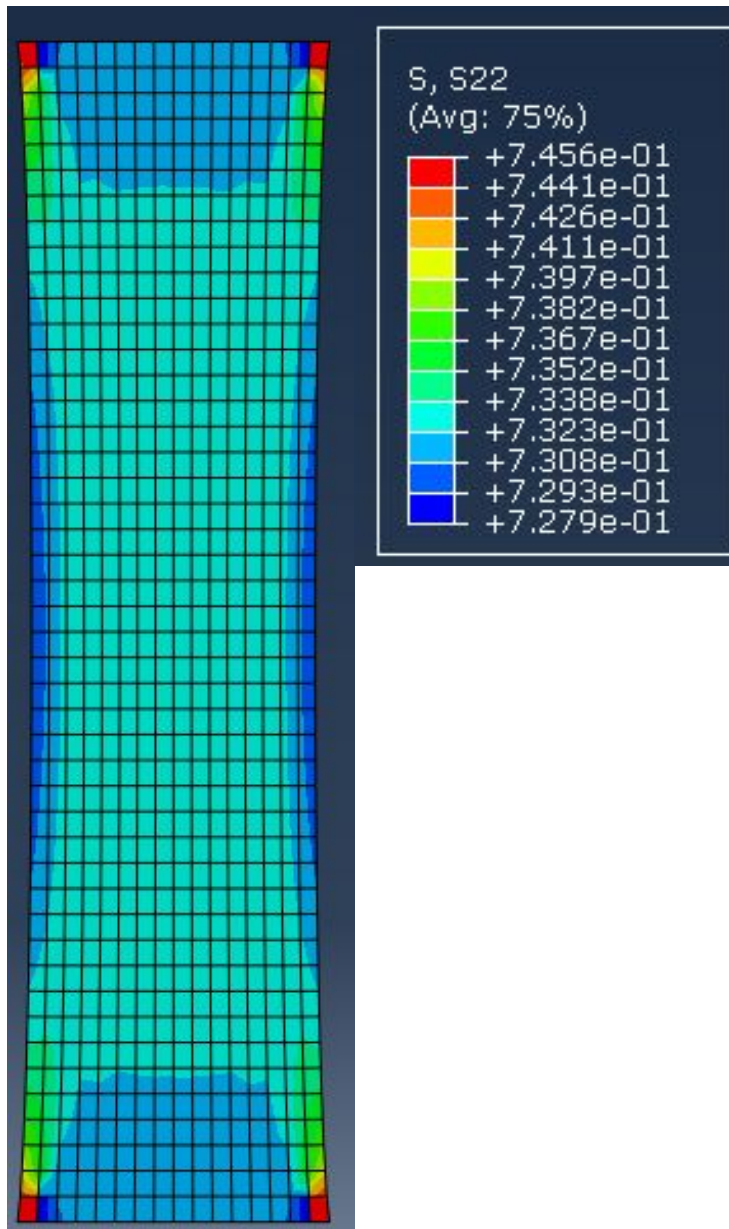


Modelowanie Abaqus



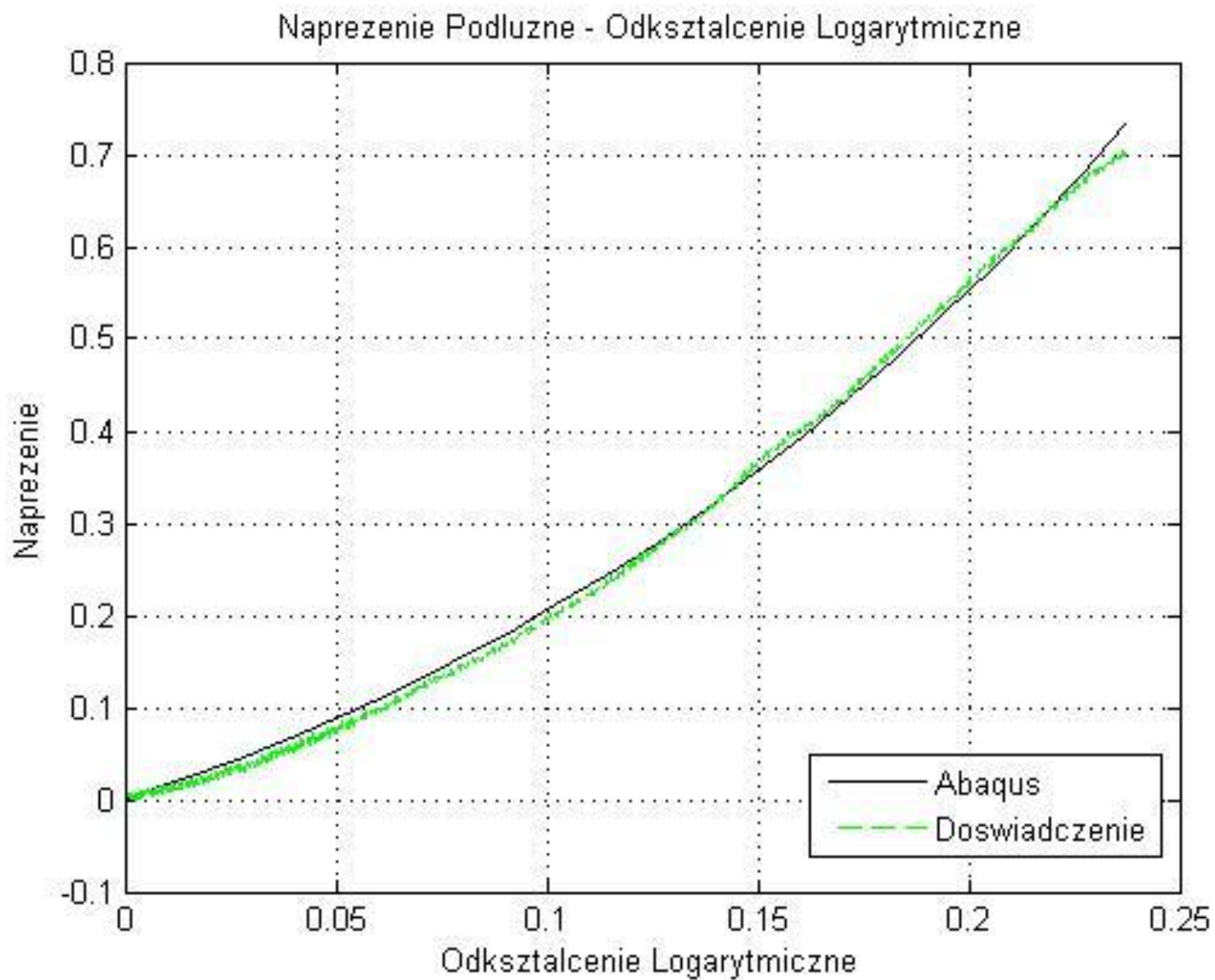


Modelowanie Abaqus





Modelowanie Abaqus





Literatura

1. T. Christian Gasser, Ray W. Ogden and Gerhard A. Holzapfel: *Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations*
2. Gerhard A. Holzapfel, Gerhard Sommer, Christian T. Gasser, and Peter Regitnig: *Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modeling*
3. Szeptyński P.: *Teoria sprężystości*
4. *Abaqus manual*
5. Gerhard A. Holzapfel: *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering.*

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ



POLITECHNIKA GDAŃSKA
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska